#### Орловский государственный университет

**Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина** 

Институт вычислительной математики РАН

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

# ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНЫХ ШКОЛ-СЕМИНАРОВ «МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»



Печатается по решению организационного комитета I и II Международных школсеминаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

#### Организационный комитет

профессор Гандель Ю.В. (Украина) профессор Лифанов И.К. (Россия) профессор Пивень В.Ф. (Россия) учёный секретарь оргкомитета кандидат физ.-мат. наук Аксюхин А.А. (Россия)

#### Редакционная коллегия

Пивень В.Ф. – ответственный редактор Гандель Ю.В. Лифанов И.К.

Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орёл. ОГУ. 2002. - 103 с.

В сборнике представлены статьи участников I и II Международных школсеминаров молодых ученых России «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся в 2000 и 2002 годах на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школ-семинаров.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем теории фильтрации, аэро- и гидродинамики, теплопроводности, электродинамики, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, численных методов и других методов математической физики.

Компьютерная вёрстка Аксюхина А.А.

Сборник статей издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00063).

- © Оргкомитет школ-семинаров «МДОЗМФ», 2002 г.
- © Авторы статей, 2002 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие	5
1.	Аксюхин А.А.	Исследование трехмерной фильтрации жидкости к несовершенной скважине в кусочно-однородной среде с кусочно-гладкой границей сопряжения6
2.	Буравлев И.В.	Продвижение границы раздела "разноцветных" жидкостей в кусочно-неоднородных слоях
3.	Голубев Г.В.	Учет дискретных особенностей логарифмического типа при фильтрации жидкости в пористой среде по нелинейному закону
4.	Гуляев В.В.	Математическая постановка задачи об установив- шемся обтекании самолета дозвуковым потоком сжимаемого газа в условиях выдува струй двигателей силовой установки
5.	Гуляев В.В.	Интегральные уравнения линейной задачи обтекания самолета со струями
6.	Гуляев В.В.	Некоторые результаты исследований аэродинамических характеристик несущих систем при их интерференции со струями
7.	Димитрогло М.Г.	Разрушение концевых вихрей при помощи отсоса внешнего потока
8.	Зубок В.В.	Особенности методики численного исследования обтекания летательного аппарата при расчетах аэродинамических характеристик
9.	Квасов А.А.	Исследование шлейфа вымываемого загрязнения в плоскопараллельной задаче с прямолинейной границей смены однородностей
10.	Лебедева Н.В.	Вопросы численной реализации решений сингулярного интегрального уравнения на отрезке в классе обобщённых функций
11.	Липачёв Е.К.	Приближенное решение задачи рассеяния волн периодической структурой с включением54
12.	Марков О.И.	Численное решение граничной задачи для теплового поля ветви термоэлемента

13. Нефёдов В.И.	О взаимодополняемости феноменологических и квантовых теорий
14. Нечаев В.А., Нечаева Н.А.	Задача о растекании бугра грунтовых вод62
15. Пивень В.Ф.	Задача об эволюции границы раздела жидкостей различной плотности и вязкости в неоднородной среде
16. Пивень В.Ф., Квасов А.А.	Двумерная задача об определении шлейфа вымываемого загрязнения
17. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С.	Двумерное продвижение границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочнонеоднородном слое
18. Подобедов В.А., Попов В.М.	Универсализация вычислительных процедур комплексного анализа аэродинамических компоновок
19. Ставцев С.Л.	Особенности расчёта поля скоростей трёхмерных течений в кусочно-неоднородной среде
20. Фролов М.А.	Исследование двумерной фильтрации жидкости к системе скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат

#### ПРЕДИСЛОВИЕ

оргкомитетов IX X Согласно решениям И Международных симпозиумов «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» состоялись первая (13-16 декабря 2000 г.) и вторая (11-14 февраля 2002 г.) Международные школы-семинары молодых учёных России и Украины. Инициаторами и организаторами этих школ выступили доктора профессора Ю.В. Гандель (Украина), И.К. Лифанов наук, В.Ф. Пивень (Россия). К работе образованного ими оргкомитета был привлечён кандидат физ.-мат. наук А.А. Аксюхин (Россия). Эту инициативу поддержал профессор Ф.С. Авдеев, ректор Орловского государственного университета, в стенах которого работали эти школы. Участники школ – молодые учёные, аспиранты и студенты из Москвы, Харькова, Феодосии, Смоленска, Орла и других городов России и Украины. Лекторы школ – профессора Ю.В. Гандель (Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина), А.И. Желанников, И.К. Лифанов (Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского), Е.Е. Тыртышников (Институт вычислительной математики PAH), В.Ф. Пивень (Орловский государственный университет) выступили с обзорными лекциями по современным проблемам численного решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на основе дискретных особенностей, применения теории метода вычислительных методах и приложениям к актуальным граничным задачам теории фильтрации, излучения распространения аэродинамики, И электромагнитных волн. Заслушаны также научные сообщения аспирантов и молодых преподавателей.

Лекции, сообщения и состоявшиеся дискуссии вызвали живой интерес участников школ-семинаров. В связи с этим оргкомитет принял решение издать труды участников этих школ, а также труды лиц, занимающихся указанной проблематикой школ-семинаров.

Тематика трудов, представленных в настоящем сборнике, охватывает широкий диапазон проблем аэродинамики, теории фильтрации, электродинамики, других областей механики и физики, которые исследуются аналитически и численно на основе метода дискретных особенностей.

Сборник трудов предназначен лицам, занимающимися исследованием граничных задач в отмеченных выше областях механики и физики.

Оргкомитет школ-семинаров приносит глубокую благодарность ректору Орловского государственного университета, профессору Ф.С. Авдееву за всестороннюю (особенно финансовую) помощь в проведении этих школ.

Труды издаются при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00063).

Октябрь, 2002 г.

В.Ф. Пивень

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ<sup>1)</sup>

#### А.А. Аксюхин

Орловский государственный университет, e-mail: aksjuhin@au.ru

Численно исследуется трехмерная задача фильтрации жидкости к несовершенной наклонной скважине, произвольно расположенной в кусочно-однородной среде. В отличие от [1], граница смены сред постоянных проницаемостей — замкнутая кусочно-гладкая поверхность. Вычисляется дебит скважины. Изучено влияние формы границы сопряжения и величины скачка проницаемости сред на дебит.

1. Обобщение результатов, полученных в работах [1, 2], показало, что стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости к несовершенной по форме вскрытия пласта наклонной скважине, расположенной в однородном по проницаемости полубесконечном пласте с полусферической поверхностью питания  $\sigma_{\Pi}$  радиуса d и плоской кровлей пласта  $\sigma_{0}$ , описывает функция:

$$\begin{split} \varphi_0(M) &= \frac{q}{4\pi} \left( \ln \frac{R_1 + r_1}{R_2 + r_2} \pm \ln \frac{\widetilde{R}_1 + \widetilde{r}_1}{\widetilde{R}_2 + \widetilde{r}_2} \right) - \frac{qd}{4\pi r_M} \left( \ln \frac{R_1^* + r_1^*}{R_2^* + r_2^*} \pm \ln \frac{\widetilde{R}_1^* + \widetilde{r}_1^*}{\widetilde{R}_2^* + \widetilde{r}_2^*} \right), \ (1.1) \end{split}$$
 где 
$$R_v = \sqrt{\rho_{MM_v}^2 + (z_v - z_M)^2} \;, \; \widetilde{R}_v = \sqrt{\rho_{MM_v}^2 + (z_v + z_M)^2} \;, \\ \rho_{MM_v} &= \sqrt{(x_v - x_M)^2 + (y_v - y_M)^2} \;, \\ r_v &= (x_v - x_M) \cos \alpha + (y_v - y_M) \cos \beta + (z_v - z_M) \cos \gamma \;, \\ \widetilde{r}_v &= (x_v - x_M) \cos \alpha + (y_v - y_M) \cos \beta + (z_v + z_M) \cos \gamma \;, \\ R_v^* &= \sqrt{\left(\rho_{MM_v}^*\right)^2 + \left(z_v - \frac{d^2}{r_M^2} z_M\right)^2} \;, \; \widetilde{R}_v^* = \sqrt{\left(\rho_{MM_v}^*\right)^2 + \left(z_v + \frac{d^2}{r_M^2} z_M\right)^2} \;, \\ \rho^*_{MM_v} &= \sqrt{\left(x_v - \frac{d^2}{r_M^2} x_M\right)^2 + \left(y_v - \frac{d^2}{r_M^2} y_M\right)^2} \;, \; r_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + y_M^2} \;, \\ r_v^* &= \left(x_v - \frac{d^2}{r_M^2} x_M\right) \cos \alpha + \left(y_v - \frac{d^2}{r_M^2} y_M\right) \cos \beta + \left(z_v - \frac{d^2}{r_M^2} z_M\right) \cos \gamma \;, \\ \widetilde{r}_v^* &= \left(x_v - \frac{d^2}{r_M^2} x_M\right) \cos \alpha + \left(y_v - \frac{d^2}{r_M^2} y_M\right) \cos \beta + \left(z_v + \frac{d^2}{r_M^2} z_M\right) \cos \gamma \;, \; v = 1, 2 \;. \end{split}$$

Декартовы координаты x,y,z выбраны таким образом, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью кровли пласта  $\sigma_0$ , ось Oz была направ-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 01-01-00063 и № 02-01-06460)

лена в область фильтрации (вниз), а начало координат совпадало с центром полусферы  $\sigma_{\Pi}$ . Знаки «+» перед логарифмами в выражении (1.1) соответствуют непроницаемой плоскости  $\sigma_0$ , а знаки «-» берутся в том случае, когда  $\sigma_0$  — эквипотенциальная поверхность. Точка M(x,y,z) — произвольная точка области питания;  $M_1(x_1,y_1,z_1)$  и  $M_2(x_2,y_2,z_2)$  — центры оснований цилиндрической поверхности фильтра скважины радиуса  $R_c << M_1 M_2$ ; q — дебит скважины, приходящийся на единицу длины фильтра;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы наклона оси фильтра скважины к декартовым осям координат Ox, Oy и Oz соответственно.

В том случае, если среда в области питания D является кусочно-однородной, и гладкая замкнутая поверхность  $\sigma$  класса Ляпунова разбивает D на внешнюю  $D_1$  и внутреннюю  $D_2$  области, среды в которых характеризуются постоянными коэффициентами проницаемости  $k_1$  и  $k_2$ , то, как показано в статье [1], задача определения дебита скважины сводится к решению системы интегрального уравнения и интегрального соотношения вида:

$$\begin{cases}
\frac{g(M)}{2} - \lambda \int_{\sigma} g(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N = \lambda \varphi_0(M), & M \in \sigma, \\
\int_{\sigma} g(N) \frac{\partial F(M_C, N)}{\partial n_N} d\sigma_N = C - \varphi_0(M_C), & M_C \in \sigma_C,
\end{cases} (1.2)$$

где  $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ ; g(N) — плотность распределения потенциала двойного слоя

по границе сопряжения  $\sigma$  (точка  $N \in \sigma$ );  $M_C$  — точка середины фильтра скважины  $\sigma_C$ , в которой постоянной C задаётся усреднённое на фильтре значение искомого потенциала;  $\vec{n}_N$  — внешняя нормаль к поверхности  $\sigma$ , направленная в область  $D_1$ ; F(M,N) — фундаментальное решение уравнения Лапласа, которое учитывает наличие поверхности  $\sigma_\Pi$  и имеет вид:

$$F(M,N) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R_{MN}} \pm \frac{1}{\widetilde{R}_{MN}} \right) - \frac{d}{4\pi r_M} \left( \frac{1}{R_{MN}^*} \pm \frac{1}{\widetilde{R}_{MN}^*} \right), \tag{1.3}$$
где
$$R_{MN} = \sqrt{\rho_{MN}^2 + (z_M - z_N)^2}, \quad \widetilde{R}_{MN} = \sqrt{\rho_{MN}^2 + (z_M + z_N)^2},$$

$$R_{MN}^* = \sqrt{\left(\rho_{MN}^*\right)^2 + \left(\frac{d^2}{r_M^2} z_M - z_N\right)^2}, \quad \widetilde{R}_{MN}^* = \sqrt{\left(\rho_{MN}^*\right)^2 + \left(\frac{d^2}{r_M^2} z_M + z_N\right)^2},$$

$$\rho_{MN} = \sqrt{\left(x_M - x_N\right)^2 + \left(y_M - y_N\right)^2}, \quad \rho_{MN}^* = \sqrt{\left(\frac{d^2}{r_M^2} x_M - x_N\right)^2 + \left(\frac{d^2}{r_M^2} y_M - y_N\right)^2}.$$

Для численного решения системы (1.2) перепишем её в параметрическом виде. Зададим поверхность  $\sigma$  параметрически:  $x_N = x_N(u_N, v_N)$ ,

 $y_N = y_N(u_N, v_N), \ z_N = z_N(u_N, v_N)$  (или  $\vec{r} = \vec{r}(u_N, v_N)$ ), где  $u_N, v_N$  — параметры,  $N \in \sigma$ . Представим выражение  $\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N$  в виде функции параметров  $u_N, v_N$ :

раметров 
$$u_{N}, v_{N}$$
.

$$\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_{N}} d\sigma_{N} = \nabla_{N} F(M,N) \cdot \vec{n}_{N} d\sigma_{N} = \left(\frac{\partial F(M,N)}{\partial x(u_{N},v_{N})} \vec{i} + \frac{\partial F(M,N)}{\partial y(u_{N},v_{N})} \vec{j} + \frac{\partial F(M,N)}{\partial y(u_{N},v_{N})} \vec{j} + \frac{\partial F(M,N)}{\partial z(u_{N},v_{N})} \vec{k}\right) \cdot \frac{\vec{r}'_{u} \times \vec{r}'_{v}}{|\vec{r}'_{u} \times \vec{r}'_{v}|} \sqrt{|\vec{r}'_{u} \times \vec{r}'_{v}|^{2}} du_{N} dv_{N} = \Omega(u_{M},v_{M},u_{N},v_{N}) du_{N} dv_{N},$$

ГДе 
$$\vec{r}'_{u} = \frac{\partial \vec{r}(u_{N},v_{N})}{\partial u_{N}}, \quad \vec{r}'_{v} = \frac{\partial \vec{r}(u_{N},v_{N})}{\partial v_{N}}.$$
(1.4)

С учётом обозначений (1.4), система (1.2) принимает вид:

$$\begin{cases}
\frac{g(u_M, v_M)}{2} - \lambda \int_{u_N} \int_{v_N} g(u_N, v_N) \Omega(u_M, v_M, u_N, v_N) du_N dv_N = \\
= \lambda \varphi_0(u_M, v_M), \quad M(u_M, v_M) \in \sigma; \\
\int_{u_N} \int_{v_N} g(u_N, v_N) \Omega(M_C, u_N, v_N) du_N dv_N = C - \varphi_0(M_C), \quad M_C \in \sigma_C.
\end{cases} (1.5)$$

Согласно [3], численное решение системы интегрального уравнения и интегрального соотношения, записанных в параметрическом виде (1.5), заключается в замене непрерывной на поверхности  $\sigma$  плотности g(N) совокупностью её значений в дискретных точках этой поверхности и переходу от интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений. В работе [1] показано, как проводится разбиение границы в случае гладкой замкнутой поверхности  $\sigma$  (в частности, задача решена, когда в качестве границы  $\sigma$  выбирался трёхосный эллипсоид). Покажем особенности численного решения системы (1.5) в случае кусочно-гладких поверхностей  $\sigma$ .

Кусочно-гладкую замкнутую поверхность  $\sigma$  необходимо параметризовать таким образом, чтобы линии «сшивки» гладких поверхностей являлись бы координатными линиями  $u_N={\rm const}$  и  $v_N={\rm const}$ . Разобьём поверхность  $\sigma$  равномерно по параметрам  $u_N, v_N$  на  $n_1 \cdot n_2$  точек, где  $n_1$  число координатных линий  $u_N={\rm const}$  с шагом  $h_1$ ,  $h_2$  число линий  $v_N={\rm const}$  с шагом  $h_2$ . Получим множество точек  $E_N\left\{u_{N,i},v_{N,j};i=1,2,...,n_1;j=1,2,...,n_2\right\}$ . Во множество  $E_N$  войдут точки, расположенные на линиях пересечения гладких поверхностей, составляющих поверхность  $\sigma$ . Так как вычисление производных (1.4) в этих точках невозможно, то для расчётов необходимо сместиться в точки, отстоящие от угловых на шаг (или на часть шага) по параметру. Второе множество  $E_M$  точек разбиения поверхности  $\sigma$  выберем так, чтобы  $u_{M,i}=u_{N,i}+h_1/2$  и  $v_{M,i}=v_{N,j}+h_2/2$ ,  $(i=1,2,...,n_1,\ j=1,2,...,n_2)$ . Далее, заменив по квадратур-

ным формулам интегралы в системе (5) суммами и, положив  $du_N \approx h_1$ ,  $dv_N \approx h_2$ , получим систему  $n_1 n_2 + 1$  алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}
\frac{g(u_{m},v_{k})}{2} - \lambda \sum_{i=1}^{n_{1}} \sum_{j=1}^{n_{2}} g(u_{i},v_{j}) \Omega(u_{m},v_{k},u_{i},v_{j}) h_{1} h_{2} = \lambda \varphi_{0}(u_{m},v_{k}), \\
m = 1,...n_{1}; k=1,...,n_{2}; \\
\sum_{i=1}^{n_{1}} \sum_{j=1}^{n_{2}} g(u_{i},v_{k}) \Omega(M_{C},u_{i},v_{j}) h_{1} h_{2} = C - \varphi_{0}(M_{C}), M_{C} \in \sigma_{C}.
\end{cases} (1.6)$$

Решая систему (1.6), находим неизвестные  $g(u_i, v_j)$   $(i=1,...,n_1,\ j=1,...,n_2)$ , и искомый дебит q.

Согласно [1], скорость фильтрации в области питания можно вычислить по формуле:

$$\vec{V}(M) = \nabla_M \varphi_0(M) + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} g(u_i, v_j) \nabla_M \Omega(M, u_i, v_j) h_1 h_2, M \in D \setminus \sigma. \quad (1.7)$$

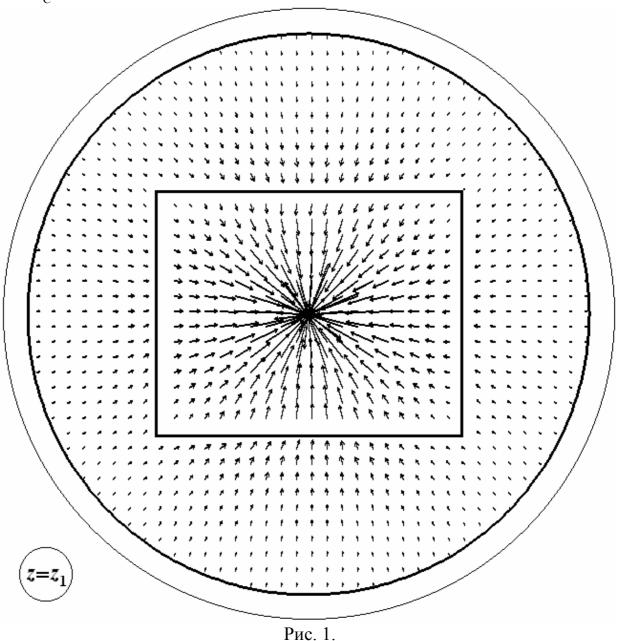
**2.** В качестве примера указанного выше численного метода решения задачи о дебите несовершенной скважины в кусочно-однородной среде с полусферической границей области питания  $\sigma_{\Pi}$  и кусочно-гладкой поверхностью сопряжения  $\sigma$  приведём результаты расчётов в случае, когда граница  $\sigma$  является прямоугольным параллелепипедом с рёбрами 2a, 2b, 2c. Пусть центр параллелепипеда находится в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Параметрическое задание поверхности  $\sigma$  имеет вид:

I. 
$$x_{N} = x_{0} - a$$
,  $y_{N} = y_{0} - b + u_{N}$ ,  $z_{N} = z_{0} - c - v_{N}$ ,  $u_{N} \in [0, 2b]$ ,  $v_{N} \in [-2c, 0]$ ;  
II.  $x_{N} = x_{0} - a + v_{N}$ ,  $y_{N} = y_{0} - b + u_{N}$ ,  $z_{N} = z_{0} - c$ ,  $u_{N} \in [0, 2b]$ ,  $v_{N} \in [0, 2a]$ ;  
III.  $x_{N} = x_{0} + a$ ,  $y_{N} = y_{0} - b + u_{N}$ ,  $z_{N} = z_{0} - 2a - c$ ,  $u_{N} \in [0, 2b]$ ,  $v_{N} \in [2a, 2(a + c)]$ ;  
IV.  $x_{N} = x_{0} - a + v_{N}$ ,  $y_{N} = y_{0} + b$ ,  $z_{N} = z_{0} - 2b - c + u_{N}$ ,  $u_{N} \in [0, 2(b + c)]$ ,  $v_{N} \in [0, 2a]$ ;  
V.  $x_{N} = x_{0} - a + v_{N}$ ,  $y_{N} = y_{0} + 3b + 2c - u_{N}$ ,  $z_{N} = z_{0} + c$ ,  $u_{N} \in [2(b + c), 2(2b + c)]$ ,  $v_{N} \in [0, 2a]$ ;  
VI.  $x_{N} = x_{0} - a + v_{N}$ ,  $y_{N} = y_{0} - b$ ,  $z_{N} = z_{0} + 3c + 4b - u_{N}$ ,  $u_{N} \in [2(2b + c), 4(b + c)]$ ,  $v_{N} \in [0, 2a]$ ,

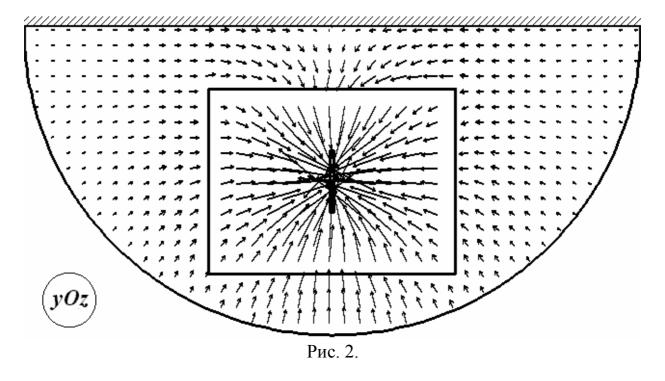
где грани I и III параллельны плоскости yOz; грани II и V — плоскости xOy; IV и VI — плоскости xOz.

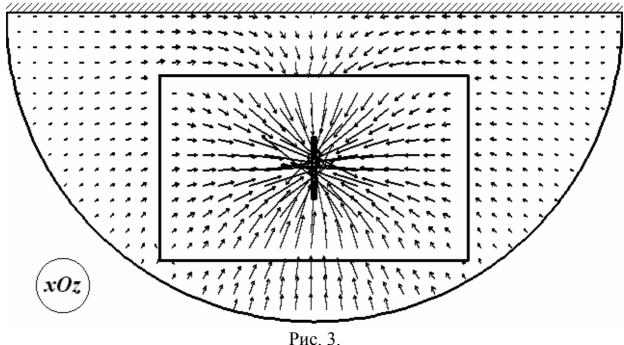
На рис. 1 — рис. 3 представлены поля скоростей течений в плоскостях  $z=z_1,\ x=x_0$  и  $y=y_0,$  рассчитанные по формулам (1.7), когда сингулярная

поверхность  $\sigma_0$  является непроницаемой. При построении рис. 1 — рис. 3 были использованы следующие параметры: коэффициент  $\lambda=0.5$ ; радиус полусферы d=1; половины рёбер параллелепипеда a=0.5d, b=0.4d, c=0.3d; координаты центра параллелепипеда  $x_0=y_0=0$ ,  $z_0=0.5d$ ; углы наклона фильтра к осям координат  $\alpha=90^{\rm o}$ ,  $\beta=90^{\rm o}$ ,  $\gamma=0^{\rm o}$ ; координаты концов фильтра  $x_1=y_1=0$ ,  $z_1=0.4d$ ,  $x_2=y_2=0$ ,  $z_2=0.6d$ ; радиус скважины  $R_C=10^{-3}d$ .



(Сечение поверхности  $\sigma$  плоскостью  $z=z_1$  показано жирной линией, а сечение плоскостью xOy — тонкой).





Исследуем зависимость дебита скважины q от параметра  $\lambda$ , характеризующего величину скачка проницаемостей сред на границе  $\sigma$ . Для этого построим график зависимости величины  $\eta=q/q_0-1$  от  $\lambda$ , где  $q=q(\lambda)-1$  дебит скважины при произвольном значении  $\lambda$ ,  $q_0$  — дебит скважины в однородной среде, то есть при  $\lambda=0$  ( $k_1=k_2$ ). График функции  $\eta(\lambda)$  представлен на рис. 4 сплошной линией для параллелепипеда, пунктирной — для трёхосного эллипсоида (результаты работы [1]) с полуосями a, b, c. Из рис. 4 видно, что с увеличением коэффициента  $\lambda$  дебит скважины q монотонно возрастает и достигает максимального значения при  $\lambda=1$  (то есть при  $k_1=\infty$ , когда граница  $\sigma$  становится поверхностью питания). Причём, для

 $\lambda > 0$  изменение дебита незначительно (менее 0.5%), поэтому в этом случае среду в области фильтрации можно считать однородной, что значительно упрощает расчёт дебита скважины.

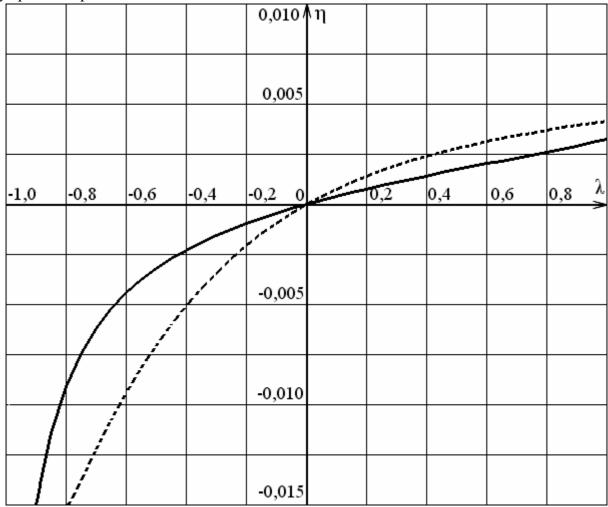


Рис. 4.

В силу того, что среднее расстояние от центра скважины до параллеление до всегда больше, чем расстояние от фильтра до эллипсоида  $\sigma$ , вписанного в параллелениед, то при  $\lambda < 0$  ( $k_1 < k_2$ ) получим  $q_{\text{пар.}} > q_{\text{элл.}}$ , а при  $\lambda > 0$  ( $k_1 > k_2$ ) —  $q_{\text{пар.}} < q_{\text{элл.}}$ . Здесь  $q_{\text{пар.}}$  — дебит скважины в слое, когда границей сопряжения является параллелениед,  $q_{\text{элл.}}$  — дебит скважины с эллипсоидальной поверхностью сопряжения  $\sigma$ . Но отличие  $q_{\text{пар.}}$  от  $q_{\text{элл.}}$  при любом значении  $\lambda$  составляет менее 0.5%, что позволяет заменять в расчётах сложные кусочно-гладкие поверхности сопряжения более простыми гладкими поверхностями при сохранении характерных расстояний от фильтра скважины до этих границ.

# Литература

1. Аксюхин А.А. Решение трехмерной задачи о дебите скважины в кусочнооднородной среде методом дискретных особенностей // Труды IX международ. симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орёл. Орловский госуниверситет. 2000. С. 19-27.

- 2. Аксюхин А.А. Определение дебита наклонных скважин методом дискретных особенностей // Труды X международ. симпозиума «МДОЗМФ-2001». Украина. Херсон. 2001. С. 11-17.
- 3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

#### УДК 532.546

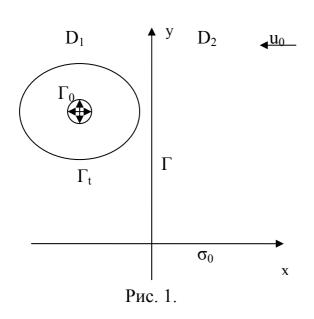
### ПРОДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА "РАЗНОЦВЕТНЫХ" ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ

И.В. Буравлев

Орловский государственный университет

Ставится задача о продвижении границы раздела "разноцветных" жидкостей в кусочно-неоднородном слое. Исследуется влияние неоднородности на время продвижения этой границы.

Рассмотрим задачу о продвижении границы раздела "разноцветных" жидкостей (обладающих одинаковыми физическими и механическими свойствами)  $\Gamma_t$  в поступательном потоке в кусочно-неоднородной среде. Область течения представляет собой объединение областей  $D_1$  и  $D_2$  обладающих проводимостями  $P_v(M) = k_v P(M)$ , здесь P(M) = K(M)H(M), где



K(M) - проницаемость слоя, а H(M) - его толщина,  $\nu=1,2$ . Эти области разделены границей  $\Gamma$ , которая в рассматриваемых случаях совпадает с прямой x=0. В области течения может присутствовать сингулярная линия  $\sigma_0$ , на которой проводимость слоя равна нулю или бесконечности. Также в области течения присутствует поток скоростью  $\vec{u}_0$ . В области  $D_1$  располагается совершенная скважина радиусом  $R_c$  и дебитом q, через которую закачива-

ется загрязненная жидкость. Нужно найти положение границы  $\Gamma_t$  в любой момент времени, или, иначе говоря, проследить распространение загрязнения в среде.

Движение жидкости в пористой среде описывается законом Дарси и уравнением неразрывности, записанными в безразмерном виде [1,2]:

$$\vec{\mathbf{v}}(M) = \frac{k(M)}{\mu} \nabla_M \varphi(M), \quad (\varphi(M) = -p(M) - z), \tag{1}$$

$$\nabla_M \vec{\mathbf{v}}(M, t) = 0. \tag{2}$$

Необходимо также учитывать связь между физической скоростью  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  и скоростью фильтрации  $\vec{\mathbf{v}}$  :

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3}.$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что квазипотенциалы  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$  течений в областях  $D_1$  и  $D_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ P(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ P(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial y} \right] = 0, M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2.$$
 (4)

Для решения задачи необходимо сформулировать граничные и начальные условия. На границе Г выполняются условия сопряжения, выражающие непрерывность давления и расхода жидкости:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M), k_1 \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+ = k_2 \left(\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^-, M \in \Gamma.$$
 (5)

На сингулярной линии выполняется условие

$$P(M)\frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial n_{M}} = 0$$
 или  $\varphi_{\nu}(M) = \text{const}, \nu = 1, 2, M \in \sigma_{0}$ . (6)

В бесконечно удаленной точке необходимо потребовать выполнение условий [3]:

$$\phi(M) \to u_0 x, \vec{\mathbf{v}}(M) \to \vec{u}_0$$
, при  $r_{MN} \to \infty, N \in \Gamma$ . (7)

В начальный момент времени t=0 положение границы  $\Gamma_t$  известно:

$$x = x(\theta, 0) = x_0(\theta), y = y(\theta, 0) = y_0(\theta),$$
 где  $\theta$  - параметр. (8)

Для того чтобы найти положение  $\Gamma_t$  в любой момент времени, необходимо решить вытекающие из (1) и (3) уравнения движения этой границы:

$$\frac{dx_{M}}{dt} = K(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial x}, 
\frac{dy_{M}}{dt} = K(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial y}, \qquad \nu = 1, 2, M \in \Gamma_{t}$$
(9)

при начальных условиях (8).

Было исследовано влияние степени неоднородности слоя на основные характеристики течения. На рисунках 2, 3 показана зависимость времени загрязнения от параметра  $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ , характеризующего степень неоднородности сред в областях  $D_1$  и  $D_2$  при разных значениях скорости поступательного потока  $u_0$ . Рисунок 2 соответствует плоскопараллельному случаю

 $(P_1(M) = P_2(M) = 1)$  с линией сброса y = 0 (потенциалы в этом случае имеют вид

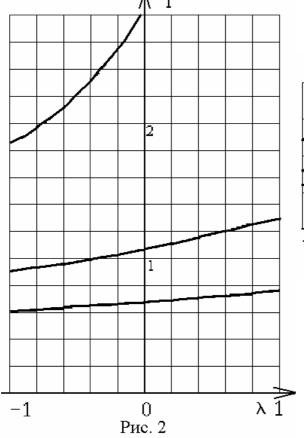
$$\begin{split} \phi_1 &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} + \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2} - u_0 x, \\ \phi_2 &= \frac{1-\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{1-\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} - u_0 x) \end{split}$$

, а рисунок 3 - случаю слоев со степенным законом изменения проводимости (  $P_1(M)=k_1y^2$  ,  $P_2(M)=k_2y^2$  , потенциалы в этом случае имеют вид

$$k_{1}\varphi_{1} = \frac{1}{4\pi y_{0}y} \ln \frac{4y_{0}y + (x - x_{0})^{2} + (y - y_{0})^{2}}{(x - x_{0})^{2} + (y - y_{0})^{2}} + \frac{\lambda}{4\pi y_{0}y} \ln \frac{4y_{0}y + (x + x_{0})^{2} + (y - y_{0})^{2}}{(x + x_{0})^{2} + (y - y_{0})^{2}} - u_{0}x,$$

$$k_{2}\varphi_{2} = \frac{1 - \lambda}{4\pi y_{0}y} \ln \frac{4y_{0}y + (x - x_{0})^{2} + (y - y_{0})^{2}}{(x - x_{0})^{2} + (y - y_{0})^{2}} - u_{0}x.$$

Видно, что время загрязнения будет возрастать при увеличении  $\lambda$ .



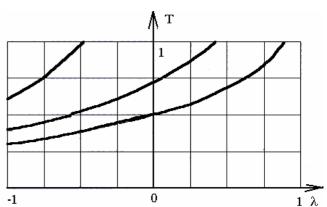


Рис. 3.

#### Литература

- 1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк. 1972. 368 с.
- 2. Пивень В. Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орёл. Издательство Орловского пединститута. 1994. 147 с.
- 3. Пивень В. Ф. Математическое моделирование течений жидкости в неоднородных слоях. // Юбилейный научный сборник в честь семидесятилетия ОГУ. Орёл. 2001. С. 89-98.

#### УДК 532.546

# УЧЕТ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПО НЕЛИНЕЙНОМУ ЗАКОНУ

Г.В. Голубев

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия, Казань, ул. К.Маркса, 10, e-mail: root@kaiadm.kazan.su

Рассмотрена задача об определении поля давлений в неоднородном трещиноватом пласте при движении в нем жидкости по нелинейному закону. Получено исходное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Работа эксплуатационных и нагнетательных скважин моделируется дискретными особенностями логарифмического типа с известными дебитами. Сформулирована исследуемая задача и предложен метод ее решения. Он основан на представлении рассматриваемого уравнения в комплексной форме записи, сведении его к эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению и решению последнего последовательными приближениями. Разобран общий алгоритм и рассмотрены примеры.

Процесс фильтрации жидкости в пористой среде описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных с дивергентной главной частью

$$\left[k\chi(\beta_1, p, x, y)p_x\right]_x + \left[k\chi(\beta_1, p, x, y)p_y\right]_y = ap_t + f.$$
 (1)

где использованы обозначения: k - коэффициент проницаемости; p(x,y,t) — функция давления;  $\chi$  - функция, вид которой определяется выбором модели фильтрационного течения;  $\beta_1$  — «пороговое» значение градиента давления, при достижении которого начинается процесс фильтрации или происходит резкое возрастание скорости фильтрации (для разных моделей); остальные обозначения общеприняты. Нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Уравнение (1) должно быть дополнено законом фильтрации, а также по мере необходимости некоторым набором допущений и конкретизаций.

В работе это сделано для следующих моделей:

1. Фильтрация в пласте подчиняется нелинейному параметрическому закону.

$$\overline{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \frac{|\nabla \mathbf{p}| - \lambda_1 \beta \mu_0}{\lambda_2 \beta + \sqrt{\lambda_3 \beta^2 + |\nabla \mathbf{p}|^2}} \nabla \mathbf{p}, \ \beta = \sqrt[\alpha]{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

где  $\bar{v}$  - скорость фильтрации;  $\mu$  - вязкость жидкости;  $\alpha$  - постоянная;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_0$  - параметры, при некоторых значениях которых получается из (2) в качестве частных случаев ряд известных законов фильтрации.

1.1. Закон с предельным градиентом давления:

$$\lambda_1 = \mu_0 = 1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

1.2. Гиперболический закон:

$$\lambda_1 = 0$$
,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

1.3. Нелинейный закон фильтрации с параметрами

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 0.$$

1.4. Полигональный закон:

 $\lambda_1 = 1, \; \mu_0 = 1 - \mu/\nu, \; \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \; \text{где } \nu$  - повышенная вязкость жидкости при малых градиентах давления.

1.5. Линейный закон фильтрации:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

2. Фильтрация в трещиноватой пористой среде по нелинейному двучленному закону Форхгеймера, причем первая форма его записи имеет вид

$$\nabla p = -\mu \frac{v_1}{k_1} - \beta \mu \frac{v_1 v_1}{k_1}, \tag{3}$$

а вторая форма

$$\nabla p = -\mu \frac{\overline{v_1}}{k_1} - \beta \rho \frac{\overline{v_1 v_1}}{\sqrt{k_1}}.$$
 (4)

Здесь использованы следующие обозначения:  $v_1$  - скорость фильтрации,  $k_1$  – проницаемость трещин,  $\beta$  - некоторая постоянная (различная в (3) и (4)),  $\rho$  - плотность жидкости.

3. Фильтрация в трещиновато-пористой среде, когда движение по трещинам описывается законом Форхгеймера в форме (3) или (4), а скорость фильтрации  $\stackrel{-}{\rm v}_2$  в пористых блоках определяется законом Дарси

$$\overline{\mathbf{v}}_2 = -\frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla \mathbf{p},\tag{5}$$

где  $k_2$  – проницаемость пористых блоков.

4. Фильтрация подчиняется линейному закону Дарси, но коэффициент проницаемости зависит не только от координат, а также от давления k = k(x,y,p) или от градиента давления k = k(x,y,p) ).

Во всех указанных случаях получено соответствующее каждому из них основное уравнение фильтрации. Рассматриваемое как уравнение для определения функции давления, оно принадлежит каждый раз к эллиптическому типу. Хотя выражения коэффициентов при этом различные и достаточно сложные, тип уравнения один и тот же. Покажем, как получается такое уравнение, например, в случае 3 (фильтрация в трещиноватой пористой среде по закону Форхнеймера в форме (3)). Прежде всего закон Форхгеймера обращается, т.е. разрешается по отношению к скорости фильтрации

где  $B_1 = \left( \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} - 1 \right) / 2\beta |\nabla p|, \ c = k_1/\mu$  - коэффициент текучести.

К закону (6) добавляется соотношение, которое получается из уравнения неразрывности потока и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления. Оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h v_{1x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h v_{1y} \right) + f(x, y, t) + \beta^* h \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

где h — толщина пласта, f — функция плотности отбора (или закачки),  $\beta^*$  - упругоемкость пласта, t — время.

Величины  $v_{1x}$  и  $v_{1y}$  находятся из (6):

$$\begin{split} v_{1x} &= - \left( \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} - 1 \right) \frac{\partial p}{\partial x} / 2\beta |\nabla p|, \\ v_{1y} &= - \left( \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} - 1 \right) \frac{\partial p}{\partial y} / 2\beta |\nabla p|. \end{split}$$

Толщину пласта считаем постоянной и даже для упрощения выкладок положим h=1. Подставляя производные  $\partial v_{1x}/\partial x$  и  $\partial v_{1y}/\partial y$  в соотношение (7), получаем основное уравнение фильтрации для закона Форхгеймера (6)

$$\frac{\partial^{2} p}{\partial x^{2}} \left[ \left( 1 + 4\beta |\nabla p| c - \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^{2} + 2\beta c |\nabla p| \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{2} \right] + \\
+ \frac{\partial^{2} p}{\partial y^{2}} \left[ \left( 1 + 4\beta |\nabla p| c - \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{2} + 2\beta c |\nabla p| \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^{2} \right] + \\
+ 2 \frac{\partial^{2} p}{\partial x \partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \left[ -1 - 2\beta |\nabla p| c + \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} \right] + 2\beta \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \right) |\nabla p|^{3} = \\
= 2\beta \left[ f + \beta^{*} \frac{\partial p}{\partial t} \right) |\nabla p|^{3} \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c}. \tag{8}$$

Если рассматривать (8) как уравнение для определения функции давления р и ввести обозначения

$$\begin{split} a_{11} &= \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + 2\beta |\nabla p| c \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + 2\beta c |\nabla p|^3 - \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2, \\ a_{22} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + 2\beta |\nabla p| c \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + 2\beta c |\nabla p|^3 - \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2, \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \left(-1 - 2\beta |\nabla p| c + \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c}\right), \\ H &= 2\beta \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y}\right) |\nabla p|^3 - 2\beta f |\nabla p|^3 \sqrt{1 + 4\beta |\nabla c| c}, \end{split}$$

то оно запишется в виде

$$a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + H\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0.$$
 (9)

При этом жидкость примем несжимаемой и тогда член  $\beta^* \partial p / \partial t$  в уравнении (8) обращается в нуль.

Исследование знака дискриминанта  $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  показывает, что d < 0, следовательно уравнение (9) принадлежит к эллиптическому типу. С помощью преобразования переменных оно может быть записано, как известно, в каноническом виде

$$\Delta p + H\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0,$$
 (10)

где вместо новых переменных  $x_1$ ,  $y_1$  опять пишем для удобства x, y. Теперь можно сформулировать задачу, подлежащую решению (определение фундаментального решения).

В области D с границей ∂D найти решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям:

- 1)  $p = p_{\kappa}(\theta)$  при r = 1, где  $p_{\kappa}(\theta)$  заданное распределение давления на контуре питания (краевое условие);
- 2) в точке  $A_i(x_i, y_i)$  функция р имеет логарифмическую особенность заданного дебита  $Q_i$  и справедливо равенство

$$\lim_{\gamma_i \to 0} \oint B_1 \frac{\partial p}{\partial n} ds = Q_i,$$

где  $\gamma_i$  — произвольный контур, охватывающий скважину; n — внутренняя нормаль к нему;  $B_1$  — ранее записанное выражение из формулы (6).

В уравнении (10) сделаем замену переменных  $x = (z + \overline{z})/2$ ,  $y = (z - \overline{z})/2i$ , где z = x + iy,  $\overline{z} = x - iy$ , i - мнимая единица.

В новых переменных уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z} \partial \overline{\mathbf{z}}} + 0.25 \mathbf{H} \left( \mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}, \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \overline{\mathbf{z}}} \right) = 0. \tag{11}$$

От уравнения (11) двукратным интегрированием переходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$p(z, \overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}) - 0.25 \int_{z_i}^{z} \int_{z_i}^{\overline{z}} H\left(\zeta, \overline{\zeta}, p, \frac{\partial p}{\partial \zeta}, \frac{\partial p}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta},$$
(12)

где  $\phi$  и  $\psi$  - произвольные аналитические функции своих аргументов,  $z_i = x_i + i y_i$ .

Для решения уравнения (12) воспользуемся методом последовательных приближений:

$$p_o(z, \overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}),$$

$$\begin{split} p_{1}\left(z,\overline{z}\right) &= \phi(z) + \psi(\overline{z}) - 0.25 \int_{z_{1}}^{z} \int_{\overline{z}_{1}}^{\overline{z}} H\left(\zeta,\overline{\zeta},p_{o},\frac{\partial p_{o}}{\partial \zeta},\frac{\partial p_{o}}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta}, \\ p_{2}\left(z,\overline{z}\right) &= \phi(z) + \psi(\overline{z}) - 0.25 \int_{z}^{z} \int_{\overline{z}}^{\overline{z}} H\left(\zeta,\overline{\zeta},p_{1},\frac{\partial p_{1}}{\partial \zeta},\frac{\partial p_{1}}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta}, \end{split}$$

$$p_{n}(z, \overline{z}) = \phi(z) + \psi(\overline{z}) - 0.25 \int_{\overline{z}_{i}}^{z} \int_{\overline{z}_{i}}^{z} H\left(\zeta, \overline{\zeta}, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta}.$$

Поскольку исходное уравнение (10) действительное, то  $\phi$ ,  $\psi$  будут попарно сопряженными и функция  $p_n$  запишется

$$p_{n}(x,y) = Re \left[ \phi(z) - 0.25 \int_{z_{i}}^{z} \int_{z_{i}}^{\overline{z}} H\left(\zeta, \overline{\zeta}, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta} \right]. \quad (13)$$

Функция p<sub>n</sub> должна удовлетворять краевому условию

$$|p_{n}|_{r=1} = \operatorname{Re}\left[\phi(z) - 0.25 \int_{z_{i}}^{z} \int_{z_{i}}^{\overline{z}} H\left(\zeta, \overline{\zeta}, p_{n-1}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \zeta}, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta}\right]_{r=1} = p_{\kappa}(\theta). \tag{14}$$

Правую часть этого равенства  $p_{\kappa}(\theta)$  разложим в равномерно сходящийся ряд Фурье. Произвольную аналитическую функцию будем искать в виде

$$\varphi(z) = \Pi_i \ln(z - z_i) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$
(15)

где  $c_n$  — неизвестные комплексные коэффициенты, а  $\Pi_i$  — действительная постоянная, которая определяется через заданный дебит  $Q_i$  из соответствующего условия в процессе итераций.

После подстановки  $\phi(z)$  в краевое условие (14) и проведения соответствующих преобразований, из него получается алгебраическая система уравнений для нахождения коэффициентов  $c_n$ . Ограничиваясь М первыми коэффициентами, ее можно решить на ПЭВМ с использованием одной из стандартных подпрограмм из пакетов Mathcad, Matematika и т.д. Найденные численно коэффициенты подставляются в формулу (13), которая и будет представлять собой в итоге решение задачи.

При расчете примеров по этому алгоритму важную роль играют точные решения задачи. Если  $k_1 = k_{10} \ (1 + \alpha r), \ k_{10}, \ \alpha = \text{const}$  (линейное изменение коэффициента проницаемости), то давление р равно

$$p = \pm \frac{Q^2 \beta \mu}{4\pi^2 h^2 k_{10}} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_k} + \alpha \ln \frac{(1 + \alpha r)r_k}{r(1 + \alpha r_k)} \right] + \frac{Q\mu}{2\pi h k_{10}} \ln \frac{r(1 + \alpha r_k)}{(1 + \alpha r)r_k} + p_k. \quad (20)$$

Аналогично получается решение и при экспоненциальном законе изменения проницаемости. Именно они использовались для оценки погрешности приближенного решения, которая оказалась небольшой.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ОБТЕКАНИИ САМОЛЕТА ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В УСЛОВИЯХ ВЫДУВА СТРУЙ ДВИГАТЕЛЕЙ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ

В.В. Гуляев

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

Рассматривается математическая постановка линейной задачи обтекания схематизированного набором тонких несущих поверхностей самолета с работающей силовой установкой. Особенностью данной задачи является наличие истекающих струй, что делает поток негомоэнергетическим и проявляется в специфике граничных условий на поверхности струй.

Предметом исследования является обтекание схематизированного самолета с работающей силовой установкой, совершающего основное движение в безграничной, однородной, покоящейся на бесконечности среде с постоянной дозвуковой скоростью  $V_{\infty}$ , направленной вдоль оси ОХ связанной системы координат. Движение летательного аппарата (ЛА) сопровождается малым изменением кинематических параметров.

Будем считать, что сплошная среда, в которой происходит движение самолета, является идеальной. Течение, в свою очередь, является баротропным, а вне поверхностей ЛА, генерируемого им следа и поверхностей струй двигателей — потенциальным, т.е. возмущенная скорость может быть представлена в виде:  $\vec{V} = \operatorname{grad}\Phi$ , где  $\Phi$  - скалярная функция координат, называемая потенциалом возмущенных скоростей (возмущенным потенциалом). Внешние массовые силы отсутствуют.

Особенностью задачи об обтекании самолета с работающей силовой установкой является моделирование двигателей и течения в истекающей струе. В настоящей работе используется модель двигателя в виде активного сечения, которое является местом подвода энергии к потоку. Предполагается, что параметры и особенности течения в струях такие же, как и во внешнем потоке, единственным отличием потока в области струй является его энергосодержание, что выражается другим значением входящей в интеграл Бернулли [1] константы, изменение которой как раз и происходит в активном сечении (в активном сечении происходит прирост полного давления).

Кроме того, считается, что рассматриваемое дозвуковое обтекание ЛА является плавным, безотрывным, не сопровождается возникновением кризисных явлений. Места схода вихревых пелен известны, они фиксируются на задних кромках несущих поверхностей.

И, наконец, предполагается, что формы рассматриваемых ЛА и значения кинематических параметров движения таковы, что вносимые в воздушный поток возмущения малы. Предположение о малости возмущений позволяет линеаризовать задачу обтекания, пренебрегая в уравнении неразрывности и Бернулли слагаемыми порядка малости выше первого.

Сформулированные предположения о свойствах и характере движения среды, схеме обтекания ЛА и малости возмущений, позволяют получить уравнение, которому должен удовлетворять возмущенный потенциал Ф. Как известно [2], в условиях установившегося течения, путем преобразования Прандтля-Глауэрта уравнение для возмущенного потенциала сводится к уравнению Лапласа, которое в безразмерных параметрах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_{\rm M}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_{\rm M}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta_{\rm M}^2} = 0. \tag{1}$$

Здесь 
$$\phi = \Phi/V_{\infty}L$$
 ,  $\,\xi_M = \xi\,,\; \eta_M = k\eta\,,\; \zeta_M = k\zeta\,,\; k^2 = 1 - M_{\infty}^2\,.$ 

Возмущенный потенциал ф должен удовлетворять ряду граничных условий, которые с физической точки зрения обеспечивают выполнение ряда условий обтекания ЛА в рамках принятой схемы течения и сделанных допущений, а с математической — позволяют из множества решений уравнения (1) выделить единственное, отвечающее исследуемому процессу.

<u>Условие непротекания</u>. На поверхности схематизированного ЛА должно выполняться условие непротекания, физический смысл которого состоит в требовании равенства нулю нормальной составляющей относительной скорости течения в точках поверхности ЛА. С математической точки зрения условие непротекания есть условие Неймана, поскольку оно определяет нормальную производную возмущенного потенциала в точках поверхности ЛА как известную функцию координат.

Как известно (например, [2]), соответствующее условие имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi(\bar{r})}{\partial n} = -\sum_{j} \frac{\partial f_{j}(\bar{r})}{\partial \xi} \delta_{j} - n_{y}(\bar{r})\alpha + n_{z}(\bar{r})\beta + 
+ \left[ \eta n_{z}(\bar{r}) - \zeta n_{y}(\bar{r}) \right] \omega_{x} - \xi n_{z}(\bar{r})\omega_{y} + \xi n_{y}(\bar{r})\omega_{z}.$$
(2)

Здесь  $f_j(\xi,\eta,\zeta)$  - функции, определяющие формы деформаций,  $\delta_j$  - их масштабы,  $\alpha$ ,  $\beta$  - углы атаки и скольжения,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  - безразмерные скорости крена, рыскания и тангажа.

Из граничного условия (2) видно, что все кинематические параметры входят в него линейно, так что справедливо:

$$\begin{split} \frac{\partial \phi(\bar{r})}{\partial n} &= \sum_{i} H_{q_{i}}^{*}(\bar{r}) q_{i} \text{ , где} \\ H_{\alpha}^{*}(\bar{r}) &= -n_{y}(\bar{r}), \ H_{\beta}^{*}(\bar{r}) = n_{z}(\bar{r}), \ H_{\omega_{x}}^{*}(\bar{r}) = \eta n_{z}(\bar{r}) - \zeta n_{y}(\bar{r}), \\ H_{\omega_{y}}^{*}(\bar{r}) &= -\xi n_{z}(\bar{r}), \ H_{\omega_{z}}^{*}(\bar{r}) = \xi n_{y}(\bar{r}), \ H_{\delta_{j}}^{*}(\bar{r}) = -\frac{\partial f_{j}(\bar{r})}{\partial \xi}. \end{split}$$

Преобразование Прандтля-Глауэрта приводит граничное условие непротекания к виду:

$$\frac{\partial \varphi(\bar{r})}{\partial n_{M}} = \frac{1}{k} \sum_{i} H_{q_{i}}^{*}(\bar{r}) q_{i}.$$

Полагая, что 
$$H_{q_i}(\bar{r}) = H_{q_i}^*(\bar{r})/k$$
 , можно записать:  $\frac{\partial \phi(\bar{r})}{\partial n_M} = \sum_i H_{q_i}(\bar{r})q_i$  .

<u>Условие Чаплыгина-Жуковского</u>. Физическое содержание задачи определяет такой важный элемент ее постановки, как выбор схемы обтекания, что в конечном счете при ее математической формулировке сводится к заданию на поверхности ЛА совокупности линий, на которых выставляются дополнительные условия, позволяющие выделить из множества возможных решений уравнения (1) те, которые в наибольшей степени соответствуют изучаемому процессу обтекания. В качестве подобного условия используется условие Чаплыгина-Жуковского, в соответствии с которым требуется, чтобы решение задачи обтекания было ограниченным на острых задних кромках тонких несущих поверхностей.

<u>Условие на вихревой пелене</u>. Условие Чаплыгина-Жуковского может быть удовлетворено только в классе разрывных решений уравнения (1). Поэтому в математической постановке задачи необходимо постулировать наличие свободной поверхности  $\Sigma$ , которая располагается в потоке, и на которой некоторые параметры течения имеют разрыв. Физические законы сохранения массы и импульса, примененные к этой поверхности, позволяют сформулировать условия, которые должны на ней выполняться, а именно: в каждой точке поверхности  $\Sigma$  должно выполняться условие непрерывности нормальной составляющей относительной скорости потока:

$$V_{n \text{ oth}}^{+}(\bar{r}) = V_{n \text{ oth}}^{-}(\bar{r}). \tag{3}$$

Условие (3) показывает, что поверхность  $\Sigma$  представляет собой поверхность тангенциального разрыва скорости, т.е. является вихревой поверхностью.

Кроме того, на поверхности  $\Sigma$  должно выполняться условие непрерывности давления:

$$C_{\mathfrak{p}}^{+}(\bar{r}) = C_{\mathfrak{p}}^{-}(\bar{r}). \tag{4}$$

В условиях (3) и (4) индексами «+» и «-» отмечены значения параметров с разных сторон поверхности  $\Sigma$ .

Из интеграла Бернулли, линеаризуя уравнение изоэнтропы, найдем:

$$C_{p} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}.$$

Для перепада коэффициента давления на тонкой поверхности будем иметь:

$$\Delta C_p = C_p^+ - C_p^- = -2 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \xi}$$
, где  $\Delta \varphi = \varphi_- - \varphi_+$ . (5)

Таким образом, на основании соотношения (5), условие непрерывности давления на вихревой пелене (4) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \xi} = 0. \tag{6}$$

Условие (6) показывает, что величина разрыва возмущенного потенциала  $\Delta \varphi$  в некоторой точке вихревой пелены с координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$  равна величине  $\Delta \varphi^*$  в точке на линии схода пелены с координатами  $(\xi^*, \eta, \zeta)$ .

Таким образом, условие непрерывности давления на вихревой пелене (6) можно записать в виде:

$$\Delta \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \Delta \varphi^* (\xi^*, \eta, \zeta). \tag{7}$$

Итак, условие непрерывности нормальной составляющей относительной скорости потока (3) показывает, что свободная поверхность  $\Sigma$ , на которой терпят разрыв параметры возмущенного течения, есть ни что иное, как вихревая пелена, а условие непрерывности давления (4) будет выполнено с принятой точностью, если считать, что пелена располагается вниз по потоку вдоль скорости  $V_{\infty}$ , и при этом величина скачка возмущенного потенциала на ней связана с соответствующей величиной на кромках соотношением (7).

<u>Условие на поверхности струи</u>. Те же законы сохранения, которые определяют граничные условия на вихревой пелене, справедливы и в отношении поверхности струи. Именно: в каждой точке на поверхности струи  $\sum_{c}$  должно выполняться условие непрерывности нормальной составляющей относительной скорости потока (3), т.е. поверхность струи есть поверхность тангенциального разрыва скорости, или, иначе, вихревая поверхность. Кроме того, на поверхности струи должно выполняться условие непрерывности давления (4). Условие (4) дает возможность найти выражение, которому должен удовлетворять возмущенный потенциал на границе струи. Действительно, интеграл Бернулли может быть записан в виде:

$$P - V_{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = C,$$

где С – константа Бернулли. Поскольку константы Бернулли в струе и внешнем потоке различны, а функции Р с разных сторон поверхности струи должны быть одинаковы в силу граничного условия, то, записывая разность интегралов Бернулли для внешнего потока и струи, получим условие, которому должен удовлетворять скачок возмущенного потенциала на границе струи:

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \xi} = C. \tag{8}$$

Здесь С — некоторая константа, которая определяется разностью констант Бернулли во внешнем потоке и струе, или, иначе говоря, приращением полного давления в активном сечении. Таким образом, константа С в условии (8) является одним из параметров краевой задачи. Различные значения этой константы будут соответствовать различной интенсивности выдува. Естественно, если силовая установка ЛА включает в себя несколько двигателей, то

каждый из них будет моделироваться своим активным сечением и струе каждого из них будет соответствовать своя константа.

Использовать входящие в (8) константы при решении задачи не вполне удобно, поскольку они характеризуют интенсивность выдува струй весьма косвенно, хотя и однозначно. Практически удобней задавать другие параметры (расходы или скорости в активных сечениях), а константы С считать искомыми величинами, которые могут быть найдены из условий заданных расходов через активные сечения.

Вид условия (8) позволяет легко установить физический смысл рассматриваемых констант — они представляют собой интенсивность поперечного вихревого слоя на поверхности струи. Как следует из (8) соответствующая интенсивность постоянна по длине струи.

<u>Условие на бесконечности</u>. Чтобы выделить единственное решение уравнения (1) к уже сформулированным граничным условиям следует добавить условие, налагаемое на поведение возмущенного потенциала в бесконечно удаленной точке, поскольку рассматриваемая задача есть внешняя краевая задача. Исходя из физически очевидного условия затухания возмущений от ЛА и генерируемого им следа и струй вдали от поверхностей  $S_{\Sigma}$ ,  $\Sigma$  и  $\Sigma_{c}$  ясно, что искомое решение уравнения (1) должно удовлетворять условиям:

$$\phi(M) \to 0$$
, grad $\phi(M) \to 0$  при  $r(M, S_{\Sigma} \cup \Sigma) \to \infty$ , (9)

где г есть расстояние между точкой М и любой из точек поверхностей ЛА, вихревой пелены и струй.

Таким образом, линеаризованная задача обтекания схематизированного ЛА с работающей силовой установкой установившимся дозвуковым потоком сжимаемого газа сводится к краевой для уравнения Лапласа (1) относительно возмущенного потенциала ф с граничными условиями: непротекания на поверхности ЛА (2), Чаплыгина-Жуковского на линии схода пелены, непрерывности давления на вихревой пелене (7), непрерывности давления на поверхностях струй (8), затухания возмущений на бесконечности (9).

Из линейности уравнения (1) и линейности всех других условий задачи следует, что искомый возмущенный потенциал может быть представлен в виде:

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_{i} \varphi_{q_i}(\bar{r}),$$

где каждый из потенциалов  $\phi_{q_i}(\bar{r})$  в свою очередь может быть представлен как  $\phi_{q_i} = \phi^{q_i} q_i$ . Таким образом от задачи нахождения возмущенного потенциала можно перейти к совокупности задач по определению производных потенциала по кинематическим параметрам. Каждая из таких производных удовлетворяет уравнению (1), условию на поверхности ЛА:  $\partial \phi^{q_i}(\bar{r})/\partial n_M = H_{q_i}(\bar{r})$ , условиям Чаплыгина-Жуковского на задних кромках, на вихревой пелене, на струе, на бесконечности, и может быть найдена неза-

висимо от других. Это утверждение является математическим доказательством принципа суперпозиции.

#### Литература

- 1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 535 с.
- 2. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ САМОЛЕТА СО СТРУЯМИ

В.В. Гуляев

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

Приводятся интегральные уравнения, к совокупности которых может быть сведена линейная краевая задача об обтекании самолета дозвуковым потоком сжимаемого газа в условиях выдува струй двигателей. Общая задача при этом разделяется на две, первая из которых соответствует обтеканию ЛА без учета влияния струй, а вторая позволяет находить приращения решений, обусловленные влиянием интерференции струй с несущими поверхностями.

Поставленная в работе [1] краевая задача об обтекании самолета при наличии выдува струй может быть сведена к совокупности интегральных уравнений. Исходя из вида фундаментального решения уравнения Лапласа

$$\delta(\bar{r}_0, \overline{\rho})=1/r$$
,  $r=|\bar{r}_0-\overline{\rho}|$ 

и соответствующей формулы Грина, будем строить решение краевой задачи, разместив на преобразованных в соответствии с правилом Прандтля-Глауэрта поверхностях ЛА, вихревой пелены и струй ( $S_M$ ,  $\Sigma_M$  и  $\Sigma_{c\,M}$ ) двойной слой интенсивности  $g(\overline{\rho})$ , так как искомая функция  $\phi(\overline{r}_0)$  должна иметь непрерывную нормальную производную при переходе через тонкие, достаточно гладкие поверхности  $S_M$ ,  $\Sigma_M$  и  $\Sigma_{c\,M}$  в точках непрерывности нормали  $\overline{n}(\overline{\rho})$ .

Представляя искомое решение  $\phi(\bar{r}_0)$  в виде потенциала двойного слоя интенсивности  $g(\overline{\rho})$ , подставляя его в граничное условие непротекания, получим интегральное уравнение относительно функции  $g(\overline{\rho})$ ,  $\overline{\rho} \in S_M$ :

$$\begin{split} \int_{S_{M}} g(\overline{\rho}) \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n_{\rho}} \left( \frac{1}{|\overline{r}_{0} - \overline{\rho}|} \right) dS_{\rho} + \int_{\Sigma_{M}} g_{\Sigma}(\overline{\rho}_{\Sigma}) \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n_{\rho_{\Sigma}}} \left( \frac{1}{|\overline{r}_{0} - \overline{\rho}_{\Sigma}|} \right) d\Sigma_{\rho} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{c,M}} g_{c\Sigma}(\overline{\rho}_{c\Sigma}) \frac{\partial}{\partial n_{\rho_{c,\Sigma}}} \left( \frac{1}{|\overline{r}_{0} - \overline{\rho}_{c\Sigma}|} \right) d\Sigma_{\rho} = 4\pi H(\overline{r}_{0}). \end{split} \tag{1}$$

Здесь  $\bar{r}_0 \in S_M$ ,  $g_{\Sigma}(\bar{\rho}_{\Sigma})$ ,  $\bar{\rho}_{\Sigma} \in \Sigma_M$  - интенсивность двойного слоя на пелене, которая в соответствии с граничным условием на пелене не является искомой величиной, а определяется функцией  $g(\bar{\rho})$  на линии схода вихревой пелены,  $\xi_M(\bar{r}_0) = \xi_{M0}$  - координата  $\xi_M$  точки на поверхности  $S_M$  с радиус-вектором  $\bar{r}_0$ ;  $g_{c\Sigma}(\bar{\rho}_{c\Sigma})$ ,  $\bar{\rho}_{c\Sigma} \in \Sigma_{cM}$  - интенсивность двойного слоя на поверхности струи, которая в соответствии с граничным условием может быть выражена через константу, определяющую интенсивность выдува.

С целью сокращения записи и удобства анализа будем обозначать  $|\bar{r}_0-\bar{\rho}|, |\bar{r}_0-\bar{\rho}_\Sigma|$  и  $|\bar{r}_0-\bar{\rho}_{c\Sigma}|$  через r, а  $(\bar{r}_0-\bar{\rho}), (\bar{r}_0-\bar{\rho}_\Sigma)$  и  $(\bar{r}_0-\bar{\rho}_{c\Sigma})$  через  $\bar{r}$ , и, кроме того, при записи интегральных уравнений будем опускать аргументы функций и индексы величин в случаях, когда это не препятствует пониманию сути записанных соотношений. Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\int_{S} g \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS + \int_{\Sigma} g \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\Sigma + \int_{\Sigma_{c}} g \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\Sigma = 4\pi H(\bar{r}_{0}). \tag{2}$$

Запишем, используя условия на поверхностях пелены и струй, а также соотношение  $g=\Delta \phi$ , входящие в (2) интегралы по поверхностям  $\Sigma_{\rm M}$  и  $\Sigma_{\rm cM}$  в следующем виде:

$$\int_{\Sigma} g \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\Sigma = \int_{L^*} g^* \left( \xi_M^* \right) dl \int_{\xi_M^*(1)}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi_M. \tag{3}$$

$$\int_{\Sigma_{c_k}} g \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\Sigma = C_k \int_{L_{c_k}^*} dl \int_{\xi_M^*(l)}^{-\infty} (\xi_M - \xi_M^*) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi_M. \tag{4}$$

Здесь  $L^*$  - линия схода вихревых пелен; l - обобщенная криволинейная координата, фиксирующая какую-либо точку на  $L^*$ ,  $\xi_M^*(l)$  - координата  $\xi_M$  точки на линии  $L^*$ , зафиксированной параметром l,  $g^*(\xi_M^*)$  - интенсивность двойного слоя на линии  $L^*$  в той же точке,  $L_c^*$  - контур активного сечения струи, k — индекс, фиксирующий какое-либо из активных сечений. Индекс «\*» будем в дальнейшем по возможности опускать.

С учетом представлений (3) и (4) и обозначения  $\overline{\xi}_{\rm M} = \xi_{\rm M} - \xi_{\rm M}^*$  уравнение (2) примет вид:

$$\int_{S} g \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS + \int_{L} g^{*} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi + 
+ \sum_{k=1}^{m} C_{k} \int_{C_{c}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \overline{\xi} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi = 4\pi H(\overline{r}_{0}).$$
(5)

Видно, что интегральное уравнение (5) содержит только одну неизвестную функцию – интенсивность двойного слоя на поверхности ЛА (если,

конечно, константы С<sub>к</sub> считать известными).

Задавать параметры  $C_k$  не вполне удобно, поэтому сформулируем задачу несколько иначе, так, чтобы, во-первых, константы  $C_k$  были определяемыми, а задаваемыми параметрами задачи были скорости в активных сечениях и, во-вторых, чтобы решение строилось как линейная комбинация решений, первое из которых соответствует обтеканию ЛА без учета работы двигателей, а второе — определяет приращения, связанные с влиянием струй.

Рассмотрим некоторое активное сечение  $S_p$ . Пусть объемный расход воздуха через активное сечение есть некоторая заданная величина  $Q_p$  (здесь везде будем использовать безразмерные величины). Расход  $Q_p$  определяется интегралом:  $Q_p = \int\limits_{S_p} \overline{V}_{\text{отн}} \overline{n}_p dS_p$ , где  $\overline{n}_p$  -вектор нормали в точках активного

сечения. Положим:

$$Q_{p} = Q_{p}^{*} + \int_{S_{p}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_{p}} dS_{p} , \qquad (6)$$

где  $Q_p^*$  - расход через p-ое активное сечение, обусловленный переносной скоростью, который с линейной точностью не зависит от кинематических параметров.

Теперь представим интенсивность двойного слоя g и, соответственно, потенциал  $\phi$  в виде сумм:  $g = g_0 + \Delta g$  и  $\phi = \phi_0 + \Delta \phi$ , где  $g_0$  и  $\phi_0$  - значения интенсивности двойного слоя и потенциала при неработающих двигателях (выдув струй отсутствует), а  $\Delta g$  и  $\Delta \phi$  - приращения, обусловленные работой силовой установки. Тогда интегральное уравнение (5) и условие заданного расхода через активное сечение примут вид:

$$\begin{split} \int_{S} g_{0} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + \int_{L} g_{0}^{*} dI \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi + \\ + \int_{S} \Delta g \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + \int_{L} \Delta g^{*} dI \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi + \sum_{k=1}^{m} C_{k} \int_{L_{ck}} dI \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \overline{\xi} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi = \\ &= 4\pi H(\overline{r}_{0}), \\ Q_{p} = Q_{p}^{*} + \int_{S_{p}} \frac{\partial \phi_{0}}{\partial n_{p}} dS_{p} + \int_{S_{p}} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial n_{p}} dS_{p} \,. \end{split} \tag{8}$$

Вместе с тем интегральное уравнение задачи обтекания ЛА без учета работы двигателей очевидно выглядит следующим образом:

$$\int_{S} g_{0} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS + \int_{L} g_{0}^{*} dI \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi = 4\pi H(\bar{r}_{0}). \tag{9}$$

Условие заданного расхода через активное сечение (8) можно записать

в виде:

$$\int_{S_p} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n_p} dS_p = Q_p - Q_p^* - \int_{S_p} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_p} dS_p = \Delta Q_p.$$
 (10)

Величина  $\Delta Q_p$  представляет собой избыток расхода через активное сечение, обеспечиваемый работой двигателя. Этот избыточный расход можно выразить через среднюю избыточную скорость в активном сечении:

$$\Delta Q_p = S_p V_{jp}$$
.

Введенные таким образом параметры  $V_{jp}$  и будем считать задаваемыми при решении задачи.

Видно, что задача расчета обтекания ЛА с учетом работы силовой установки может быть разделена на две независимые, первая из которых соответствует обтеканию ЛА без учета работы двигателей и сводится к интегральному уравнению (9), а вторая позволяет учесть собственно влияние выдува струй на возмущенный потенциал.

Уравнения второй из указанных задач можно получить, вычтя из уравнения (7) уравнение (9) и записав условия (10) для каждого из активных сечений, представив предварительно потенциал  $\Delta \varphi$  через плотность двойного слоя  $\Delta g$  и поменяв порядок интегрирования в (10). Выполнив указанные процедуры, получим:

$$\begin{split} \int_{S} \Delta g \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \bigg( \frac{1}{r} \bigg) dS + \int_{L} \Delta g^{*} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \bigg( \frac{1}{r} \bigg) d\xi + \sum_{k=1}^{m} C_{k} \int_{L_{ck}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \overline{\xi} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \bigg( \frac{1}{r} \bigg) d\xi &= 0 \,, \end{split}$$

$$\int_{S} \Delta g \Bigg[ \int_{S_{p}} \frac{\partial}{\partial n_{p}} \frac{\partial}{\partial n} \bigg( \frac{1}{r} \bigg) dS_{p} \Bigg] dS + \int_{L} \Delta g^{*} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \Bigg[ \int_{S_{p}} \frac{\partial}{\partial n_{p}} \frac{\partial}{\partial n} \bigg( \frac{1}{r} \bigg) dS_{p} \Bigg] d\xi + \\ + \sum_{k=1}^{m} C_{k} \int_{L_{ck}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \Bigg[ \int_{S_{p}} \overline{\xi} \frac{\partial}{\partial n_{p}} \frac{\partial}{\partial n} \bigg( \frac{1}{r} \bigg) d\xi = 4\pi S_{p} V_{jp}, \ p = \overline{1, m} \,. \end{split}$$

$$(12)$$

Система уравнений (11), (12) позволяет определить искомую функцию  $\Delta g\,$  и константы  $\,C_k\,.$ 

Практически весьма удобно решать задачу об обтекании ЛА с учетом работы силовой установки в производных. Действительно, как было показано в [1]  $H(\bar{r}_0) = \sum_i H_{q_i}(\bar{r}_0) q_i$ , тогда, представляя интенсивность двойного

слоя  $g_0$  в виде  $g_0 = \sum_i g^{q_i} q_i$  , найдем, что каждая из функций  $g^{q_i}$  может

быть найдена независимо от другой (принцип суперпозиции) из уравнения вида (9) с правой частью  $H_{q_i}(\bar{r}_0)$ .

Как следует из системы (11) и (12), аналогичным образом можно по-

ступить с интенсивностью двойного слоя  $\Delta g$  . Если положить, что эта интенсивность выражается формулой вида  $\Delta g = \sum_{n=1}^m g^{V_{jn}} V_{jn}$  , то, как нетрудно

убедиться, функция  $g^{V_{jn}}$  может быть найдена из системы (11), (12), в которой правые части уравнений при  $p \neq n$  равны нулю, а при p = n правая часть соответствующего уравнения равна  $4\pi S_p$  (представление через производные по параметрам  $V_{jn}$  при этом относится и к константам  $C_k$ ). Это обстоятельство позволяет считать избыточные относительные скорости истечения  $V_{jp}$  кинематическими параметрами.

Окончательно интегральные уравнения для определения производных интенсивности двойного слоя по кинематическим параметрам можно записать в виде:

$$\begin{split} \int_{S} g^{q_{i}} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS + \int_{L} g^{*q_{i}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi &= 4\pi H_{q_{i}} \left(\overline{r}_{0}\right). \end{split} \tag{13}$$

$$\int_{S} g^{V_{jn}} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS + \int_{L} g^{*V_{jn}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} C_{k}^{V_{jn}} \int_{L_{ck}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \overline{\xi} \frac{\partial}{\partial n_{0}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi = 0, \end{split} \tag{14}$$

$$\int_{S} g^{V_{jn}} \left[ \int_{S_{p}} \frac{\partial}{\partial n_{p}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS_{p} \right] dS + \int_{L} g^{*V_{jn}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \left[ \int_{S_{p}} \frac{\partial}{\partial n_{p}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS_{p} \right] d\xi + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} C_{k}^{V_{jn}} \int_{L_{ck}} dl \int_{\xi^{*}}^{-\infty} \left[ \int_{S_{p}} \frac{\partial}{\partial n_{p}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \right] d\xi = \begin{cases} 4\pi S_{p}, p = n, \\ 0, p \neq n, \end{cases} p = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Таким образом решение задачи обтекания ЛА с учетом работы двигателей силовой установки сводится к совокупности линейных интегральных сингулярных (строго говоря, гиперсингулярных [2]) уравнений относительно плотности двойного слоя, размещенного на поверхности (преобразованной по правилу Прандтля-Глауэрта) схематизированного ЛА (13) и (14), (15). Входящие в указанные уравнения интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару. Возмущенный потенциал выражается через интенсивность двойного слоя, для которой справедливо представление:

$$g = \sum_{i} g^{q_i} q_i + \sum_{k=1}^{m} g^{V_{jk}} V_{jk}$$
,

при этом функции  $g^{q_i}$  и  $g^{V_{jk}}$  определяются только геометрией ЛА и не зависят ни от углов атаки, скольжения, отклонения органов управления и ме-

ханизации, ни от режима истечения струй двигателей.

Заметим, что если двигатель моделируется не только активным сечением, но и тонкостенным каналом, то «математические» поверхности, называемые здесь поверхностью струи и поверхностью вихревой пелены (той ее части, которая сходит с кромок указанного канала) совпадают, совместно моделируя «физическую» поверхность струи. Ни к каким особенностям с точки зрения решения системы (14), (15) отмеченное обстоятельство не приводит.

#### Литература

- 1. Гуляев В.В. Математическая постановка задачи об установившемся обтекании самолета дозвуковым потоком сжимаемого газа в условиях выдува струй двигателей силовой установки. См. настоящий сборник.
- 2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 519 с.

# НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСУЩИХ СИСТЕМ ПРИ ИХ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СО СТРУЯМИ

В.В. Гуляев

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

Приводятся результаты исследований аэродинамических характеристик взаимодействующих со струями несущих систем, выполненных с помощью линейной математической модели обтекания. Расчетные характеристики сравниваются с данными известных экспериментальных и расчетно-теоретических исследований.

На рис.1 приводятся результаты расчетов распределения нагрузки вдоль размаха прямого крыла с удлинением  $\lambda = 4$ , обдуваемого струей круглого поперечного сечения с избыточной скоростью  $V_i = 0.53$ . Активное сечение удалено от передней кромки крыла на расстояние, равное хорде, диаметр активного сечения так же равен хорде. Видно, что прирост подъемной силы наблюдается в сечениях, обдуваемых струей. На рис.1 верхняя кривая (1) - оценка прироста подъемной силы по теории плоских сечений, когда считается, что каждое сечение не зависит от соседних и те, что попали в струю, увеличивают подъемную силу пропорционально местному скоростному напору. Такая оценка дает завышенное значение величины прироста подъемной силы. Кривая (2) на рис.1 результат расчета распределения нагрузки по методу несущей поверхности, когда не обеспечивается выполнение граничных условий на поверхности струи, но циркуляции откликаются на увеличение скорости на части размаха и соседние сечения крыла, таким образом, взаимодействуют между собой. Так оценивался прирост подъемной силы в работе [1] с той разницей, что там использовалось теория несушей нити.

Расчет, в котором на границах струи выполняется условие равенства давлений, но сама форма границ в процессе расчета не выстраивается, (кривая - 3) приводит к меньшим значениям прироста нагрузки в сечениях крыла, обдуваемых струей. Результат максимально подробного расчета по нелинейной методике [2], с удовлетворением всех граничных условий на поверхности струи (кривая - 4) отвечает минимальным из всех полученных приростов подъемной силы.

Точками на рис.1 показаны результаты расчета распределений подъемной силы по размаху крыла, полученные с использованием линейной математической модели [3,4]. В случае отсутствия обдува крыла струей (кривая - 5) полученные данные практически совпадают с результатом нелинейной теории. В случае обдува данные расчета с помощью модели [3,4] дают насколько увеличенную величину прироста подъемной силы, занимая свое место среди других результатов, полученных с помощью линеаризованных подходов, вполне согласуясь с ними.

На рис.2 сравниваются результаты расчета (показаны линиями) и экспериментальные данные по распределению нагрузки вдоль размаха крыла удлинения  $\lambda = 5$ . Опытные данные взяты из работы [5]. Прямое крыло обдувалось двумя струями по части размаха, обдуваемые участки крыла располагались в центральной части каждой консоли. В условиях эксперимента струи имели неограниченную протяженность по вертикали, избыточная скорость в струях составляла  $V_i = 0.35$ . В другом случае центральная часть крыла помещалась в область заторможенного потока (избыточная скорость в струе, т.е., по существу, недостаток скорости составлял  $V_i = -0.37$ ). Расчетом при угле атаке  $\alpha = 14.5^{\circ}$  (в соответствии с условиями эксперимента) определялись приросты нагрузок в обдуваемых сечениях в обоих из рассматриваемых случаев, форма поперечного сечения струй при этом была выбрана квадратной, а активные сечения вынесены далеко вперед передней кромки крыла. Как видно из рис.2 расчетные данные качественно хорошо согласуются с результатами эксперимента. Несколько завышенные расчетные значения коэффициента  $C_{vacey}$  в случае отсутствия обдува связаны с достаточно большим значением угла атаки, при котором не исключена возможность возникновения местных срывов потока. Завышенные значения нагрузок в зоне обдува крыла струей и, соответственно, заниженные в зоне заторможенного спутного потока связаны как с указанной причиной (большой угол атаки), так и с общими особенностями решения задачи о струйном течении в линейной постановке (см. рис.1).

Далее сопоставляются расчетные и экспериментальные данные по приращениям суммарной подъемной силы, обусловленным обдувкой крыла струей. На рис.3 приводятся результаты расчета (показаны на рисунке линиями) приростов подъемной силы на крыле трапециевидной формы в плане ( $\lambda$ =5,  $\eta$ =3), обдуваемом цилиндрической струей, расположенной в корневой части крыла и имеющей относительный диаметр  $\overline{D}$  = D/l = 0,2 (l – раз-

мах крыла). Для сравнения здесь же нанесены соответствующие экспериментальные данные, взятые из работы [6] и результаты расчета с помощью нелинейной математической модели [2]. Из сопоставления различных данных видно, что расчет выполненный с помощью линейной математической модели удовлетворительно отражает зависимости  $\Delta C_{ya}(V_j)$  для рассмотренных значений угла атаки, давая несколько завышенный результат в области больших значений  $V_j$ , что связано с особенностями линейного подхода к решению задачи. Заметим, что на рис.3 под  $V_j$  понимается не избыточная, а полная скорость в струе.

На рис.4 сравниваются экспериментальные и полученные расчетом с помощью нелинейной [2] и линейной математических моделей зависимости коэффициентов подъемной силы от угла атаки для трапециевидного крыла (схема этого крыла приведена на рис.5), обдуваемого двумя высокоскоростными струями. В первом из двух рассмотренных случаев обдува полная скорость в струе составляла  $V_j$ =1,85 , а во втором  $V_j$ =3,33. Коэффициент подъемной силы крыла отнесен к скоростному напору в струе, как это сделано в работе [7], откуда взяты экспериментальные данные. Именно поэтому для больших значений относительной скорости в струе коэффициент подъемной силы  $C_{ya}$  получился меньше. Как видно из рисунка, полученные линейные результаты удовлетворительно согласуются с данными эксперимента и нелинейной математической модели при всех значениях относительной скорости в струе, включая ее большие значения, обнаруживая тенденцию к завышению значений коэффициента подъемной силы при больших значениях угла атаки, что вполне естественно для линейных подходов.

В работе [2] исследовались аэродинамические характеристики механизированного крыла при различной интенсивности обдува его верхней поверхности, в широком диапазоне углов атаки и отклонения закрылка. Исследовалось крыло следующей конфигурации: удлинение  $\lambda$ =4, сужение  $\eta$ =1, стреловидность  $\chi$ =0. Закрылок располагался вдоль всего размаха, относительная хорда закрылка  $\bar{b}_3$ =0,3. Относительный размах, «обслуживаемый» струей  $\bar{l}_j$ = $l_j/l$ =0,3, двигатели моделировались каналом прямоугольного сечения. Середина обдуваемого струей участка крыла имела поперечную координату  $\bar{z}$  = 2z/l=0,25.

На рис.6 показаны зависимости коэффициента подъемной силы  $C_{ya}$  указанного крыла от угла атаки  $\alpha$  при отклоненном на  $30^{\circ}$  закрылке для различных значений интенсивности выдуваемой струи. Четыре кривые на графике соответствуют следующим значениям полной относительной скорости в струе  $V_j$ =1 (по существу, это означает, что струя отсутствует ), 2, 3 и 4.

На рис.7 зависимости коэффициента подъемной силы  $C_{ya}$  того же крыла даны в функции полной относительной скорости в струе при различ-

ных углах отклонения закрылка и  $\alpha$ =0.

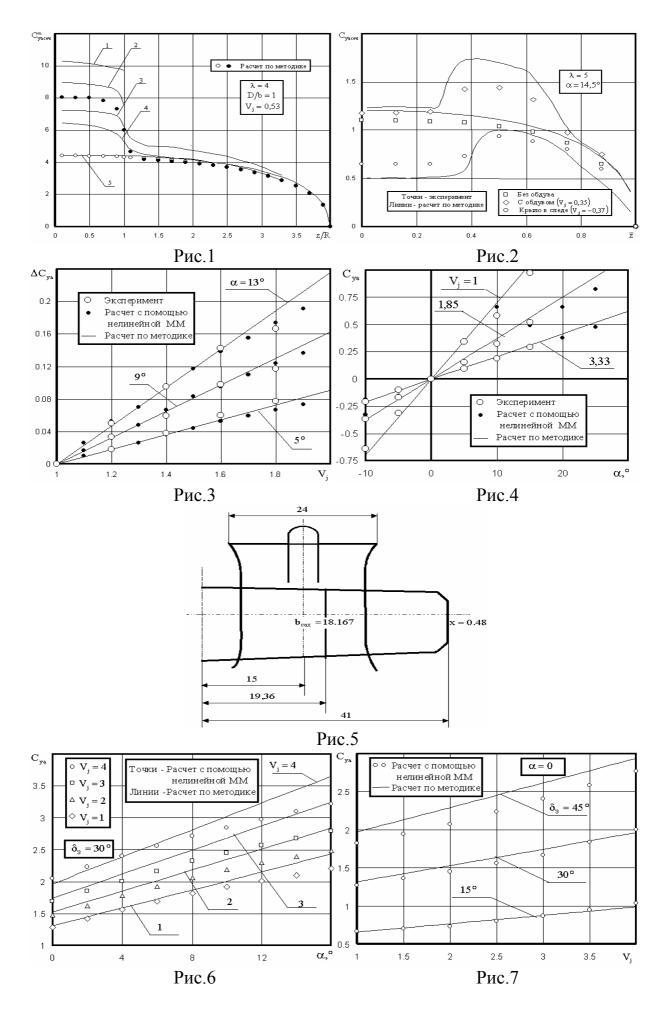
Соответствующие аэродинамические характеристики получены расчетом по линейной теории (показаны на рис.6 и 7 линиями). С целью сравнения на те же графики точками нанесены результаты, взятые из работы [2].

Как показывает сопоставительный анализ, имеет место хорошее согласование результатов расчетов с помощью линейной и нелинейной методик при умеренных значениях угла атаки ( $\alpha$ <10°) и угла отклонения закрылка ( $\delta_3$ <30°) во всем рассмотренном диапазоне интенсивности выдуваемой струи. Рассогласование данных линейной и нелинейной математических моделей с ростом углов атаки и отклонения закрылка связано с наличием сугубо нелинейных эффектов, которые заметным образом проявляются при больших значениях кинематических параметров.

Таким образом, приведенные в настоящей работе результаты сопоставительного анализа данных по аэродинамическим характеристикам несущих систем при их обдуве струями, полученных с помощью разработанной линейной математической модели, экспериментально и с использованием других известных численных методов, в том числе нелинейных, позволяет сделать вывод о достаточной степени достоверности линейной методики. Соответствующая методика предоставляет возможность исследовать влияние на аэродинамические характеристики ЛА таких параметров, как интенсивность выдува струи, форма сопла двигателя и его расположение, углы отклонения органов механизации и управления и т.п. в диапазонах изменения соответствующих параметров обычных и естественных для линейной теории.

# Литература

- 1. Ведров В.С., Остославский И.В. Расчет обдувки монопланных крыльев с винтами перед крылом. Труды ЦАГИ, вып.232, 1935. 20 с.
- 2. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989. 208 с.
- 3. Гуляев В.В. Математическая постановка задачи об установившемся обтекании самолета дозвуковым потоком сжимаемого газа в условиях выдува струй двигателей силовой установки. См. настоящий сборник.
- 4. Гуляев В.В. Интегральные уравнения линейной задачи обтекания самолета со струями. Статья настоящего сборника.
- 5. Кюхеман Д. Аэродинамическое проектирование самолетов. М.: Машиностроение, 1983. 656 с.
- 6. Феррари К. Проблемы взаимодействия. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях. Под ред. А.Ф. Доновэна, Г.Р. Лоуренса. М.: Издво иностранной литературы, 1959. 228...435 с.
- 7. Kuhn R.E. Semiempirical procedure for estimation lift and drag characteristics of propeller-wing-flap configuration for and short take-off-landing airplanes. NASA Mem. Febr., 1959.



## РАЗРУШЕНИЕ КОНЦЕВЫХ ВИХРЕЙ ПРИ ПОМОЩИ ОТСОСА ВНЕШНЕГО ПОТОКА

М.Г. Димитрогло

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

Представлены результаты исследования, направленного на выяснение возможности разрушения концевых вихрей, образующихся за летательными аппаратами. Воздействие на концевые вихри осуществляется при помощи отсоса внешнего потока с поверхности крыла Найдены форма и места расположения устройства отсоса, позволяющие разрушать концевые вихри. При этом интенсивность устройства отсоса является приемлемой с точки зрения практической реализации.

В условиях увеличения интенсивности воздушного движения безопасность полетов, особенно в районах крупных аэродромов, в значительной степени зависит от атмосферных неоднородностей, к которым относятся и вихревые (спутные) следы от других самолетов. Спутный след за тяжелыми летательными аппаратами (ЛА) настолько интенсивен, что его воздействие экипажем часто воспринимается как внезапный отказ систем управления и в некоторых случаях приводит к катастрофе. Изучение спутного следа и разработка методов борьбы с ним является важной и актуальной проблемой [1].

В данной работе для воздействия на спутный след используется отсос внешнего потока с поверхности крыла в районе его законцовок. Отсос потока относится к энергетическим методам, которые, благодаря достигнутым в последние годы успехам в создании силовых установок и развитию теоретических методов исследования, являются перспективными.

Эффективные теоретические исследования в данном направлении стали возможны благодаря работам И.К. Лифанова [2] в которых разработан математический аппарат для численного решения граничных сингулярных интегральных уравнений, к которым сводится задача об обтекании крыла с отсосом потока с его поверхности.

В первых работах по моделированию отсоса потока при выполнении граничного условия непротекания на профиле с той стороны, где расположен отсос, приходили к сингулярному интегральному уравнению, в правой части которого стояла гладкая функция. Затем, через исследование касательных составляющих поля скоростей в точках профиля показывалось, что решение получаемого сингулярного интегрального уравнения должно иметь в точке отсоса неинтегрируемую особенность типа  $\frac{1}{x}$ . При построении численного метода в этом случае приходилось использовать дополнительную информацию об искомом решении в точке отсоса, из-за чего вычислительные методы усложнялись. В работе [3] было предложено граничное условие непротекания выполнять на стороне профиля, противоположной расположению отсоса. При этом приходили к тому же сингулярному интегральному уравнению, но в правой части появляется  $\delta$  — функция с носителем в точке расположения отсоса. Наличие  $\delta$  — функции в правой части позволило упростить алгоритмы численного решения сингулярного интегрального уравне-

ния, а для пространственного случая построить новый, более корректный, алгоритм численного решения.

Рассматривается обтекание тонкого крыла конечного размаха потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющим постоянную скорость  $\vec{W_0}$  на бесконечности и направленную под постоянным углом атаки  $\alpha$ , рис.1. На заданных кромках крыла происходит отрыв потока и в результате образуется вихревая пелена.

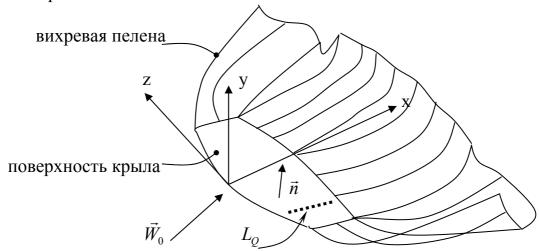


Рис. 1. Схема обтекания крыла.

С поверхности крыла производится отсос внешнего потока. Устройство отсоса представляет собой узкую щель, моделируемую кривой  $L_{\mathcal{Q}}$ . При осуществлении отсоса его интенсивность, создаваемая указанным выше устройством, может быть переменной или постоянной как по времени, так и вдоль кривой  $L_{\mathcal{Q}}$ . Отсос производится с одной из сторон крыла. На поверхности крыла со стороны отсоса возникает поле скоростей, имеющее в точках кривой  $L_{\mathcal{Q}}$  особенность типа поля скоростей, индуцируемого линией стоков, с другой стороны крыла поле скоростей непрерывно.

Ставится задача при известном положении устройства отсоса внешнего потока исследовать степень его влияния на концевые вихри (ослабление, определенное изменение структуры или даже разрушение). При этом величина интенсивности устройства отсоса внешнего потока должна иметь приемлемое значение с точки зрения практической реализации.

На основе математической модели для решения нестационарных трехмерных задач об обтекании тонких несущих поверхностей идеальной несжимаемой жидкостью с отсосом внешнего потока, разработан комплекс программ, при помощи которого исследовалось обтекание крыла конечного размаха с отсосом внешнего потока, осуществляемым с одной из сторон поверхности через точечное отверстие или узкую щель произвольной формы.

Исследовалась форма спутного следа, образующегося при обтекании тонкого крыла — прямоугольной пластины. На поверхности консоли в районе законцовки располагается устройство для отсоса внешнего потока. Ин-

тенсивность Q, форма и расположение устройства отсоса являются предметом исследований. Расчеты проводились с учетом симметрии — одна консоль.

Расчетные параметры используются в безразмерном виде: скорость набегающего потока  $\left|\vec{W}_0\right|=1$ ; угол атаки  $\alpha=10^\circ$ . Размах консоли l=4, хорда b=1. Обтекание происходит без скольжения,  $\beta=0^\circ$ .

На первом этапе исследования было проведено моделирование обтекания пластины без отсоса. Расчет формы спутного следа был проведен для нескольких значений радиуса вихря на большое расстояние и показал, что концевые вихри очень устойчивы и долгое время сохраняются практически без изменений. Форма спутного следа до 85-го шага показана на рис.2.

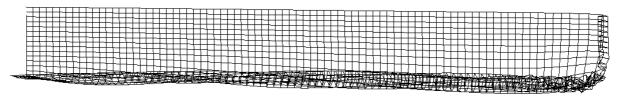


Рис.2. Форма следа, случай без отсоса.

Затем исследовалось влияние на концевые вихри устройства отсоса в виде линии, расположенной вдоль хорды крыла по всей ширине крыла. Расчеты показали, что максимальное воздействие происходит при расположении устройства отсоса в ряду рамок, образующем боковую кромку крыла. При увеличении расстояния от устройства отсоса до боковой кромки влияние отсоса распространяется в основном на вихревую пелену, сходящую с задней кромки. Результаты показаны на рисунках 3 и 4.

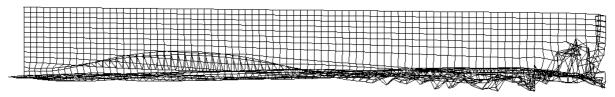


Рис.3. Q = 0.3, устройство отсоса во второй рамке от законцовки консоли.

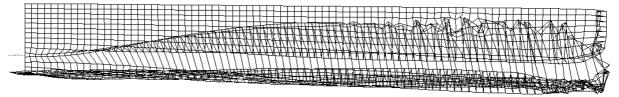


Рис.4. Q = 0.3, устройство отсоса в четвертой рамке от законцовки консоли.

Приведенные результаты получены при довольно большой интенсивности отсоса, реализовать практически которую будет очень сложно или вообще невозможно. При реально достижимой интенсивности отсоса и распо-

ложении устройства отсоса вдоль хорды крыла влияние отсоса на концевые вихри резко снижается и практически незаметно.

Поэтому дальнейшие исследования были направлены на выяснение закономерностей при обтекании крыла с устройством отсоса расположенным вдоль размаха крыла, его интенсивность Q = 0,1. Расчеты показали, что, как и в случае расположения устройства отсоса вдоль хорды крыла, наиболее интенсивное влияние на концевые вихри наблюдается в случае, когда отсос примыкает к боковой кромке крыла.

Также влияют на картину обтекания расстояние от задней кромки крыла, рис.5,6 и длина линии отсоса, рис.7. Наибольший эффект дает расположение отсоса в рамках, образующих заднюю кромку. Увеличение длины линии отсоса отрицательно сказывается на разрушении вихрей. Это можно проследить сравнив рисунки 6 и 7.

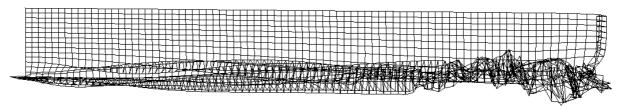


Рис. 5. Устройство отсоса расположено в 1-й рамке от задней кромки, во 2-й рамке от боковой кромки, длина линии отсоса 2 рамки.



Рис. 6. Устройство отсоса расположено в 3-й рамке от задней кромки, во 2-й рамке от боковой кромки, длина линии отсоса 2 рамки.

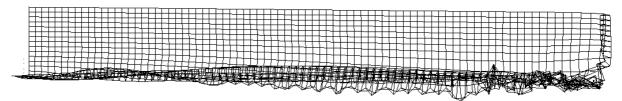


Рис. 7. Устройство отсоса расположено в 3-й рамке от задней кромки, во 2-й рамке от боковой кромки, длина линии отсоса 4 рамки.

При размещении устройства отсоса в одной рамке – минимальная длина (форма устройства близка к точке), получаем максимальную интенсивность воздействия на концевые вихри, рис.8.

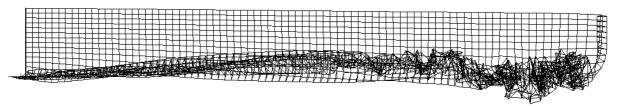


Рис. 8. Устройство отсоса в виде точки в 3-й рамке от задней кромки, во 2-й рамке от боковой кромки.

Все сказанное выше относится к случаю, когда устройство отсоса расположено на нижней поверхности крыла. Такое расположение отрицательно сказывается на несущих свойствах крыла. Отсос, осуществляемый с верхней поверхности, наоборот, положительно влияет на несущие свойства крыла.

При отсосе внешнего потока с верхней поверхности крыла расположение и форма устройства для его осуществления выбирались по результатам, приведенным выше. В этом случае интенсивность отсоса равна . На рис.9 показана форма спутного следа при расположении устройства отсоса в одной рамке (точечный отсос), рамка примыкает к боковой кромке.

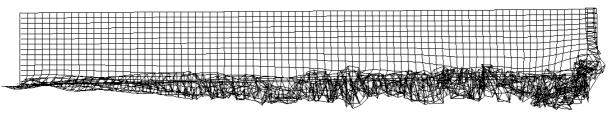


Рис.9. Устройство отсоса в виде точки в 1-й рамке от задней кромки, отсос потока происходит с верхней поверхности крыла.

Из рисунка видно, что влияние на концевые вихри не менее интенсивно, чем при отсосе потока с верхней поверхности крыла.

По результатам исследований можно сделать вывод о возможности разрушения концевых вихрей с помощью отсоса внешнего потока. Интенсивность устройства отсоса при этом имеет величину реально достижимую с точки зрения практической реализации. Наибольший эффект достигается при расположении устройства отсоса вблизи законцовки консоли, ближе к ее задней кромке. Оптимальной формой является форма близкая к точке, т.е. устройство отсоса должно иметь минимальную длину.

# Литература

- 1. Аубакиров Т.О., Желанников А.И., Иванов П.Е., Ништ М.И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. Алматы. 1999. 280с.
- 2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.

3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: «Янус-К». 2001. 508с.

#### УДК 629.735.015

# ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ РАСЧЕТАХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В.В. Зубок

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

Рассматривается математическое моделирование стационарного обтекания летательного аппарата при различных способах его схематизации. В основу методики математического моделирования положен метод дискретных вихрей. Приводятся некоторые результаты расчетов самолета типа Ил-76.

В настоящее время широкое применение, наравне с экспериментальными, получили численные методы исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов (ЛА).

В основу методики математического моделирования обтекания ЛА положен метод дискретных вихрей [1]. Задача решалась в нелинейной стационарной постановке при безотрывном обтекании. При этом поверхности ЛА и вихревой след моделировались непрерывным вихревым слоем, который затем заменялся системой дискретных вихрей. Решение задачи сводится к нахождению напряженностей вихрей, моделирующих поверхности летательного аппарата. По найденным напряженностям суммарных вихрей определяются аэродинамические нагрузки, а затем и суммарные аэродинамические коэффициенты.

При составлении математических моделей схематизация летательного аппарата может быть проведена различными способами. Несущие и рулевые поверхности могут быть заменены бесконечно тонкими плоскостями. В более сложном случае их можно моделировать тонкими базовыми поверхностями, искривленными и закрученными по закону искривления и крутки средней линии несущих и рулевых элементов летательного аппарата. И, наконец, крыло, оперение, рулевые поверхности моделируются как телесные объекты [2]. При этом фюзеляж может быть смоделирован как базовыми плоскостями, так и объемным телом.

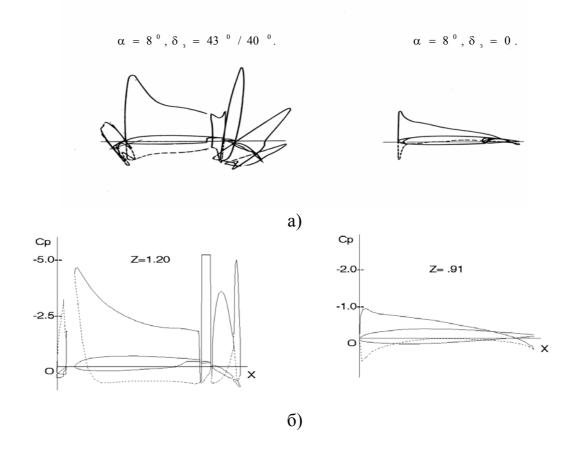
В расчетах моделирование элементов несущих и рулевых поверхностей летательного аппарата производилось тремя перечисленными способами, а фюзеляж представлялся телесным объектом.

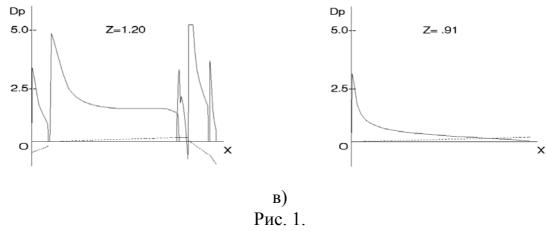
Результаты расчетов показывают, что по мере усложнения математической модели можно получать более широкий спектр аэродинамических характеристик. Так, при моделировании самолета плоскостями, удовлетворительно согласуются с данными экспериментов производные аэродинами-

ческих коэффициентов по кинематическим параметрам. При моделировании тонкими поверхностями с учетом крутки – неплохо совпадают зависимости аэродинамических коэффициентов от кинематических параметров, а при моделировании с учетом телесности конструкции летательного аппарата достаточно удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным как распределенные и суммарные аэродинамические коэффициенты, так и шарнирные характеристики.

В качестве примера на рис. 1-3 приведены некоторые результаты расчетов аэродинамических характеристик самолета типа Ил-76 как с неотклоненной, так и отклоненной в посадочное положение механизацией. При этом использовались два вида схематизации: - тонкими поверхностями с сохранением углов крутки и отклонения органов механизации и с учетом реальных толщин несущих и рулевых поверхностей. Щели между звеньями закрылков и крылом присутствовали как при моделировании тонкими поверхностями, так и при телесной схематизации. Фюзеляж в обоих случаях моделировался приближенно в виде тела прямоугольного сечения, сформированного плоскими панелями.

На рис. 1 представлено сравнение распределения коэффициентов давления в одном из сечений крыла с экспериментальными данными (рис. 1, а) [3]. Как видно из представленных материалов, качественное согласование аэродинамической нагрузки, лучше в случае моделирования ЛА с учетом телесности (рис.1, б), чем тонкими поверхностями (рис. 1, в), причем как с отклоненной, так и неотклоненной механизацией.





Анализ суммарных аэродинамических характеристик, полученных в расчетах, показывает, что в полетной конфигурации, т.е. при неотклоненной механизации совпадения с экспериментальными данными достаточно хорошие как при моделировании с учетом телесности, так и при моделировании тонкими плоскостями. Однако, во взлетно-посадочной конфигурации, т.е. при отклонении двух секций трехзвенных закрылков и предкрылков при их моделировании тонкими плоскостями расхождения довольно значительны, а при телесном подходе результаты расчетов существенно ближе к экспериментальным данным (рис. 2).

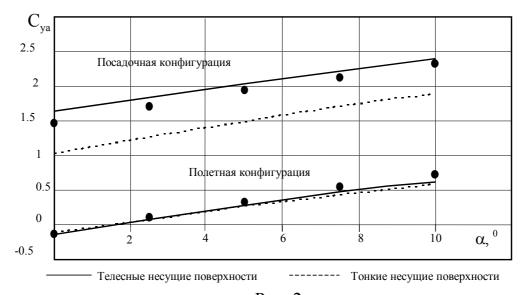
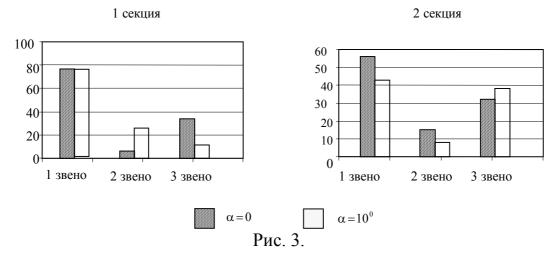


Рис. 2.

Из-за значительного отличия в распределенных аэродинамических характеристиках следует ожидать, что способ схематизации окажет существенное влияние на шарнирные моменты звеньев закрылков. На рис. 3 представлены изменения величин коэффициентов шарнирных моментов. Исследования показали, что отличия в коэффициентах шарнирных моментов, определенных при схематизации тонкими панелями доходят до 75% по сравнению с телесным представлением несущих поверхностей в зависимости от рассматриваемой секции и звена закрылков.



Таким образом, при усложнении схематизации ЛА, т. е. при моделировании его несущих поверхностей с учетом телесности конструкции можно получать в расчетах более точно как суммарные, так и распределенные аэродинамические характеристики.

## Литература

- 1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 184 с.
- 2. Бушуев В.И., Зубок В. В. Расчет нелинейных аэродинамических характеристик телесного крыла с механизацией. Научно-методические материалы по аэродинамике летательных аппаратов. М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1985.С. 34-45.
- 3. Васин И.С., Егоров В.И., Муравьев Г.Г. и др. Аэродинамика самолета Ил -76. М.: ОКБ им. С.В. Ильюшина, 1979. 217 с.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ШЛЕЙФА ВЫМЫВАЕМОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ СМЕНЫ ОДНОРОДНОСТЕЙ<sup>1)</sup>

А.А. Квасов

Орловский государственный университет

Развитие метода определения критического дебита водозабора [1], расположенного в сложном по геологической структуре фильтрационном слое, привело к обобщению задачи. Изучается вымываемый из очага загрязнения шлейф. Это позволило решить ряд актуальных для практики задач [2]. Именно: оценить характер распространения загрязнения в подземных водах, найти границы шлейфа вымываемого загрязнения, определить критический дебит водозабора.

Рассмотрим плоскопараллельную, установившуюся и происходящую в кусочно-однородном изотропном слое линейную фильтрацию. Течение опишем комплексным потенциалом [3]

$$W(z) = k\varphi(z) + i\psi(z) \tag{1}$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00063)

который, согласно [4], удовлетворяет уравнению Коши-Римана

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \overline{z}} = 0, \quad 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

Пусть неограниченная область фильтрации состоит из чистой области  $D_1$  и загрязнённой  $D_2$ . Грунт в областях  $D_1$  и  $D_2$  однороден и характеризуется коэффициентами проницаемости  $k_1$  и  $k_2$ . Течение обусловлено работой водозабора в условиях поступательного потока грунтовых вод. Водозабор состоит из одиночной совершенной эксплуатационной скважины, моделируемой точечным стоком мощности q, равной дебиту водозабора, приходящемуся на единицу толщины слоя. Положение скважины в плоскости хОу характеризуем точкой C с координатой  $z_c = x_c + iy_c$ . Пусть очаг загрязнения простирается на значительные расстояния по сравнению с кратчайшим расстоянием от него до точки C как в направлении от водозабора до загрязнения, так и перпендикулярно этому направлению. Моделируем границу смены однородностей прямой L. Не нарушая общности рассуждений, выберем прямоугольную декартову систему координат xOy так, чтобы ось Oy совпала с L, а ось Ox проходила через точку C. Тогда, загрязнённая область  $D_2$  моделируется второй и третьей координатными четвертями, а чистая область  $D_1$ , в которой расположен водозабор — первой и четвёртой координатными четвертями. Граница сопряжения L задаётся уравнением

$$x = 0. (3)$$

Пусть вектор скорости поступательного потока грунтовых вод в однородном слое  $(k_1 = k_2 = 1)$  составляет угол  $\beta$  с отрицательным направлением оси Ox (угол отсчитывается против часовой стрелки). Тогда, комплексный потенциал  $W_0(z)$ , удовлетворяющий уравнению (2) и описывающий течение к работающему в условиях поступательного потока водозабору, расположенному в однородном слое, имеет вид [3]:

$$W_0(z) = -uze^{-i\beta} - \frac{q}{2\pi}\ln(z - x_c)$$
. (4)

При наличии границы сопряжения L, течение по обе стороны от неё возмущается. Следуя [3], в безразмерных величинах течение в областях  $D_1$  и  $D_2$  опишем удовлетворяющими уравнению (2) комплексными потенциалами  $W_1(z)$ ,  $W_2(z)$ .

Граничное условие (непрерывность давления и расхода жидкости) для комплексных потенциалов  $W_1(z)$  и  $W_2(z)$  имеет вид [4]

$$(1 - \lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda \overline{W}_2^-(z), \quad z \in L, \tag{5}$$

где  $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ , знаками "+" и "-" обозначены предельные значения соот-

ветствующих функций при подходе к L из области  $D_1$  и  $D_2$ .

Так как область течения содержит бесконечно удалённую точку, то для единственности решения задачи сопряжения (2), (5), необходимо задать условия в бесконечности. Согласно [4], при  $|z - \zeta| \to \infty$  ( $\zeta \in L$ ), поведение  $W_{\nu}(z)$  ( $\nu = 1, 2$ ) определяется видом особенности комплексного потенциала (4) в бесконечности.

Согласно фильтрационной теореме о прямой [3] и формулы (4), решение задачи (2), (5) на границе L имеет вид:

$$W_{1}(z) = -uze^{-i\beta} - \frac{q}{2\pi} \left( \ln(z - x_{c}) + \lambda \overline{\ln(-z - x_{c})} \right),$$

$$W_{2}(z) = \frac{-uz}{1 + \lambda} \left( e^{-i\beta} + \lambda e^{i\beta} \right) - \frac{q(1 - \lambda)}{2\pi} \ln(z - x_{c}).$$
(6)

Описав фильтрационное течение в областях  $D_1$  и  $D_2$ , найдём в рамках модели "разноцветных" жидкостей вымываемый из загрязнённой области  $D_2$  шлейф (заштрихованная на рис. 1-4 область  $D_2'$ ). Полагаем, что прошедшая через область  $D_2$  жидкость загрязняется. Укажем границы шлейфа  $D_2'$ . Для этого построим область захвата водозабора и такие линии тока, которые имеют с границей загрязнения по одной общей точки S. Так как точка S является точкой непротекания кривой L, то её координата  $z_s$  удовлетворяет уравнению (3) и условию

$$\frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial x} = 0, \quad z = z_s, \tag{7}$$

означающему равенство нулю нормальной составляющей к L скорости фильтрации в искомой точке. Область захвата водозабора ограничена нейтральной линией тока, проходящей через критическую точку течения  $K_*$ . Для нахождения координаты  $z_*$  этой точки имеем уравнение

$$\overline{V}_{V}(z) \equiv \frac{\partial \varphi_{V}(z)}{\partial z} = 0, \quad z = z_{*},$$
 (8)

где  $\overline{V}_{\nu}(z)$  — комплексно сопряжённая скорость,  $\nu$  = 1, 2. Учитывая (1), (6) решение системы уравнений (3), (7) имеет вид:

$$\begin{cases} y_s = \pm x_c \sqrt{\frac{q(1-\lambda)}{2\pi u x_c \cos \beta} - 1}, \\ x_s = 0. \end{cases}$$
 (9)

Таким образом, точка S появляется на L, если

$$q = \frac{2\pi u x_c \cos \beta}{1 - \lambda}. (10)$$

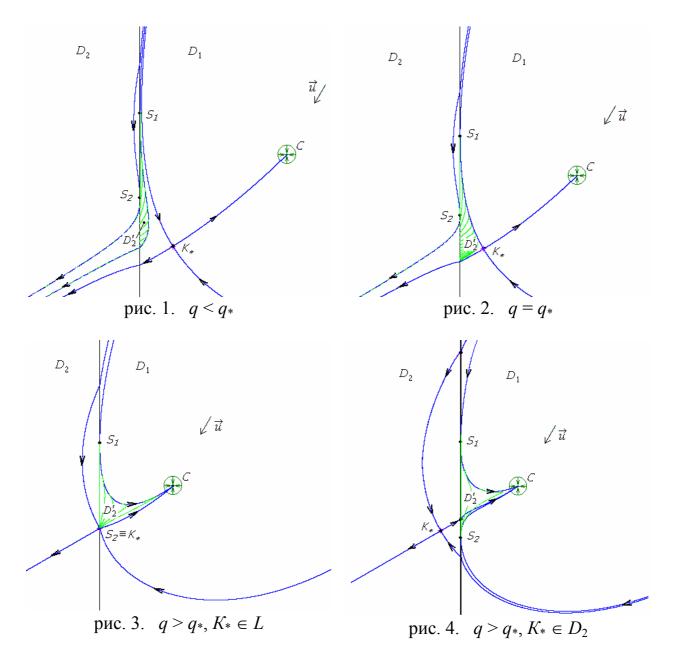
При больших значениях дебита водозабора q, на L имеются две симметрично расположенные относительно оси Ox точки  $S_1$  и  $S_2$  с координатами, определяемыми по формулам (9).

Исследование уравнения (8) для комплексных потенциалов (6) показало, что в области фильтрации при  $q \neq 0$  имеется одна критическая точка  $K_*$ . Причём, при

$$q = \frac{2\pi i x_c \cos \beta}{1 - \lambda} \left( 1 + \left( \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} t g \beta \right)^2 \right), \tag{11}$$

она попадает на границу загрязнения.

В силу (1), выделяя из комплексных потенциалов (6) мнимые части, имеем функции тока. Построив линии тока [3], проходящие через найденные точки S и  $K_*$ , определяем границы шлейфа вымываемого загрязнения  $D_2'$ (рис. 1-4). Отметим, что если дебит водозабора q не превышает значения, рассчитываемого по формуле (10), то шлейфа  $D_2'$  не образуется. При больших значениях q, но удовлетворяющих условию  $q \le q_*$  ( $q_*$  — критический дебит), шлейф вымываемого из  $D_2$  загрязнения заключён между границей загрязнения и линией тока, проходящей через точку  $S_1$  (координаты точки  $S_1$ определяются по формулам (9)). В водозабор он не попадает (рис. 1, рис. 2), а значит, эксплуатационная скважина работает без загрязнения. Если  $q > q_*$ , то шлейф  $D'_2$  попадает в водозабор (рис. 3, рис. 4). Отметим, что величина критического дебита  $q_*$  заключена между значениями, рассчитываемыми по формулам (10), (11) и может быть уточнена в ходе проведения численного эксперимента [1]. Исследования показали, что для дебита водозабора, большего  $q_*$ , но не превышающего рассчитываемого по формуле (11), шлейф  $D_2'$ заключён между L, частью нейтральной линии тока, проходящей через точки  $K_*$ , C и линией тока  $S_1C$  (рис. 3). Если  $K_* \in D_2UL$ , то шлейф вымываемого загрязнения ограничен частью L, заключённой между точками  $S_1$ ,  $S_2$  и двумя линиями тока  $S_1C$ ,  $S_2C$  (рис. 4).



## Литература

- 1. Квасов А.А., Пивень В.Ф. О работе водозабора без загрязнения // VIII Четаевская международная конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением". Тезисы докладов. Казань: Изд-во Казанского гос. тех. ун-та, 2002. С. 263.
- 2. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М.: Изд.-во Московского ун.-та. 1979. 368 с.
- 3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк.. 1972. 368 с.
- 4. Piven V.F., Aksyukhin A.A., Kvasov A.A., Nicolskii D.N., Frolov M.A.. Research of boundary problems of conjunction of two-dimensional seepage in inhomogeneous layers // Modern approaches to flows in porous media. Intern. Conference dedicated to P.Ya. Polubarinova-Kochina. Moscow, Sept. 1999. P. 92-94.

# ВОПРОСЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ В КЛАССЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Н.В. Лебедева ВТУ, Балашиха

Задачи с отсосом в аэродинамике привели к необходимости рассматривать сингулярные интегральные уравнения на отрезке с  $\delta$  -функцией в правой части. В статье [2] были получены точные решения сингулярного интегрального уравнения на отрезке при наличии  $\delta$  -функции в правой части, предложены численные методы нахождения этих решений и доказана сходимость численных решений к точным. В данной работе приведена численная реализация разработанных численных методов и показана скорость практической сходимости.

С помощью моделирования вихревым слоем [1] задача обтекания тонкого профиля идеальной несжимаемой жидкостью сводится к решению сингулярного интегрального уравнения на отрезке [-1, 1]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(x)dx}{x_0 - x} = f(x_0) \qquad x_0 \in [-1, 1], \tag{1}$$

где  $f(x_0)$  – Гёльдеровская функция степени  $\alpha$ , т.е.  $f(x_0) \in H(\alpha)$  на [-1, 1]. Если на профиле имеется устройство эжектирования внешнего потока (отсос), которое моделируется стоком в точке  $q, q \in (-1, 1)$ , то при выполнении граничного условия непротекания профиля на его стороне, противоположной размещению отсоса, в правой части уравнения (1) появляется [3] дельта функция с носителем в точке q, т.е. функция

$$f_{\delta,q}(x_0) = Q \cdot \delta(x_0 - q), \qquad x_0, q \in (-1,1),$$
 (2)

где Q - некоторое число.

Функцию  $\delta(x_0 - q)$  будем представлять как предел [2]:

$$\delta(x_0 - q) = \lim_{h \to 0} \delta_h(x_0 - q), \tag{3}$$

$$\delta_{h}(x_{0}-q) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{0} \in \left[q - \frac{h}{2}, q + \frac{h}{2}\right], \\ 0, & x_{0} \notin \left[q - \frac{h}{2}, q + \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$$
(4)

Рассмотрим теперь численное решение уравнения (1) для различных индек- $\cos x = 1$ ; -1; 0 [1] методом дискретных вихрей [1].

Индекс æ=1.

В этом случае решением уравнения (1) [2] является функция: 
$$\gamma(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{Q}{x-q}, \qquad (5)$$

обращающаяся в бесконечность на концах отрезка [-1; 1].

Пусть отрезок [-1,1] разбит множествами  $E=\{x_k\,,\,k=1,\,...\,,\,n\}$  и  $E_0=\{x_{0\,j},\,j=1,\,...\,,\,n-1\}$ , так чтобы точка  $q\in E_0$  и  $q=x_{0\,j_q}$  при любом n.

Численное решение находится из системы:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_{n}(x_{n})h}{x_{0j} - x_{k}} = Q \cdot \delta_{h}(x_{0j} - q), \quad j = 1, \dots, n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{n}(x_{k})h = 0$$
(6)

Расчёты проводились для n=50, 100, 200, 400. На рисунках 1, 2 приведено графическое сравнение точного и приближённого решений при n=50, n=100, Q=1, q=0. Функция  $\gamma(x)$  является нечётной при q=0, поэтому расчётные значения  $\gamma(x_k)$ ,  $\gamma_n(x_k)$  на рис. 1 симметричны относительно нуля.

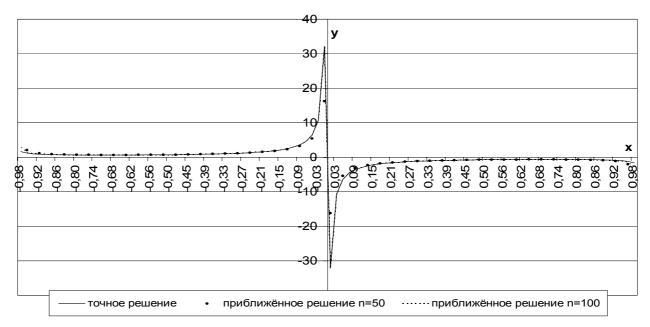


рис.1

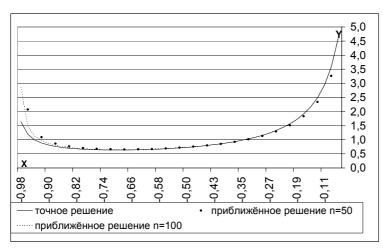


рис. 2

Видно, что при увеличении числа n точек разбиения численное решение сходится к точному. На рис. 2 показаны значения  $\gamma(x_k)$ ,  $\gamma_n(x_k)$  на (-1;0) Наибольшие отклонения от точного решения получены при решении системы (6) для n=50. При n=100 значительные расхождения есть только вблизи концов отрезка [-1,1]. Во всех остальных расчётных точках

значения  $\gamma(x_k)$ ,  $\gamma_n(x_k)$  практически совпадают.

На следующем рисунке (рис.3) построены точное решение и приближённые решения при n=50, n=100, Q=1, q=-0.5.

Для сравнении различных вариантов решения системы (6) был вычислен следующий интегральный показатель:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \left| \gamma_n(x_k) - \gamma(x_k) \right| \right) \cdot h . \tag{7}$$

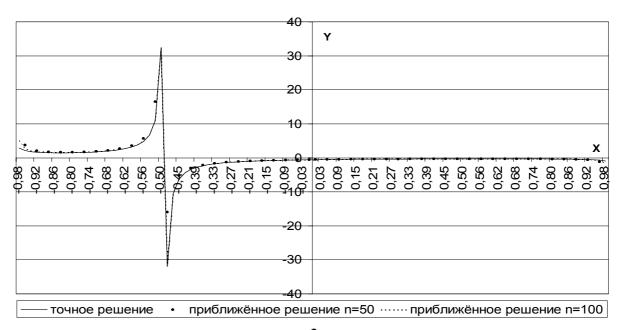


рис. 3

В табл. 1 приводится изменение  $S_n$  в зависимости от изменения n.

#### Таблица 1.

	n=50	n=100	n=200	n=400
q=0	0.11215	0.08332	0.06092	0.04408
q=0.5	0.13405	0.09753	0.07103	0.05126

В табл. 2 приводится изменение  $S_n$  в зависимости от изменения q при n=400. Таблица 2.

q	±0.9	±0.5	±0.3	±0.2	±0.1	0
$S_n$	0.1037	0.0512	0.0463	0.0450	0.0443	0.0440

В результате эксперимента для всех  $x_k \in [-1+\delta; 1-\delta]$ , где  $\delta = 0.03$  установлено, что  $\theta_k = |\gamma_n(x_k) - \gamma(x_k)|$  при q = 0 удовлетворяет следующим неравенствам:

n=50	n=100	n=200	n=400
$9\cdot 10^{-3} \prec \theta_k \prec 8\cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-4} \prec \theta_k \prec 8 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-4} \prec \theta_k \prec 8 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5} \prec \theta_k \prec 8 \cdot 10^{-2}$

Индекс æ = -1.

В [2] показано, что решением уравнения (1) является функция 
$$\gamma(x) = -\frac{Q}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \frac{1}{x-q},$$
 (8)

обращающаяся в нуль на концах отрезка [-1;1].

Для численного решения уравнения (1) с помощью метода дискретных вихрей разобьём отрезок [-1;1] множествами  $E = \{x_k, k = 1, ..., n\}$  и  $E_0 = \{x_{0j}, j = 0, 1, ..., n\}$ , так чтобы точка  $q \in E_0$  и  $q = x_{0j}$  при любом n.

Заменим уравнение (1) следующей системой линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \gamma_{on} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_{n}(x_{k}) \cdot h}{x_{0,j} - x_{k}} = Q \cdot \delta_{h}(x_{0,j} - q), \quad j = 0, 1, ..., n,$$
(9)

где  $\gamma_{0n}$  - регуляризирующая переменная.

На рис. 4 приведено сравнение точного и приближённых решений уравнения (1) для индекса  $\alpha = -1$  при  $\alpha = -1$ 

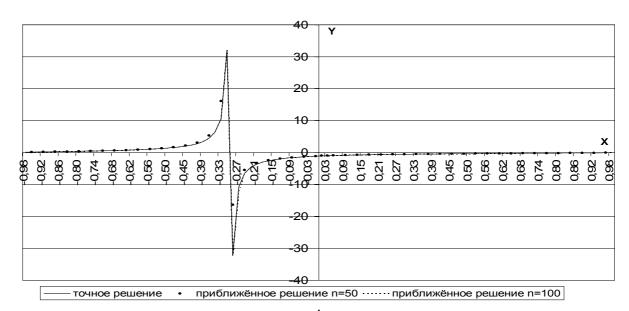


рис. 4

При сравнении различных вариантов решения системы (9) наблюдается следующая закономерность изменения  $S_n$  в зависимости от изменения q при n=400.

Таблица 3.

$\overline{q}$	±0.9	±0.5	±0.3	±0.2	±0.1	0
$S_n$	0.01264	0.00129	0.00085	0.00079	0.00074	0.00073

В результате эксперимента для всех  $x_k \in [-1;1]$  установлено, что  $\theta_k = |\gamma_n(x_k) - \gamma(x_k)|$  при q = 0 удовлетворяет следующим неравенствам:

n=50	n=100	n=200	n=400
$1 \cdot 10^{-4} \prec \theta_k \prec 9 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5} \prec \theta_k \prec 7 \cdot 10^{-3}$	$9\cdot10^{-6} \prec \theta_k \prec 7\cdot10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-6} \prec \theta_k \prec 3 \cdot 10^{-3}$

Индекс  $\alpha = 0$ .

Рассмотрим класс решений, обращающихся в нуль при x=1 для уравнения (1).

В [2] показано, что решением уравнения (1) является функция

$$\gamma(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \cdot \frac{Q}{x-q} \quad x \in (-1;+1)$$

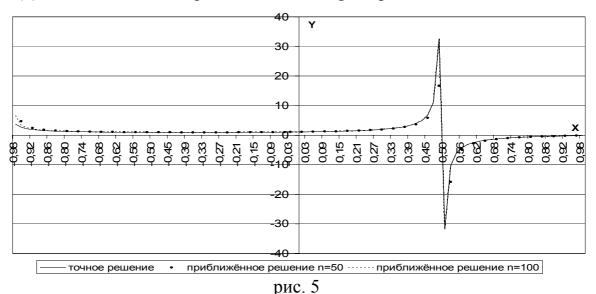
$$\tag{10}$$

В этом случае каноническое разбиение отрезка [-1;1] образуют множества  $E=\{x_k\,,\,k=1,\,...\,,\,n\}$  и  $E_0=\{x_{0j}\,,\,j=1,\,...\,,\,n\},$  так чтобы точка  $q\in E_0$  и  $q=x_{0j}$  при любом n.

Заменим уравнение (1) следующей системой линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_n(x_k)h}{x_{0j} - x_k} = Q \cdot \delta(x_{0j} - q), \quad j = 1, \dots, n$$
 (11)

На рис. 5 приведено сравнение точного и приближённых решений уравнения (1) для индекса  $\alpha = 0$  при  $\alpha = 100$ ,  $\alpha = 100$ ,  $\alpha = 100$ .



Установлена следующая закономерность изменения  $S_n$  в зависимости от q для различных вариантов решения системы (11) при n=400. Таблица 4.

q=-0.9	q=-0.5	q=-0.3	q=0	q=0.3	q=0.5	q=0.9
0.10189	0.05169	0.04708	0.04518	0.04790	0.05357	0.12677

В результате эксперимента для всех  $x_k \in [-1+\delta;1]$ , где  $\delta = 0.03$  установлено, что  $\theta_k = |\gamma_n(x_k) - \gamma(x_k)|$  при q=0 удовлетворяет следующим неравенствам:

n=50	n=100	n=200	n=400
$3\cdot 10^{-3} \prec \theta_k \prec 4\cdot 10^{-1}$	$2\cdot 10^{-3} \prec \theta_k \prec 4\cdot 10^{-1}$	$8\cdot 10^{-4} \prec \theta_k \prec 4\cdot 10^{-1}$	$4\cdot 10^{-4} \prec \theta_k \prec 2\cdot 10^{-1}$

## Литература

- 1. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
- 2. Вайникко Г.М., Лебедева Н.В., Лифанов И.К., Численное решение сингулярного и гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке и дельта-функция, Математический сборник, 2002.
- 3. Вайнико Г.М., Лифанов И.К. Моделирование задач аэродинамики и дифракции волн и расширение интегральных операторов типа Коши на замкнутых и разомкнутых кривых, Дифференциальные уравнения, 2000, т 36, № 9, стр. 1184-1195.

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Е.К. Липачёв

Казанский государственный университет, e-mail: lipachev@ksu.ru

Исследуются краевые задачи для уравнения Гельмгольца на периодической решетке с конечным включением. Доказана классическая разрешимость краевых задач и произведено их сведение к эквивалентным интегральным уравнениям. Предложен и обоснован метод приближенного решения.

Пусть  $\Phi(x)$  — гладкая d - периодическая функция, а  $\Phi^*(x)$  — гладкая функция, определенная на отрезке [-a,a] и удовлетворяющая условиям "согласования":  $\Phi^*(\pm a) = \Phi(\pm a)$  и  $\Phi^*(x) \geq \Phi(x)$  при  $x \in (-a,a)$ . В плоскости  $R^2$  рассмотрим кривую  $\Gamma = \widetilde{\gamma} \cup \gamma^*$ , где  $\widetilde{\gamma} = \{(x,\Phi(x)): x \in R \setminus [-a,a]\}$  и  $\gamma^* = \{(x,\Phi^*(x)): x \in [-a,a]\}$ . Назовем  $\widetilde{\gamma}$  "периодической частью" кривой  $\Gamma$ , а участок  $\gamma^*$  — "включением". Обозначим через S область, расположенную над  $\Gamma$ :

$$S = \{(x, y) : y \ge \Phi(x), x \in R \setminus [-a, a]; y \ge \Phi^*(x), x \in [-a, a]\}.$$

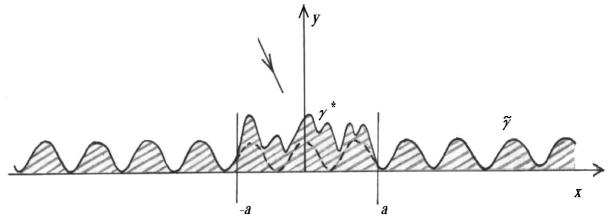


Рис. 1. Геометрия задачи.

Ищется решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x,y) + k^2 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S,$$
 (1)

удовлетворяющее одному из граничных условий

$$u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma$$
 (2)

ИЛИ

$$\partial_{y} u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{3}$$

где f и g — непрерывные функции на  $\Gamma$ , а через  $\partial_{\nu} = \partial_{\nu(x,y)}$  обозначена правильная нормальная производная в точке  $(x,y) \in \Gamma$ . Заметим, что условия (2) и (3) отвечают различным случаям поляризации волны (см., напр., [1]). В

точках  $A = (-a, \Phi(-a))$ ,  $B = (a, \Phi(a))$  соединения периодического участка и включения требуем выполнения условий на ребре [1,2]. Поведение решения на бесконечности подчинено условиям

$$(u - \widetilde{u}) = e^{ikr} O(1/\sqrt{r}),$$

$$\frac{\partial (u - \widetilde{u})}{\partial r} - ik(u - \widetilde{u}) = e^{ikr} o(1/\sqrt{r}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty,$$

где через  $\widetilde{u}$  обозначено решение "вспомогательной" краевой задачи в случае отсутствия включения (т.е.  $\Gamma = \{(x, \Phi(x)) : x \in R\}$ ). Известно (см., напр., [3]), что в классе квазипериодических функций с парциальными условиями излучения "вспомогательная" задача имеет единственное решение.

Исследование краевых задач проведено по схеме, предложенной в работе [4]. Доказано, что при  $\mathrm{Im}\,k \geq 0$ ,  $\mathrm{Re}\,k \neq 0$  краевые задачи имеют не более одного классического решения (теорема единственности). Решение краевых задач ищется в виде суммы решения "вспомогательной" задачи и обобщенного потенциала:

$$u(x,y) = \widetilde{u}(x,y) + w(x,y). \tag{4}$$

Функция w(x, y)в случае краевой задачи с граничным условием (2) имеет вид

$$w(x,y) = \int_{\gamma^*} \partial_{\nu(P)} G_1(M,P) \varphi_E(\tau) ds_P, \quad \varphi_E \in \dot{C}[-a,a]$$
 (5)

И

$$w(x,y) = \int_{\gamma^*} G_2(M,P) \varphi_H(\tau) ds_P, \quad \varphi_H \in \dot{C}[-a,a]$$
 (6)

в случае краевой задачи с условием (3). В формулах (5), (6) использованы обозначения

$$G_m(M,P) = \frac{\pi i}{2} \{ H_0^{(1)}(kr) - (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*) \}, \quad m = 1,2,$$

где 
$$M = (x, y)$$
,  $P = (\tau, \xi)$ ,  $r = \sqrt{(x - \tau)^2 + (y - \xi)^2}$ ,  $r^* = \sqrt{(x - \tau)^2 + (y + \xi)^2}$ , а

через  $H_0^{(1)}(\cdot)$  обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Подстановкой функции (4) в граничные условия (2) и (3), с использованием известных свойств потенциалов, краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям с неизвестными  $\varphi_E$  и  $\varphi_H$ :

$$\varphi_{E/H}(x) - \int_{\gamma^*} K_{E/H}(x, \tau) \varphi_{E/H}(\tau) ds_P = \rho_{E/H}(x), \quad x \in [-a, a]. \quad (7)$$

Проведено исследование ядер интегральных уравнений (7) и доказано, что эти уравнения однозначно разрешимы и эквивалентны исходным краевым задачам.

Приближенное решение уравнения (7) строится в виде

$$\varphi_n(x) = \rho_{E/H}(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} K_{E/H}(x, \tau) d\tau,$$
 (8)

где коэффициенты  $\alpha_k$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_{j} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k} \int_{x_{k-1}}^{x_{k}} K_{E/H}(\bar{x}_{j}, \tau) d\tau = \rho_{E/H}(\bar{x}_{j}), \quad j = 1, ..., n.$$
 (9)

В формулах (8) и (9) использованы обозначения

$$x_k = -a + k \frac{2a}{n}, \quad k = 0, ..., n,$$

$$\overline{x}_j = -a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \frac{2a}{n}, \quad j = 1, ..., n.$$

Приближенные решения краевых задач определяются по формуле (4), в которой функция w(x, y) вычислена по формулам (5) и (6) как потенциал с плотностью  $\varphi_n(x)$ , найденной по формуле (8).

Для обоснования вычислительной схемы (8), (9) использовались результаты работы [5], в которой приведена новая схема обоснования метода Боголюбова-Крылова.

## Литература

- 1. Хенл X., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир. 1964. 428 с.
- 2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "Янус". 1995. 520 с.
- 3. Electromagnetic Theory of Gratings // Ed. by R. Petit. Berlin, New York. 1980. 284 p.
- 4. Липачёв Е.К. Краевые задачи дифракции волн в неограниченных областях: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Казань. 2000. 138 с.
- 5. Габдулхаев Б.Г. Решение операторных и интегральных уравнений методом Боголюбова-Крылова // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 3-18.

# УДК 537.322.9

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ВЕТВИ ТЕРМОЭЛЕМЕНТА

О.И. Марков

Орловский государственный университет

Получено численное решение нелинейной граничной задачи для теплового поля ветви термоэлемента с кинетическими коэффициентами, зависящими от температуры. Рассмотренная задача имеет важное прикладное значение в физике полупроводниковых приборов.

Термоэлектрическое преобразование энергии получило большое распространение в самых различных отраслях современной техники для охлаж-

дения, термостатирования, интенсификации теплообмена и даже нагрева. Основной составляющей таких приборов является термоэлемент. Обычно расчет термоэлемента базируется на анализе теплового баланса, на холодном конце термоэлемента[1].В грубом приближении температурное поле в одномерной адиабатически изолированной ветви термоэлемента с протекающим по ней током описывается стационарным уравнением теплопроводности с постоянными коэффициентами. Для непрерывно распределенных источников в виде джоулева тепла и поглощающегося на одном конце тепла Пельтье и фиксированной температурой на другом график решение граничной задачи имеет вид квадратичной параболы. Оптимизация перепада температуры по току позволяет определить его максимальное значение для адиабатически изолированной ветви

$$\Delta T = \frac{zT_0^2}{2}$$

где z параметр термоэлектрической эффективности полупроводникового материала ветви

$$z = \frac{\alpha^2}{\rho \cdot \chi} ,$$

 $T_0$  -температура холодного конца ветви,  $\alpha$  - дифференциальная термоэдс,  $\rho$  - удельное сопротивление,  $\chi$  - коэффициент теплопроводности.

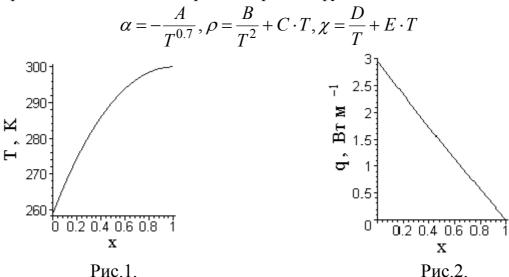
В том случае, когда кинетические коэффициенты являются функциями температуры, обычно используются приближенные методы расчета[2].В простейшем случае используется уже приведенные соотношения, но кинетические коэффициенты (дифференциальная термоэдс, удельное сопротивление и коэффициент теплопроводности) получаются путем усреднения по рабочему интервалу температур. Однако совершенно очевидна недостаточность такого подхода т.к. усреднение определяется только разностью, а не профилем температуры. Впервые численные методы решения дифференциальных уравнений для решения рассматриваемой граничной задачи для кинетических коэффициентов, зависящих от температуры, применили авторы работы [3].Сопоставляя полученное ими решение с решением граничной задачи для постоянных коэффициентов, они обнаружили значительное расхождение. Однако в дальнейшем совершенствование методов расчета термоэлементов пошло по пути уточнения приближенных методов. С нашей точки зрения в настоящее время, когда развитие вычислительной техники и программного обеспечения достигло высокого уровня, более разумно идти по пути численного решения граничной задачи. Поэтому единственно последовательным подходом является решение граничной задачи с параметрами, зависящими от температуры.

$$\frac{d}{dx}\left(\chi(T)\frac{dT}{dx}\right) - \tau(T) \cdot y\frac{dT}{dx} + y^2\rho(T) = 0;$$

$$\chi(T)\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = \alpha(T)\cdot y\cdot T\Big|_{x=0}, \quad T\Big|_{x=1} = T_1,$$

где x - безразмерная переменная  $0 < x < 1, \tau$  -коэффициент Томсона,  $y = \frac{J \cdot l}{S}$  –

приведенный ток [6,7], J-ток, l и S - длина и сечение ветви соответственно. Решение стационарного уравнения теплопроводности с параметрами, зависящими от температуры, как справедливо отмечено в работе [2]содержит большие математические трудности. Целью настоящей работы является численный расчет температурного поля ветви термоэлемента, работающей в оптимальном режиме максимального перепада температуры для конкретных термоэлектрически эффективных веществ. Были выбраны термоэлектрические вещества с наиболее высокой добротностью в области низких температурах—сплавы висмут-сурьма с 12 ат.% сурьмы.[3]С погрешностью, не превышающей 3% в интервале температур 80--300 К температурные зависимости дифференциальной термоэдс, удельного сопротивления и коэффициента теплопроводности можно аппроксимировать функциями:



где постоянные A,B,C,D,Е вычислены методом наименьших квадратов на основании экспериментальных данных. Результаты расчета температурного поля представлены на рисунке 1,теплового потока на рисунке 2.

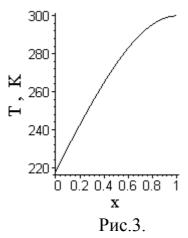
Как видно из них, максимального значения температура достигает на горячем конце ветви, т.е. перегрева ветви нет. Поток меняется почти по линейному закону.

В качестве эффективной р-ветви используются твердые растворы на основе теллуридов висмута [4]. Температурные зависимости дифференциальной термоэдс, удельного электрического сопротивления и коэффициента теплопроводности можно аппроксимировать следующими выражениями

$$\alpha = F \cdot T + G, \rho = H \cdot T^{1.7}, \chi = K / \sqrt{T}$$

где константы F,G,H,К определены с погрешностью до 2% методом наименьших квадратов.

Результаты расчета представлены на рисунках 3 и 4.



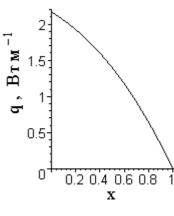


Рис.4

Максимум температуры достигается на горячем конце ветви, но функция теплового потока существенно нелинейна.

## Литература

- 1. Иоффе А.Ф. Полупроводниковые термоэлементы. М.-Л.:АН СССР. 1960. 188 с.
- 2. Термоэлектрические охладители // Под ред. А.Л. Вайнера. М.: Радио и связь, 1983. 176 с.
- 3. Белевцев А.Г., Киреев П.С., Промыслов В.В., Симонов В.А. О переносе энергии в полупроводниковом веществе термоэлемента // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1974. № 5. С. 109-114.
- 4. R. Wolfe and G.E. Smith. Appl. Phys. Letters. v. 1, № 1, 5-7, 1962.
- 5. Гольцман Б.М., Кудинов В.А., Смирнов И.А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе  $Bi_2Te_3$ . М.: Наука. 1972. 320 с.
- 6. Марков О.И. Термоэлектрическая эффективность П-ветви на основе сплавов висмут-сурьма. Орел, 1985. Деп в ВИНИТИ 28.11.85. №8235-В. 6 с.
- 7. Марков О.И. Расчет температурного поля ветвей термоэлемента. Орел. 1984. Деп в ВИНИТИ 29.01.85. №834-855.

## О ВЗАИМОДОПОЛНЯЕМОСТИ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ ТЕОРИЙ

В.И. Нефёдов

Казанская государственная архитектурно-строительная академия, e-mail: a\_nefedov@hotmail.com

На примерах из механики деформируемого твёрдого тела показывается взаимодополняемость феноменологических и квантовых теорий, позволяющих давать, соответственно, количественные и качественные описания физических процессов и явлений.

<u>1. Введение.</u> Структурно-феноменологический анализ напряженнодеформированного состояния тел, представляющий собой объединение противоположных подходов (квантового и классического), позволяет найти решения накопившихся в механике деформируемого твердого тела проблем и дать оценку погрешностей, обусловленных принятием гипотезы сплошности и вытекающими из неё гипотезами частного назначения (в задачах растяжения, изгиба, кручения, в плоской задаче, в теории пластин и оболочек,...).

Проведенные исследования приводят к выводу о необходимости экспериментальной проверки фундаментальных уравнений, полученных с использованием принципа суперпозиции, поскольку уже при одноосном растяжении обнаруживается упорядоченность атомарной структуры тела [1], приводящая к необъяснимым, с позиций механики сплошной среды, макроскопическим явлениям, характерным для существенно анизотропных тел.

<u>2. Растяжение</u>. В [1] было дано корректное решение трёхмерной задачи теории упругости о растяжении призматического тела (стержня):

$$\sigma_z = \sigma = const, \quad \sigma_x = \sigma_v = -\mu\sigma$$
 (1)

(µ - коэффициент Пуассона), которое, в отличие от классического (некорректного) решения [2, с.288], соответствует экспериментально определяемому деформированному состоянию:

$$\varepsilon_z = \varepsilon = const, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon.$$
 (2)

Наличие поперечных напряжений (1), при свободной от внешних усилий боковой поверхности, объясняется воздействием на "поверхностные" атомы тела "внутренних" атомов. Принципиальная возможность такого воздействия показана на простейшей качественной атомарной модели (рис.1).

При растяжении расстояния между атомами в осевом направлении увеличиваются (возникают растягивающие напряжения), а в поперечных направлениях уменьшаются (возникают поперечные сжимающие напряжения [1]).

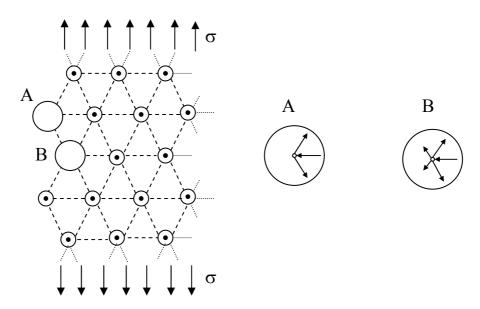


Рис. 1

Что касается растяжения тонких нитей (предел прочности которых значительно больше, чем у "массивных" тел из того же материала), процент осевых (близких к осевым) "межатомных связей" у них, видимо, выше и, со-

ответственно, выше способность "сопротивляться" растяжению. Это свойство можно использовать при изготовлении высокопрочных и жестких материалов и деталей, изготовляя "массивные" детали, работающие на растяжение (изгиб), из материала, представляющего собой "сплав" тонких нитей.

<u>3. Изгиб.</u> Корректное решение задачи изгиба балки запишется в виде (1), где  $\sigma$  определится классическим решением. Деформированное состояние будет определено соотношениями (2), причём  $\varepsilon$ , так же, как и напряжения, будет изменяться линейно по высоте поперечного сечения.

Соответствующие оценки для теории пластин и оболочек очевидны. Отрезок нормали к срединной поверхности (при возможной неизменности его общей длины) деформируется по установленному выше закону; "касательные напряжения", как не имеющие физического смысла, во всех случаях отсутствуют.

- 4. Плоская задача. В соответствии с классической теорией, плита, находящаяся между двумя абсолютно жёсткими плитами и сжимаемая усилиями, параллельными срединной плоскости, не испытывает деформаций в направлении, перпендикулярном направлениям усилий. С позиций структурного анализа, отсутствие "континуальных" деформаций не исключает деформаций "дискретных", обусловленных "уплотнением" атомов (атомных ядер) и изменением (уменьшением) расстояний между ними в определенных направлениях, что и приводит к "напряжениям". Следовательно, не может быть напряжений без деформаций и, в случае "плоского напряженного состояния", деформаций без напряжений. Погрешности двумерной континуальной модели тела будут иметь тот же порядок, что и у соответствующей одномерной модели (п.2).
- 5. Упорядоченность атомарных структур в металлах. Наблюдаемые на (цилиндрической) поверхности растягиваемых стальных образцов линии (линии Чернова-Людерса) интерпретируются в классической теории, как сдвиги, вызываемые касательными напряжениями. Эта интерпретация опирается на решение задачи о растяжении стержня, согласно которому в сечениях, образующих угол 45° с поперечными сечениями, возникают наибольшие касательные напряжения. С учётом особенностей микроструктуры тела. линии Чернова-Людерса можно объяснить способностью "внутренних" атомов "тянуть" за собой атомы "поверхностные" (п.2, рис.1). Наблюдаемость явления - свидетельство его "макроскопичности": образуются группы атомов ("частицы"), перемещающиеся с поверхности внутрь тела, с соблюдением четкой геометрической упорядоченности, присущей, вероятно, структуре металла изначально (до растяжения тела). При этом образуются противоположные ("конкурирующие") направления перемещения частиц (атомов, групп атомов): по (и против) часовой стрелке вокруг оси, с одновременной направленностью вдоль оси (в противоположные, относительно поперечной плоскости симметрии, стороны) и, в то же время, к оси (с противоположных, относительно продольных плоскостей симметрии, сторон). Это обеспечивает "макроскопическое" равномерное сужение - удлинение (расширение -

укорочение) стержня при растяжении (сжатии) в области устойчивого деформирования (до существенного преобладания того или иного "конкурирующего" направления движения, "заложенного в структуру" изначально).

6. Кручение. При кручении (круглых стержней) "растягиваются" "атомарные цепочки", ориентированные к образующим цилиндрической поверхности под некоторыми углами, направление отсчёта которых совпадает с направлением действия крутящего момента, а "цепочки", ориентированные под противоположными углами, "сжимаются". "Стремление" "атомарных цепочек" вернуться в исходное (до нагружения) состояние - "сжаться" и повернуться, "растянуться" и повернуться - уравновешивает крутящий момент. Таким образом, при кручении также возникают только "нормальные напряжения".

## Литература

- 1. Нефёдов В.И. О геометрической некорректности закона Гука. Структурно-феноменологический анализ гипотетически одномерного поля напряжений в металлах // Разработка и исследование металлических и деревянных конструкций. Сборник научных трудов. - Казань: КГАСА, 1999. -С. 66-81.
- 2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.

## ЗАДАЧА О РАСТЕКАНИИ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД

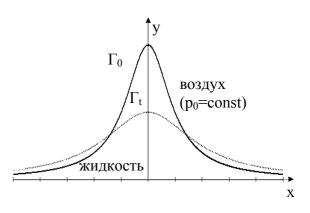
B.A. Нечаев, Н.А. Нечаева Орловский государственный университет e-mail: vn\_glider@mail.ru

Исследуется задача о растекании бугра грунтовых вод. Рассматривается общая постановка задачи, возможные решения в случае плоскопараллельной и осесимметричной фильтрации.

#### 1. Введение

#### 1.1. Постановка задачи

В однородной изотропной среде фильтруется газ (воздух) и однородная жидкость. В начальный момент времени граница жидкости и воздуха задана поверхностью  $\Gamma_0$ . Требуется найти положение границы в момент времени t. Также требуется оценить время растекания — время, в течение которого максимальная высота поверхности раздела составит  $\varepsilon$  от начальной высоты.



## 1.2 Основные уравнения

Фильтрационное течение описываются законом Дарси и уравнением неразрывности [1, 5]:

$$\vec{v} = \frac{k}{\mu} \nabla \varphi , \ \varphi = -(p + \gamma y); \tag{1}$$

$$\nabla \vec{v} = 0. \tag{2}$$

В однородной изотропной среде (k=const,  $\sigma$ =const) и жидкости постоянной вязкости ( $\mu$ =const) из (1) и (2) следует уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0 \tag{3}$$

# 1.3 Дифференциальные уравнения движения

Радиус-вектор произвольной частицы жидкости и скорость фильтрации связаны уравнением:  $\sigma \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r},t)$ , поэтому дифференциальные уравнения движения границы будут иметь вид:

$$\sigma \frac{dx_M}{dt} = v_x(M,t) , \ \sigma \frac{dy_M}{dt} = v_y(M,t) , \sigma \frac{dz_M}{dt} = v_z(M,t) , M \in \Gamma_t.$$
 (4)

#### 1.4 Начальные условия

Уравнения (4) решаются при начальных условиях — в момент времени  $t_0$  известна форма поверхности раздела газа и жидкости:  $y|_{t=0} = y_0(x,z)$ 

#### 1.5 Граничные условия

Пусть  $\Gamma_t$  – граница раздела жидкости и воздуха в момент времени t. Граничным условиям соответствует  $p(M,t)=p_0$ ,  $M \in \Gamma_t$ ,  $p_0$  – давление на поверхности. Его можно, без нарушения общности, положить равным 0. Тогда граничное условие запишется в виде:

$$p(M,t) = 0, M \in \Gamma_t \tag{5}$$

Учитывая (1), условие (5) запишется в виде:

$$\varphi(M,t) + \gamma y_M = 0, \ M \in \Gamma_t. \tag{6}$$

Взяв дифференциал по t, запишем (6) в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_M} \frac{dx_M}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_M} \frac{dy_M}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_M} \frac{dz_M}{dt} + \gamma \frac{dy_M}{dt} = 0.$$
 (7)

Как показано в [3], это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial t} + \frac{\mu}{k\sigma} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{k\gamma}{\mu\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial v_M} = 0$$
 (7')

Так как скорость фильтрации v мала, то слагаемым  $\frac{\mu v^2}{k\sigma}$  можно пре-

небречь. Тогда уравнение (7') примет вид: 
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + C \frac{\partial \varphi}{\partial y_M} = 0$$
,  $M \in \Gamma_t$ , (8)

где 
$$C = \frac{k\gamma}{\mu\sigma} = const$$
 — постоянная, имеющая размерность скорости. (9)

Полагаем, что поверхность  $\Gamma_t$  слабо изогнута,  $y_0$  – малая величина по сравнению с характерным размером задачи ( $y_0 << L_0$ ). Поэтому можно принять, что условие (8) выполняется на неподвижной плоскости  $\Gamma_{\infty}$ : y=0:

#### 2. Решение

Таким образом, нужно найти решение уравнения (3), удовлетворяющего условию (9). Как нетрудно убедиться, это решение имеет вид:

$$\varphi(M,t) = \varphi(x,y,z,t) = \varphi(x,y-ct,z) \tag{10}$$

Значение на  $\Gamma_{\infty}$  равно:

$$\varphi(M,t) = \varphi(x,0,z,t) = \varphi(x,-ct,z) \tag{11}$$

Из (6) имеем уравнение границы

$$\Gamma_t$$
:  $y_M = -\frac{\varphi(M,t)}{\gamma}$ ,  $M \in \Gamma_t$ . (12)

Заменим в (12) потенциал  $\varphi(M,t)$  его значением (11) на  $\Gamma_{\infty}$  и получим приближенное уравнение границы

$$\Gamma_t$$
:  $y_M = -\frac{\varphi(x_M, -ct)}{\gamma}, M \in \Gamma_t$  (13)

Запишем уравнение (13) в безразмерных величинах. Введем безраз-

мерные координаты 
$$\widetilde{x}=\frac{x_M}{L_0}$$
,  $\widetilde{y}=\frac{y_M}{L_0}$ ,  $\widetilde{z}=\frac{z_M}{L_0}$ , время  $\widetilde{t}=\frac{t}{T_0}$ , потенциал  $\widetilde{\varphi}=\frac{\varphi}{\Phi_0}$ 

(характерный размер –  $L_0$ , время –  $T_0$ , потенциал –  $\Phi_0$ , причем  $L_0$ = $CT_0$ ,  $\Phi_0$ = $\gamma L_0$ ). Уравнение (13) в таких обозначениях примет вид:

$$\widetilde{y} = -\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}, -\widetilde{t}, \widetilde{z}), M \in \Gamma_t.$$
 (13')

Для простоты знак «~» будем далее опускать.

Для оценки скорости растекания можно ввести так называемое время растекания — время, за которое высота бугра уменьшится в  $\varepsilon$  раз:

$$y(0,T) = \varepsilon y(0,0). \tag{14}$$

Решая уравнение (14), можно вычислить время растекания. Для расчетов будем брать  $\varepsilon$ =0,1.

#### 3. Плоскопараллельная задача

Как показано выше, движение границы раздела можно моделировать движением особых точек потенциала φ. Можно поставить обратную задачу – рассматривать различные решения уравнения Лапласа, при этом начальные условия будут определяться выбранным потенциалом. В плоскопараллельной задаче в качестве простейших решений можно взять источник, сток, вихрь и диполь, и при помощи них моделировать движение границы.

## 3.1. Моделирование растекания бугра при помощи источника и стока

Также течение можно моделировать источником и стоком равной мощности, расположенных на безразмерном расстоянии h, и перемещающихся вдоль оси Oy. Потенциал такого течения выглядит так:

$$\varphi(x,y,t) = \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{x^2 + (y - (1+t))^2} - \ln \sqrt{x^2 + (y - (1+h+t))^2} \right] = \frac{Q}{4\pi} \ln \left[ \frac{x^2 + (y - (1+t))^2}{x^2 + (y - (1+h+t))^2} \right]$$

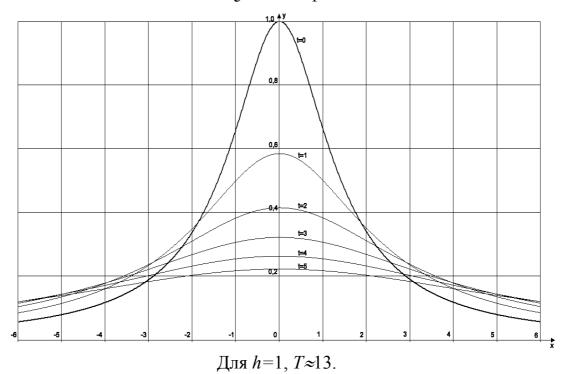
и уравнение границы (13) имеет вид:  $y = -\frac{Q}{4\pi} \ln \left[ \frac{x^2 + (1+t)^2}{x^2 + (1+h+t)^2} \right].$ 

Рассчитаем необходимую мощность Q: в момент t=0

$$-\frac{Q}{4\pi} \ln \left[ \frac{x^2 + (1+t)^2}{x^2 + (1+h+t)^2} \right] = -\frac{Q}{4\pi} \ln \left[ \frac{1}{(1+h)^2} \right] = -\frac{Q}{4\pi} \left( \ln(1) - \ln(1+h)^2 \right) = \frac{Q}{4\pi} \ln \left[ (1+h)^2 \right] = 1.$$

Отсюда 
$$Q = \frac{4\pi}{\ln[(1+h)^2]} = \frac{2\pi}{\ln(1+h)}$$
.

Оценим время растекания: 
$$-\frac{Q}{4\pi}\ln\left[\frac{x^2+(1+T)^2}{x^2+(1+h+T)^2}\right] = -\frac{\ln\left[\frac{1+T}{1+h+T}\right]}{\ln(1+h)} = \frac{\ln\left[1+\frac{h}{1+T}\right]}{\ln(1+h)} = \varepsilon$$
 Отсюда 
$$1+\frac{h}{1+T} = e^{\varepsilon\ln(1+h)} \text{ и } T = \frac{h}{e^{\varepsilon\ln(1+h)}-1} - 1.$$



3.2. Моделирование растекания бугра при помощи вихрей противоположной интенсивности

Также это течение можно моделировать двумя вихрями с равной и противоположной по знаку циркуляцией, расположенными на уровне  $y_0 = 1 + t$ , и расположенных на расстоянии d друг от друга по разные стороны бугра.

Потенциал течения имеет вид: 
$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ arctg \left( \frac{y - (1+t)}{x - d/2} \right) - arctg \left( \frac{y - (1+t)}{x + d/2} \right) \right]$$
 и урав-

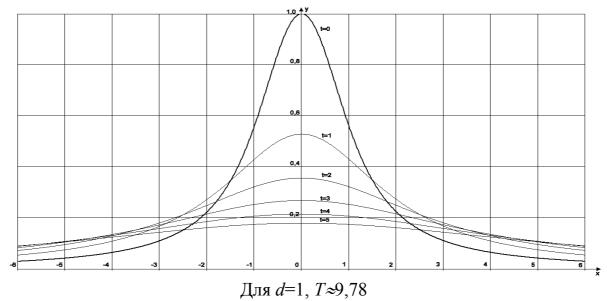
нение границы 
$$y = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ arctg \left( \frac{x - d/2}{1 + t} \right) - arctg \left( \frac{x + d/2}{1 + t} \right) \right]$$
. Рассчитаем интен-

$$-\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{x-d/2}{1+t}\right)-\arctan\left(\frac{x+d/2}{1+t}\right)\right] = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\arctan\left(-d/2\right)-\arctan\left(d/2\right)\right] = \frac{\Gamma}{\pi}\arctan\left(d/2\right) = 1,$$

следовательно 
$$\Gamma = \frac{\pi}{arctg(d/2)}$$
.

Оценим время растекания:

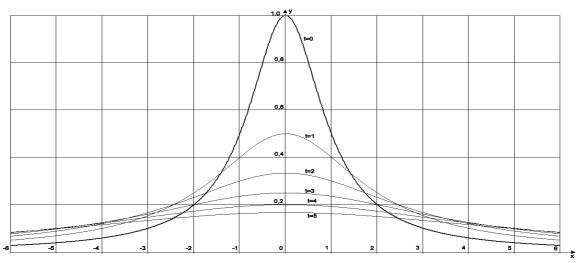
$$\varepsilon = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ arctg \left( \frac{-d/2}{1+T} \right) - arctg \left( \frac{d/2}{1+T} \right) \right] = \frac{\Gamma}{\pi} arctg \frac{d/2}{1+T} = \frac{arctg}{arctg (d/2)},$$
 отсюда  $T = \frac{d/2}{tg \left[ \varepsilon arctg (d/2) \right]}$ 



3.3. Моделирование растекания бугра при помощи диполя

Этот случай можно рассматривать как предельный для двух, рассмотренных выше. Он рассмотрен в работе [3].

Можно показать, что для диполя время растекания T=9. Если в вышеприведенных примерах устремить h или d к нулю, то получим, что T будет стремиться к 9.



4. Осесимметричная задача

Как показано в [2], осесимметричные фильтрационные задачи удобно решать с помощью обобщенных аналитических функций. Для осесимметричных течений также существуют простейшие потенциалы – источник, сток, диполь, кольцевой вихрь.

4.1. Моделирование растекания бугра при помощи точечного источника и стока

Поступим аналогично плоскопараллельному случаю. Поместим на оси симметрии источник – в точку  $y_0$ =1+t, а сток – в точку 1+h+t. Потенциал течения запишется таким образом:

$$\varphi(x,y,t) = -\frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(y-1-t)^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y-h-1-t)^2 + x^2}} \right).$$

Уравнение границы в безразмерных координатах (13) примет вид:

$$y = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h+1+t)^2 + x^2}} \right).$$

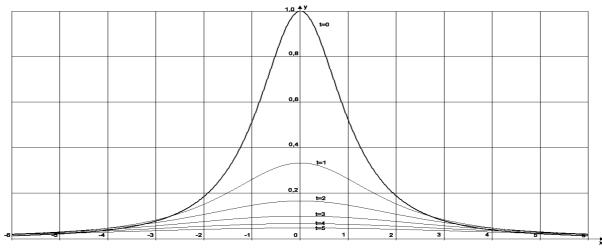
Рассчитаем необходимую мощность Q: в момент t=0:

$$\frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h+1+t)^2 + x^2}} \right) = \frac{Q}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{h+1} \right) = 1, \text{ следовательно } Q = \frac{4\pi(h+1)}{h}$$

Оценим время растекания:

$$\varepsilon = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+T)^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h+1+T)^2 + x^2}} \right) = \frac{h+1}{h} \left( \frac{1}{1+T} - \frac{1}{1+T+h} \right) = \frac{h+1}{t^2 + (h+2)t + 1}$$

Отсюда $_{t^2} + (h+2)t + 1 - \frac{h+1}{\varepsilon} = 0$ . Решив уравнение, получим  $_{T=-\frac{h}{2}-1} + \sqrt{\left(\frac{h}{2}+1\right)^2 - 1 + \frac{h+1}{\varepsilon}}$ .



Для h=1 T≈3,11.

4.2. Моделирование растекания бугра при помощи кольцевого вихря Моделируем потенциал осесимметричного течения при помощи потенциала кольцевого вихря, расположенного в точке  $y_0$ =1+t, и имеющего радиус а. В работе [4] приводится вид потенциала такого вихря:

$$\varphi_{1} = -\frac{\Gamma a(y-1-t)}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a-x\cos 2\theta)d\theta}{(a^{2}+x^{2}-2ax\cos 2\theta)\sqrt{(y-1-t)^{2}+a^{2}+x^{2}-2ax\cos 2\theta}}, ecnu \ x > a$$

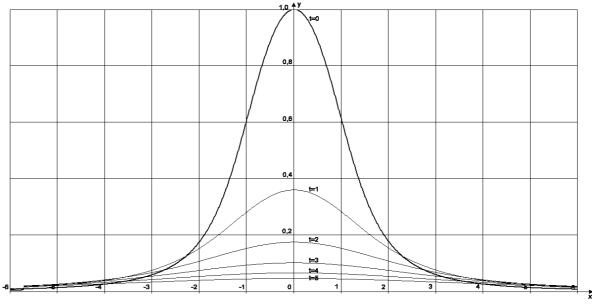
$$\varphi(x,y,t) = \begin{cases} \varphi_{1} - \frac{\Gamma}{4}, ecnu \ x = a \\ \varphi_{1} - \frac{\Gamma}{2}, ecnu \ x < a \end{cases}$$

Из формулы (13') найдем уравнение границы:  $y(x,t)=-\varphi(x,0,t)$ .  $\Gamma$  найдем из условия y(0,0)=1:  $\Gamma=\frac{1}{y|_{\Gamma=1}(0,0)}$ .

Максимальную высоту бугра в произвольный момент времени можно вычислить аналитически как функцию а и t:

$$y(0,t) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}} \left( 1 - \frac{1 + t}{\sqrt{1 + 2t + t^2 + a^2}} \right)$$

Уравнение для времени растекания будет иметь вид:  $y(0,T) = \varepsilon$ 



Для a=1,  $T\approx3.04$ .

4.2. Моделирование растекания бугра при помощи точечного диполя Как предельный случай, можно моделировать течение осесимметрич- $M \qquad v - (1+t)$ 

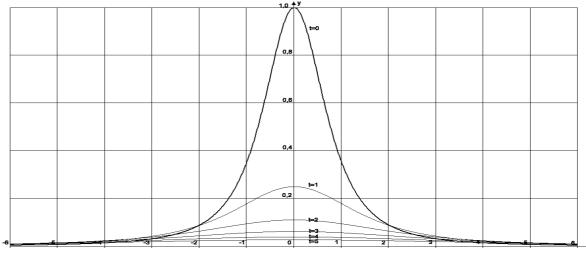
ным диполем: 
$$\varphi = \frac{M}{4\pi} \frac{y - (1+t)}{\left[x^2 + (y - (1+t))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
.

Уравнение границы (13) примет вид:  $y = \frac{M}{4\pi} \frac{1+t}{\left[x^2 + (1+t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ . Рассчитаем

момент диполя: в момент t=0,  $\frac{M}{4\pi} \frac{1+t}{\left[x^2+(1+t)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{4\pi} = 1$ . Следовательно  $M=4\pi$ .

Оценим время растекания:

$$\frac{1+T}{\left(1+T
ight)^3}=arepsilon$$
 , отсюда  $T=y_0igg(rac{1}{\sqrt{arepsilon}}-1igg).$ 



Для  $\varepsilon$ =0,1, T≈2,16.

#### 5. Заключение

Вышеуказанный способ моделирования и расчета процесса растекания бугра грунтовых вод очень прост, и в то же время дает достаточно точные результаты. Применяя один из вышеуказанных способов моделирования, и варьируя параметры, можно максимально приблизить расчетную форму бугра к реальной. Этот способ может применяться для оценки параметров реальных процессов, например полива растений. К примеру, в вышеуказанных моделях была произведена оценка времени растекания бугра, и было выяснено, что в плоскопараллельном случае, например, при поливе протяженной полосой, растекание происходит медленнее, чем в осесимметричном — при точечном поливе. Также этот метод может использоваться для проверки более сложных моделей.

## Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1971. 368 с.
- 2. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел, ОГУ, 1994. 148 с.
- 3. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк.. 1983. 160 с.
- 4. Аубакиров Т.О.,. Белоцерковский С.М,. Желанников А.И, Ништ М.И. «Нелинейная теория крыла и ее приложения». Алматы, Изд-во «Гылым». 1997. 448 с.
- 5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

#### УДК 532.546

# ЗАДАЧА ОБ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ И ВЯЗКОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ <sup>1)</sup>

В.Ф. Пивень

Орловский государственный университет

Ставится трехмерная (двумерная) задача об эволюции в неоднородной среде (слое) границы раздела двух жидкостей, у которых плотности и вязкости различны. Исследование этой задачи сводится к решению системы интегрального и дифференциального уравнений при начальных условиях.

1. Течение несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$  в недеформируемой, неоднородной среде проницаемости K характеризуется давлением p и скоростью фильтрации  $\vec{v}$ , которые определяются обобщенным законом Дарси и уравнением неразрывности [1]:

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00063).

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{K}{\mu} (\rho \vec{F} - \nabla p), \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $\vec{F}$  — массовая сила, действующая на единицу массы жидкости. В случае однородного поля силы тяжести, направление ускорения  $\vec{g} = \overset{\frown}{\text{const}}$  которого задается ортом  $\vec{e}_g = \frac{\vec{g}}{g}$ , имеем

$$\rho \vec{F} = \nabla (\rho g \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M), \qquad (1.3)$$

где  $\vec{r}_{M}$  – радиус-вектор точки M области D течения.

Скорость фильтрации  $\vec{\mathbf{v}}$  и физическая скорость  $\frac{d\vec{r}_M}{dt}$  взаимосвязаны равенством [1]

$$m\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{\mathbf{v}}$$
 (*m* - пористость). (1.4)

Введем характерные величины: длину  $L_0$ , скорость  $V_0$ , время  $T_0$ , давление  $P_0$ , плотность  $\rho_0$  и вязкость  $\mu_0$  жидкости, коэффициент проницаемости среды  $K_0$ . Полагаем, что между ними выполняются соотношения

$$P_0 = \rho_0 g L_0$$
,  $\frac{K_0 \rho_0 g}{\mu_0 V_0} = 1$ ,  $\frac{mL_0}{T_0 V_0} = 1$ .

Тогда в безразмерных величинах  $\vec{r}_M' = \frac{\vec{r}_M}{L_0}$ ,  $\vec{\mathbf{v}}_M' = \frac{\vec{\mathbf{v}}_M}{V_0}$ ,  $t' = \frac{t}{T_0}$ ,

 $p' = \frac{p}{P_0}$ ,  $\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$ ,  $K' = \frac{K}{K_0}$  закон Дарси (1.1) с учетом (1.3) и соот-

ношения (1.4) примут вид (штрихи над величинами опущены)

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{K}{\mu} \nabla \phi \qquad (\phi = \rho \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M - p), \tag{1.5}$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{\mathbf{v}}\,,\tag{1.6}$$

а уравнение (1.2) сохранит свою форму.

Из (1.5) следует, что в случае неоднородной среды ( K=K(M) ) поле скоростей  $\vec{\mathbf{v}}$  не потенциально (  $\nabla \times \vec{\mathbf{v}} \neq 0$  ), но потенциально поле приведенной скорости  $\frac{\vec{\mathbf{v}}}{K}$  ( $\nabla \times \frac{\vec{\mathbf{v}}}{K} = 0$ ). Поэтому  $\phi$  назовем квазипотенциалом скорости течения.

Квазипотенциал  $\phi$  и скорость  $\vec{v}$  могут изменяться со временем.

**2**. Поставим задачу об эволюции (движении) границы  $\Gamma_t$  раздела двух жидкостей с различными плотностями, вязкостями  $\rho_1$ ,  $\mu_1$  и  $\rho_2$ ,  $\mu_2$ , которые занимают части  $D_1$  и  $D_2$  области D течения. Фильтрацию этих жидкостей описывают квазипотенциалы  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , каждый из которых как функция ко-

ординат точки M и времени t удовлетворяет в трехмерном ( n=3 ) и двумерном ( n=2 ) случаях следующему из (1.2), (1.5) уравнению

$$\nabla_{M} \cdot [A(M)\nabla_{M} \varphi(M,t)] = 0, M \in D \setminus \Sigma \ (\Sigma = \Gamma_{t} \cup \sigma_{0}) \ . \tag{2.1}$$

Здесь 
$$A(M) = \begin{cases} K(M), n = 3, \\ P(M), n = 2, P(M) = K(M)H(M) - \text{проводимо сть слоя} \end{cases}$$

с плоским основанием, который предполагается тонким (толщина H(M) слоя мала по сравнению с характерным размером); орт силы тяжести  $\vec{e}_g$  параллелен основанию слоя.  $\sigma_0$  — сингулярная граница, на которой коэффициент проницаемости K(M) (в двумерном случае проводимость P(M)) обращается в ноль или бесконечность.

Согласно (1.5) имеем на границе  $\Gamma_t$  условия непрерывности давления и расхода жидкости для квазипотенциала

$$\varphi_1^+(M,t) - \varphi_2^-(M,t) = (\rho_1 - \rho_2)\vec{e}_g \cdot \vec{r}_M, 
\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial \varphi_1(M,t)}{\partial n_M} \right)^+ - \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\partial \varphi_2(M,t)}{\partial n_M} \right)^- = 0, \quad M \in \Gamma_t, \tag{2.2}$$

где "+" и "–" обозначают предельные значения соответствующих функций при подходе из областей  $D_1$  и  $D_2$  (орт  $\vec{n}$  нормали направлен внутрь области  $D_1$ ).

На сингулярной границе  $\sigma_0$  выполняются условия непротекания ( $\sigma_0$  - граница сброса жидкости) либо постоянство квазипотенциала ( $\sigma_0$  - граница водоема покоящейся жидкости):

$$A(M)\frac{\partial \varphi_{\nu}(M,t)}{\partial n_M}=0$$
 либо  $\varphi_{\nu}(M,t)=\mathrm{const},\ \nu=1$  и (или)  $2,\ M\in\sigma_0(2.3)$ 

Полагаем, что заданы источники (стоки) течения, которые моделируются особыми точками квазипотенциала  $\varphi_0(M,t)$ , описывающего течение в отсутствие границы  $\Gamma_t$  ( $\rho_1=\rho_2=1$ ,  $\mu_1=\mu_2=1$ ) и удовлетворяющего условию (2.3). Учтем эти источники (стоки) и представим квазипотенциалы течений в виде [2]

$$\varphi_{\nu} = \mu_{\nu} [\varphi_0(M, t) + \varphi_*(M, t)], \ \nu = 1, 2,$$
 (2.4)

где  $\phi_*(M,t)$  - квазипотенциал возмущений, обусловленных границей  $\Gamma_t$ .

Учитывая (2.4), условия (2.2), (2.3) запишем для  $\phi_*(M,t)$ :

$$(1-\lambda)\phi_*^+(M,t) - (1+\lambda)\phi_*^-(M,t) = 2\lambda\phi_0(M,t) + \alpha \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M$$
 
$$\left(\frac{\partial\phi_*(M,t)}{\partial n_M}\right)^+ - \left(\frac{\partial\phi_*(M,t)}{\partial n_M}\right)^- = 0 \left(\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \alpha = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_1 + \mu_2}\right), M \in \Gamma_t$$
 (2.5) 
$$A(M)\frac{\partial\phi_*(M,t)}{\partial n_M} = 0 \text{ либо } \phi_*(M,t) = 0, M \in \sigma_0.$$
 (2.6)

Если область D содержит бесконечно-удаленную точку, то для единственности решения задачи эволюции потребуем выполнения условия [3]

$$\phi_*(M,t) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \quad K(M)|\nabla\phi_*(M,t)| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right), \quad \text{при } r_{MN} \to \infty, \qquad (2.7)$$

где  $r_{MN}$  – расстояние между точками M и N ( $M \notin \Gamma_t, N \in \Gamma_t$ ).

В случае поршневой модели дифференциальное уравнение движения границы  $\Gamma_t$  имеет вид [2]:

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = K(M) \left[ \nabla \varphi_{0}(M, t) + \frac{(\nabla \varphi_{*}(M, t))^{+} + (\nabla \varphi_{*}(M, t))^{-}}{2} \right], M \in \Gamma_{t}. \quad (2.8)$$

Оно определяет в любой момент времени параметрическое уравнение границы  $\Gamma_t$ :  $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t,\omega)$  ( $\omega$  - параметр) по заданной ее первоначальной конфигурации  $\Gamma_0$  (начальному условию):

при 
$$t = 0$$
,  $\vec{r}_0 = \vec{r}_M(0, \omega)$ ,  $M \in \Gamma_0$ . (2.9)

Таким образом, задача об эволюции границы  $\Gamma_t$  состоит в том, чтобы по заданным источникам (стокам) течения жидкостей в среде, характеризуемом коэффициентом A(M), и условию (2.9) определить ее положение в моменты времени t>0.

Чтобы решить эту задачу необходимо найти в каждый момент времени квазипотенциал  $\phi_*(M,t)$ , удовлетворяющий уравнению (2.1) и условиям (2.5), (2.6), и координаты  $\vec{r}_M$  границы  $\Gamma_t$  как решение уравнения (2.8) при условии (2.9).

3. Следуя [2,4],  $\phi_*(M,t)$  ищем в виде потенциала двойного слоя, распределенного с плотностью g(N,t) на границе  $\Gamma_t$ :

$$\varphi_*(M,t) = \int_{\Gamma_t} g(N,t) A(N) \frac{\partial \Phi_1(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N , M \in D_v, v = 1, 2.$$
 (3.1)

Здесь  $\Phi_1(M,N)$  - фундаментальное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию (2.6) и представляющее собой сток единичной мощности.

Квазипотенциал (3.1) удовлетворяет уравнению (2.1), второму из условий (2.5) и условиям (2.6), (2.7). Удовлетворим его первому из условий (2.5). Моделируем границу  $\Gamma_t$  поверхностью (в двумерном случае - кривой) Ляпунова и согласно [4] непрерывно продолжим (3.1) на эту границу, получим

$$\varphi_*^{\pm}(M,t) = \int_{\Gamma_t} g(N,t) A(N) \frac{\partial \Phi_1(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N \pm \frac{g(M,t)}{2}.$$
 (3.2)

Учитывая (3.2), согласно первому из условий (2.5) имеем относительно g(M,t) неоднородное интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма:

$$g(M,t) - 2\lambda \int_{\Gamma_t} g(N,t) A(N) \frac{\partial \Phi_1(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N =$$

$$= 2\lambda \Phi_0(M,t) + \alpha \vec{e}_\sigma \cdot \vec{r}_M, \quad M \in \Gamma_t.$$
(3.3)

Чтобы записать уравнение (2.8) с учетом (3.1), необходимо знать предельные значения  $(\nabla \phi_*(M,t))^{\pm}$ , вид которых в двумерном и трехмерном случаях различен. Для двумерных течений в слое проводимости P(M) (A(M) = P(M)) скорость возмущений  $\vec{\mathbf{v}}_*(M,t) = K(M)\nabla \phi_*(M,t)$  на границе  $\Gamma_t$ , моделируемой кривой Ляпунова, принимает предельные значения [2]

$$\vec{\mathbf{v}}_{*}^{\pm}(M,t) = K(M) (\nabla \varphi_{*}(M,t))^{\pm} =$$

$$= \int_{\Gamma_{t}} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_{N}} \vec{\mathbf{V}}_{B}(M,N) dl_{N} \pm \frac{K(M)}{2} \frac{\partial g(M,t)}{\partial l_{M}} \vec{\tau}_{M}, \quad M \in \Gamma_{t}.$$
(3.4)

Здесь  $\vec{\mathrm{V}}_B(M,N)$  - скорость вихря:

$$\vec{\nabla}_{B}(M,N) = K(M)\nabla_{M}\Phi_{2}(M,N) = \frac{1}{H(M)} \left[ \frac{\partial \Psi_{2}(M,N)}{\partial y_{M}} \vec{i} - \frac{\partial \Psi_{2}(M,N)}{\partial x_{M}} \vec{j} \right], \tag{3.5}$$

 $\Phi_2(M,N)$  и  $\Psi_2(M,N)$  - квазипотенциал и функция тока вихря интенсивности -1. В этом случае с учетом (3.4) уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = K(M)\nabla\varphi_{0}(M,t) + \int_{\Gamma_{t}} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_{N}} \vec{V}_{B}(M,N)dl_{N}, M \in \Gamma_{t}.$$
 (3.6)

В случае трехмерной фильтрации в однородной среде  $(A(M) = K(M) = 1, \Phi_1(M, N) = \frac{1}{4\pi r_{MN}})$  предельные значения  $(\nabla \phi_*(M, t))^{\pm}$  находим согласно формулы (5.1.19) [5]:

$$(\nabla \varphi_{*}(M,t))^{\pm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{t}} \left[ \vec{B}_{1} \frac{\partial g(N,t)}{\partial \tau_{1N}} + \vec{B}_{2} \frac{\partial g(N,t)}{\partial \tau_{2N}} \right] d\sigma_{N} \pm \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g(M,t)}{\partial \tau_{1M}} \vec{\tau}_{1M} + \frac{\partial g(M,t)}{\partial \tau_{2M}} \vec{\tau}_{2M} \right], \qquad M \in \Gamma_{t},$$

$$(3.7)$$

где  $\vec{B}_k = [\vec{\tau}_k(\vec{n}_N, \vec{r}_{NM}) - \vec{n}_N(\vec{\tau}_k, \vec{r}_{NM})]r_{NM}^{-3}$ , k = 1, 2.

В этом случае при учете (3.7) уравнение (2.8) запишем

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = \nabla \varphi_{0}(M, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{t}} \left[ \vec{B}_{1} \frac{\partial g(N, t)}{\partial \tau_{1N}} + \vec{B}_{2} \frac{\partial g(N, t)}{\partial \tau_{2N}} \right] d\sigma_{N}, \ M \in \Gamma_{t}.$$
 (3.8)

Таким образом, исследование задачи об эволюции границы  $\Gamma_t$  сводится к решению системы уравнений (3.3) (при A(M) = P(M)), (3.6) в двумер-

ном случае и (3.3) (при  $A(M) = 1, \Phi_1(M, N) = \frac{1}{4\pi r_{MN}}$ ), (3.8) в трехмерном случае при начальных условиях (2.9).

Случай двумерной задачи об эволюции границы  $\Gamma_t$ , когда различие плотностей жидкостей можно не учитывать ( $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\alpha = 0$ ), исследован в [2].

#### Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк. 1972. 368 с.
- 2. Пивень В.Ф. Интегральные и дифференциальные уравнения двумерной работе системы скважин неоднородном задачи нестационарной границей жидкостей Труды слое раздела // Международного симпозиума "МДОЗМФ-2001". Херсон. 2001. C. 270-275.
- 3. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // Там же. С. 265-269.
- 4. Пивень В.Ф. Интегральное уравнение граничной задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородной среде // Труды IX Международного симпозиума "МДОЗМФ-2000". Орел. 2000. С. 343-348.
- 5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "Янус". 1995. 520 с.

# ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ШЛЕЙФА ВЫМЫВАЕМОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ<sup>1)</sup>

В.Ф. Пивень, А.А. Квасов Орловский государственный университет

Ставится двумерная фильтрационная задача об определении шлейфа вымываемого загрязнения. Для границы загрязнения, моделируемой кривой класса Ляпунова, исследование этой задачи сводится к решению задачи сопряжения для комплексного потенциала. Эта задача решается численно на основе метода дискретных особенностей.

1. Подземные воды издавна используются человечеством как источники питьевой воды. В связи с этим, необходимо осуществлять надёжную их охрану от загрязнений. Источниками загрязнения могут являться хранилища промстоков, участки складирования ресурсов нефтяной, газовой и химической промышленности, районы техногенных катастроф и чрезвычайных происшествий. Наличие в грунте очагов загрязнения существенно влияет на процесс фильтрации и на работу водозаборов, призванных добывать чистую (отвечающую определённым требованиям по качеству) воду.

 $<sup>^{1)}</sup>$  Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00063).

Полагаем, что область фильтрации D состоит из чистой области  $D_1$  и области  $D_2$ , занимаемой очагом загрязнения. Обозначим через  $P_1$  и  $P_2$  проводимости в областях  $D_1$  и  $D_2$  тонкого слоя, имеющего плоское основание. На границе L сопряжения областей  $D_1$  и  $D_2$  проводимость слоя терпит разрыв:  $P_\nu(z) = k_\nu P(z)$ , обусловленный изменением коэффициентов проницаемости:  $K_\nu(z) = k_\nu K(z)$  ( $k_\nu$  — постоянные,  $\nu = 1$ , 2, P = KH > 0, H — толщина слоя). Протекая через область  $D_2$ , жидкость загрязняется. Полагаем, что жидкость в областях  $D_1$  и  $D_2$  обладает одними и теми же механическими свойствами (вязкостью, плотностью).

Следуя [1], в безразмерных величинах течение в областях  $D_1$  и  $D_2$  опишем комплексными потенциалами

$$W_{\nu} = k_{\nu} \varphi_{\nu} + i \frac{\psi_{\nu}}{P}, \qquad \nu = 1, 2,$$
 (1.1)

каждый из которых удовлетворяет уравнению [2]

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \overline{z}} + A(z) \left[ W(z) - \overline{W}(z) \right] = 0, \tag{1.2}$$

где  $A(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \ln \sqrt{P(z)}$ ,  $2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ , x y — декартовы координаты, вы-

бранные в основании слоя.

На границе L для комплексных потенциалов  $W_1$  и  $W_2$  выполняется условие [2]

$$(1 - \lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda \overline{W}_2^-(z), \quad z \in L, \tag{1.3}$$

где  $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ , знаками «+» и «-», обозначены предельные значения соот-

ветствующих функций при подходе к L из области  $D_1$  и  $D_2$  (орт нормали к L направлен в область  $D_1$ ).

Область фильтрации может быть ограничена сингулярной линией  $L_0$ , на которой проводимость обращается в ноль либо бесконечность. Тогда, на  $L_0$  имеют место условия

$$P(z)\frac{\partial \varphi_{\nu}(z)}{\partial n} = 0$$
, либо  $\varphi_{\nu}(z) = const$ ,  $\nu = 1$  и (или) 2,  $z \in L_0$ . (1.4)

Таким образом, решение задачи состоит в отыскании комплексных потенциалов  $W_{\nu}$ , удовлетворяющих в областях  $D_{\nu}$ , ( $\nu$ = 1, 2) уравнению (1.2) и условиям (1.3), (1.4).

Если область течения D содержит бесконечно удалённую точку, то для единственности решения этой задачи необходимо задать условие в бесконечности.

Пусть фильтрационное течение обусловлено поступательным потоком и работой водозабора, представляющего собой совершенную скважину суммарного дебита  $\Pi$ . Работу водозабора моделируем стоком, расположенным в точке  $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$  плоскости xOy и обладающим мощностью  $q = \Pi/P(z_0)$ .

Пусть комплексный потенциал

$$W_0(z) = \varphi_0(z) + i \frac{\psi_0(z)}{P(z)}$$
 (1.5)

описывает течение в слое в отсутствии границы L ( $k_1 = k_2 = 1$ ). Полагаем, что его действительная часть  $\varphi_0(z)$  удовлетворяет условию (1.4). Комплексный потенциал (1.5) представим в виде:

$$W_0(z) = \mathcal{G}(z) + q\mathcal{F}(z, z_0). \tag{1.6}$$

Здесь функция  $\mathcal{G}(z)$  имеет в бесконечности особую точку и описывает поступательный поток со скоростью u,  $\mathcal{F}(z,z_0)$  — функция, описывающая течение к стоку единичной мощности, расположенному в точке  $z_0$  и имеющая в этой точке особенность логарифмического типа.

Учтём течение, описываемое комплексным потенциалом (1.6) и комплексные потенциалы  $W_{\nu}(z)$  представим в виде

$$W_{\nu}(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad \nu = 1, 2,$$
 (1.7)

где  $W_* = \varphi_* + i \frac{\psi_*}{P}$  — комплексный потенциал возмущений, вызванных наличием границы L.

Сформулируем задачу для комплексного потенциала возмущения  $W_*(z)$ . Условия (1.3) и (1.4), с учётом (1.7), принимают вид:

$$(1 - \lambda)W_*^+(z) = W_*^-(z) + \lambda \overline{W}_*^-(z) + \lambda [W_0(z) + \overline{W}_0(z)], \quad z \in L,$$
(1.8)

$$P(z)\frac{\partial \varphi_*(z)}{\partial n} = 0$$
, либо  $\varphi_*(z) = 0$ ,  $z \in L_0$ . (1.9)

Если область  $D_2$  очага загрязнения ограничена, то, согласно [3], имеем условие в бесконечности:

$$\varphi_*(z) = O(|z|^{-1}), K(z)|\nabla \varphi_*(z)| = O(|z|^{-2})$$
 при  $|z - \zeta| \to \infty$ ,  $\zeta \in L$ . (1.10)

Таким образом, необходимо найти потенциал  $W_*(z)$ , удовлетворяющий уравнению (1.2) и условиям (1.8), (1.9), (1.10).

**2.** В случае канонических границ L решение этой задачи можно получить в конечном виде методами теории обобщённых аналитических функций. При моделировании L кривой класса Ляпунова, следуя [2], ищем  $W_*(z)$  в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределённого с плотностью  $g(\zeta)$  ( $g(\zeta)$  — вещественная функция) на границе L:

$$W_*(z) = \int_I g(\zeta) P(\zeta) \frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_{\zeta}} dl_{\zeta}, \quad z \in D_{\nu}, \nu = 1, 2.$$
 (2.1)

Здесь  $F_1(z,\zeta)$  — первое фундаментальное решение уравнения (1.2) [4], имеющее в точке  $\zeta$  особенность логарифмического типа,  $n_{\zeta}$  — орт нормали к границе L.  $F_1(z,\zeta)$  — удовлетворяет условию (1.9). Предельные значения на L комплексного потенциала (2.1) имеют вид [3]

$$W_*^{\pm}(z) = \int_I g(\zeta) P(\zeta) \frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_{\zeta}} dl_{\zeta} \pm \frac{g(z)}{2}, \quad z \in L.$$
 (2.2)

Комплексный потенциал  $W_*(z)$ , удовлетворяет условиям (1.9), (1.10). Учитывая (1.5), (2.2), из условия (1.8) имеем для  $g(\zeta)$  неоднородное интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма:

$$g(z) - 2\lambda \int_{L} g(\zeta) P(\zeta) \frac{\partial \Phi_{1}(z,\zeta)}{\partial n_{\zeta}} dl = 2\lambda \varphi_{0}(z), \quad z \in L,$$
(2.3)

где  $\Phi_1(z, \zeta) = ReF_1(z, \zeta)$ .

Таким образом, отыскание  $W_*(z)$  сводится к решению уравнения (2.3). Это уравнение решается численно на основе метода дискретных особенностей. Это позволяет найти g(z), а значит, — комплексный потенциал возмущений (2.1) и , следовательно, комплексные потенциалы  $W_1(z)$ ,  $W_2(z)$ .

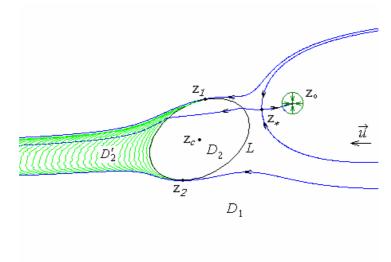
Для нахождения вымываемого из области  $D_2$  шлейфа (заштрихованная на рис. 1, 2, 3 область  $D_2'$ ), необходимо указать его границы. Для этого построим область захвата водозабора и укажем такие линии тока, которые имеют с L общие точки  $z_j = x_j + \mathrm{i} y_j \ (y_j \neq 0)$ ,  $j = 1, 2, \ldots$  (рис. 1). Когда область  $D_2$  имеет общую точку с  $L_0$ , то одна из границ шлейфа вымываемого загрязнения совпадает с  $L_0$ .

Пусть граница сопряжения L задана параметрическим уравнением

$$z = z(\alpha) \quad (x = x(\alpha), y = y(\alpha), \alpha \in [0, I]), \tag{2.4}$$

где  $\alpha$  — параметр, l — длина кривой L. Так как точки  $z_j$ , j = 1, 2, ... являются точками непротекания через границу L, то все они могут быть определены из совместного решения уравнения (2.4) и условия непротекания:

$$\frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial n_z} = 0, \quad z = z_j \in L, j = 1, 2, \dots$$
(2.5)



L.

*Puc.* 1

Для построения области захвата водозабора необходимо задать координату его критической точки  $z_*$ . Так как в этой точке скорость фильтрации равна нулю, то для определения её координаты, имеем уравнение

$$\overline{V}_{V}(z) \equiv K(z) \frac{\partial \varphi_{V}(z)}{\partial z} = 0, \quad z = z_{*} \in D_{V},$$
 (2.6)

где  $\overline{V_{\nu}}(z)$  — комплексно сопряжённая скорость [5],  $\nu$  = 1, 2. Следуя [5], (2.5) и (2.6) запишем в виде:

$$\frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial n_z} - \frac{1}{P(z)} \int_I \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_\zeta} \frac{\partial \Psi_2(z,\zeta)}{\partial l_z} dl_\zeta = 0, \quad z = z_j \in L, j = 1, 2, ...,$$
 (2.7)

$$\frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial z} + \frac{i}{P(z)} \int_I \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \frac{\partial \Psi_2(z,\zeta)}{\partial z} dl_{\zeta} = 0, \quad z = z_* \in D_{\nu}, \nu = 1 \text{ или } 2.$$
 (2.8)

где  $\Psi_2(z,\zeta) = P(z) \operatorname{Im} F_2(z,\zeta)$ ,  $F_2(z,\zeta)$  — второе фундаментальное решение уравнения (1.2) [4],  $\zeta = \xi + \mathrm{i}\,\eta$ . Решая (2.7), (2.8) численно, найдём координаты точек  $z_{\mathrm{i}}, z_{\mathrm{*}}$  (j = 1, 2, ...). Далее, построив линии тока

$$\psi_0(z) + \int_{L} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_{\zeta}} \Psi_2(z,\zeta) dl_{\zeta} = \psi(z_r), \quad z_r \in \{z_j, z_*\}, j = 1, 2, ...,$$
(2.9)

определяются границы вымываемого шлейфа загрязнения  $D'_2$ .

#### 3. Рассмотрим течение в слое проводимости

$$P(z) = y^{s}, \quad s = const > 0.$$
 (3.1)

Тогда сингулярная линия  $L_0$  (ось Ox) является линией сброса. Границу загрязнения L моделируем эллипсом с центром в точке  $z_c = iy_c$  и полуосями a, b, причём большая полуось a составляет угол  $\beta$  с Ox. Фильтрационное течение обусловлено поступательным потоком, скорость которого направлена против оси Ox и стоком, расположенным в точке  $z_0 \in D_1$ . Согласно [4],  $\Psi_2(z,\zeta)$  и  $\Phi_2(z,\zeta)$  имеют вид:

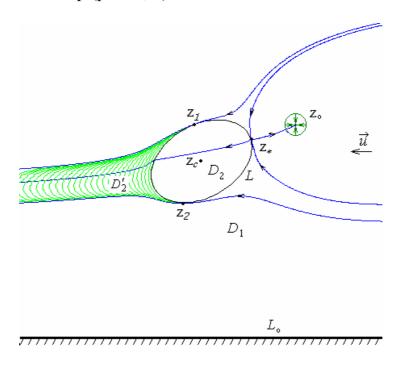
$$\Phi_{1}(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{(vn)^{\frac{s}{2}}}, \quad \Psi_{2}(z,\zeta) = \frac{(y\eta)^{\frac{s}{2}}}{2\pi} Q_{\frac{s}{2}}(\omega),$$

где  $Q_m(\omega)$  — функция Лежандра второго рода порядка  $m=s/2-1,\ s/2,$   $\omega=\omega(z,\varsigma)=\frac{(x-\xi)^2+y^2+\eta^2}{2y\eta}\,.$  Действительная часть комплексного потенциала (1.5)

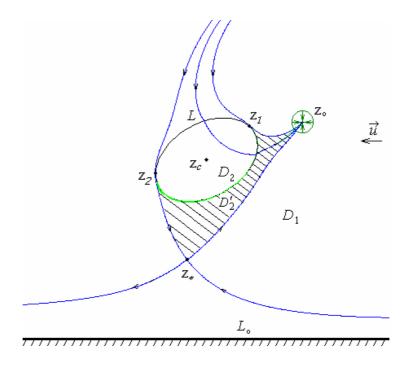
$$\varphi_0(z) = -ux + \frac{q}{2\pi} \left(\frac{y_0}{y}\right)^{\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_0),$$

где 
$$\omega_0 = \frac{(x-x_0)^2 + y^2 + y_0^2}{2yy_0}$$
.

Решение задачи в слое, толщина которого изменяется по закону (3.1), проиллюстрировано схемами течений на рис. 1-3 при s=2. Исследование вымываемого из области  $D_2$  шлейфа загрязнения  $D_2'$  позволяет найти предельно допустимое значение дебита водозабора  $q_*$ . При  $q \le q_*$ , загрязнение не попадает в водозабор (рис. 1, 2).



Puc. 2



Puc. 3

Укажем ещё одно характерное значение дебита  $q_0$ , при котором весь очаг загрязнения находится в области захвата водозабора. При  $q \ge q_0$ , шлейф вы-

мываемого загрязнения локализован и вся прошедшая через область  $D_2$  жидкость попадёт в водозабор (рис. 3).

#### Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк. 1972. 368 с.
- 2. Piven V.F., Aksyukhin A.A., Kvasov A.A., Nicolskii D.N., Frolov M.A.. Research of boundary problems of conjunction of two-dimensional seepage in inhomogeneous layers // Modern approaches to flows in porous media. Intern. Conference dedicated to P.Ya. Polubarinova-Kochina. Moscow, Sept. 1999. P. 92-94.
- 3. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // Труды X международного симпозиума «МДОЗМФ-2001». Херсон. 2001. С. 265-269.
- 4. Пивень В.Ф. О теории двумерных процессов в слоях переменной проводимости, характеризуемых степенью гармонической функции // Докл. АН. 1995. Т. 344, № 5. С. 627-629.
- 5. Пивень В.Ф. Сведение граничной задачи сопряжения обобщённых аналитических функций к интегральному уравнению. // Дифференциальные уравнения. Т. 35, № 9. 1999. С. 1194-1198.
- 6. Пивень В.Ф. Интегральное уравнение задачи сопряжения обобщённых аналитических функций на нестационарной границе. // Дифференциальные уравнения. Т. 36, № 10. 2000. С. 1405-1409.

#### УДК 532.546

## ДВУМЕРНОЕ ПРОДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТИ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ<sup>1)</sup>

В.Ф. Пивень, Ю.С. Федяев

Орловский государственный университет, e-mail: fed\_yura@orel.ru

Задача о движении границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном грунте сведена к интегро-дифференциальному уравнению. Полученная система решается численно. Рассмотрен случай плоскопараллельного движения, когда граница раздела однородности — прямая линия или окружность.

1. Рассмотрим двумерное движение границы раздела жидкостей различной вязкости в слое проводимости P = KH (K — коэффициент проницаемости слоя, H — его толщина). Это движение обусловлено источниками (стоками) течения. На горизонтальной плоскости основания слоя выбраны декартовы оси координат x, y. Неподвижная граница  $\Gamma$  делит неограниченную область фильтрации D на области  $D_1$  и  $D_2$ , в которых слои характеризуются проводимостями  $P_1$  и  $P_2$ . Полагаем, что  $P_{\nu} = k_{\nu}P(M)$ ,  $k_{\nu}$  — постоян-

\_

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00063).

ные,  $\nu=1,2$ , M=M(x,y) — точка в плоскости основания слоя и функция P(M) имеет в области D непрерывные первые производные. Скачок P на  $\Gamma$  обусловлен изменением коэффициента проницаемости.

Пусть в области  $D_1$  имеется изменяющаяся с течением времени область  $D_t$ , ограниченная кривой  $\Gamma_t$ , в которой движется жидкость постоянной вязкости  $\mu_2$ . Вне области  $D_t$  находится жидкость постоянной вязкости  $\mu_1$ . Полагаем, что конфигурация области  $D_t$  и её границы  $\Gamma_t$  в начальный момент времени t=0 известна. Обозначим область  $D_0$  и границу  $\Gamma_0$  в момент t=0. Считаем, что область  $D_t$  и её граница  $\Gamma_t$  в любой момент времени  $t\geq 0$  расположена в области  $D_1$ .

В области течения D может присутствовать сингулярная линия L, на которой проводимость слоя обращается в ноль или бесконечность. Она служит границей области  $D = D_1 \cup D_2 \cup C$  ( $C = \Gamma \cup \Gamma_t \cup L$ ).

Поле скоростей жидкости в области течения удовлетворяет системе уравнений, записанных в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\upsilon_y}{K} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\upsilon_x}{K} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (H \upsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H \upsilon_y) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь  $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\big(M,t\big), \ K = K\big(M\big), \ H = H\big(M\big)$  и  $M \in D \setminus C$ .

На границе Г выполняются условия сопряжения для нормальной и касательной составляющей скорости [1]:

$$\upsilon_n^+(M,t) = \upsilon_n^-(M,t), \quad \upsilon_\tau^+(M,t)/k_1 = \upsilon_\tau^-(M,t)/k_2, \quad M \in \Gamma.$$
 (1.2)

Здесь «+» («-») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе  $\Gamma$  со стороны нормали  $\vec{n}$  (или противоположной стороны). Нормаль направлена в область  $D_1$ , а вектор касательной  $\vec{\tau}$  здесь и далее образует с  $\vec{n}$  правовинтовую систему.

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярными силами пренебрегаем. Тогда на подвижной границе  $\Gamma_t$  выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости [1]:

$$\upsilon_n^+(M,t) = \upsilon_n^-(M,t), \quad \mu_1 \upsilon_\tau^+(M,t) = \mu_2 \upsilon_\tau^-(M,t), \quad M \in \Gamma_t.$$
 (1.3)

Здесь нормаль направлена из области  $D_t$  в  $D_1$ .

Если область D содержит сингулярную линию L, то на ней выполняется условия непроницаемости или постоянства давления, которые для поля скоростей имеют вид [1]

$$H(M)\upsilon_n(M,t) = 0$$
 или  $\upsilon_{\tau}(M,t) = 0$ ,  $M \in L$ . (1.4)

Представим поле скоростей жидкости в виде

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0(M,t) + \vec{V}(M,t). \tag{1.5}$$

Здесь  $\vec{\upsilon}_0(M,t)$  – скорость течения в отсутствии границ  $\Gamma$   $(k_1=k_2=1)$  и  $\Gamma_t$   $(\mu_1=\mu_2=1)$ , вызванного заданными источниками (стоками);  $\vec{V}(M,t)$  – ско-

рость возмущения, обусловленного границами  $\Gamma$  и  $\Gamma_t$ . Скорость  $\vec{v}_0(M,t)$  удовлетворяет условиям (1.4).

Учитывая (1.5), граничные условия (1.2) – (1.4) запишем для  $\vec{V}(M,t)$  в виде

$$V_{n}^{+}(M,t) = V_{n}^{-}(M,t) ,$$

$$(1 - \lambda_{k})V_{\tau}^{+}(M,t) - (1 + \lambda_{k})V_{\tau}^{-}(M,t) = 2\lambda_{k} \nu_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma ,$$

$$V_{n}^{+}(M,t) = V_{n}^{-}(M,t) ,$$

$$(1.6)$$

$$(1 - \lambda_{\mu})V_{\tau}^{+}(M, t) - (1 + \lambda_{\mu})V_{\tau}^{-}(M, t) = 2\lambda_{\mu}\nu_{0\tau}(M, t), \quad M \in \Gamma_{t},$$
(1.7)

$$H(M)V_n(M,t) = 0$$
 или  $V_{\tau}(M,t) = 0$ ,  $M \in L$ , (1.8)

где  $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$  и  $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$ .

Полагаем, что скорость возмущения затухает на бесконечности [2]:

$$V(M,t) \to 0$$
 при  $r_{MN} \to \infty$ ,  $N \in (\Gamma \cup \Gamma_t)$ ,  $M \notin (\Gamma \cup \Gamma_t)$ . (1.9)

В начальный момент времени t=0 положение границы  $\Gamma_0$  определяется параметрическим уравнением ( $\sigma$  – параметр):

при 
$$t = 0$$
  $\vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma)$ ,  $M \in \Gamma_0$ . (1.10)

Движение границы Г, описывает векторное уравнение [2]

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = \vec{v}_{0}(M,t) + \frac{1}{2} \left[ \vec{V}^{+}(M,t) + \vec{V}^{-}(M,t) \right], \quad M \in \Gamma_{t}.$$
 (1.11)

Таким образом, нужно по заданному полю скоростей жидкостей  $\vec{v}_0(M,t)$  и первоначальному положению границы  $\Gamma_t$  найти её положение в любой момент времени t>0. Решение поставленной задачи состоит в отыскании скорости возмущения  $\vec{V}(M,t)$ , удовлетворяющей уравнениям (1.1), условиям (1.6) – (1.9), и интегрировании дифференциального уравнения (1.11) при начальном условии (1.10).

**2**. Полагаем, что кривые  $\Gamma$  и  $\Gamma_t$  в любой момент времени можно моделировать простыми кривыми, принадлежащими классу Ляпунова. Будем искать  $\vec{V}(M,t)$  в виде вихревого слоя, распределённого с плотностями g(N,t) и f(N,t) на этих границах:

$$\vec{V}(M,t) = \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N ,$$

$$M \in D \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t). \tag{2.1}$$

Здесь  $\vec{V}_B^*(M,N) = \vec{V}_B(M,N)/K(N)$ ,  $\vec{V}_B(M,N)$  – скорость в точке M вихря с циркуляцией равной -1, расположенного в точке N. Эта скорость выражается через функцию тока  $\Psi(M,N)$  вихря по формуле [3]

$$\vec{V}_B(M,N) = \frac{1}{H(M)} \left[ \frac{\partial \Psi(M,N)}{\partial y_M} \vec{i} - \frac{\partial \Psi(M,N)}{\partial x_M} \vec{j} \right], \tag{2.2}$$

где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  – орты координатных осей Ox и Oy.

Отметим, что при наличии линии L функцию тока вихря выбирается таким образом, чтобы скорость  $\vec{V}_B(M,N)$  удовлетворяла условию (1.8).

Скорость возмущения (2.1) удовлетворяет условию (1.9). Для предельных значений  $\vec{V}$  на  $\Gamma$  и  $\Gamma_t$  соответственно получим [2]:

$$\vec{V}^{\pm}(M,t) = \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) d\ell_{N} \pm \frac{g(M,t)}{2} \vec{\tau}_{M} + \int_{\Gamma_{t}} f(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) d\ell_{N},$$

$$M \in \Gamma, \quad (2.3)$$

$$\vec{V}^{\pm}(M,t) = \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) d\ell_{N} + \int_{\Gamma_{t}} f(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) d\ell_{N} \pm \frac{f(M,t)}{2} \vec{\tau}_{M},$$

$$M \in \Gamma_{t}. \quad (2.4)$$

В (2.3) интеграл по  $\Gamma$ , а в (2.4) по  $\Gamma_t$ , понимаются в смысле главного значения по Коши.

Подставив (2.3) и (2.4) в условия (1.6) и (1.7), находим, что первые из них тождественно удовлетворяется, а из вторых получаем систему двух неоднородных интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма [2]:

$$g(M,t) - 2\lambda_{k} \left( \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) \cdot \vec{\tau}_{M} d\ell_{N} + \int_{\Gamma_{t}} f(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) \cdot \vec{\tau}_{M} d\ell_{N} \right) =$$

$$= 2\lambda_{k} \vec{\upsilon}_{0}(M,t) \cdot \vec{\tau}_{M}, \quad M \in \Gamma, \quad (2.5)$$

$$f(M,t) - 2\lambda_{\mu} \left( \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) \cdot \vec{\tau}_{M} d\ell_{N} + \int_{\Gamma_{t}} f(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) \cdot \vec{\tau}_{M} d\ell_{N} \right) =$$

$$= 2\lambda_{\mu} \vec{\upsilon}_{0}(M,t) \cdot \vec{\tau}_{M}, \quad M \in \Gamma_{t}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (1.11), получим уравнение движения границы  $\Gamma_t$ :

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = \vec{v}_{0}(M,t) + \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) d\ell_{N} + \int_{\Gamma_{t}} f(N,t) \vec{V}_{B}^{*}(M,N) d\ell_{N}, \ M \in \Gamma_{t}. (2.7)$$

Следовательно, нахождение положения границы  $\Gamma_t$  в любой момент времени сводится к решению эволюционной задачи для системы уравнений (2.5) - (2.7) при начальном условии (1.10).

Уменьшим число уравнений этой системы. Для этого исключим f(M,t) из (2.7). Умножив (2.7) скалярно на единичный вектор касательной  $\vec{\tau}_M$  в точке M границы  $\Gamma_t$  и используя (2.6), имеем

$$f(M,t) = 2\lambda_{\mu} \frac{d\vec{r}_{M}}{dt} \cdot \vec{\tau}_{M}, \quad M \in \Gamma_{t}.$$
 (2.8)

Учитывая (2.7), находим векторное интегро-дифференциальное уравнение движения границы  $\Gamma_t$ :

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} - 2\lambda_{\mu} \int_{\Gamma_{t}} \frac{d\vec{r}_{N}}{dt} \cdot \vec{\tau}_{N} \vec{V}_{B}^{*}(M, N) d\ell_{N} - \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_{B}^{*}(M, N) d\ell_{N} = \vec{\upsilon}_{0}(M, t),$$

$$M \in \Gamma_{t}. \quad (2.9)$$

Подставив (2.8) в (2.5) имеем интегральное уравнение для определения g(M,t):

$$g(M,t) - 2\lambda_k \left( \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N + 2\lambda_{\mu} \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N \right) =$$

$$= 2\lambda_k \vec{v}_0(M,t) \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma.$$
(2.10)

Таким образом, изучение движения границы  $\Gamma_t$  сводится к решению эволюционной задачи для системы интегро-дифференциального (2.9) и интегрального (2.10) уравнений при начальном условии (1.10).

**3.** Решение поставленной задачи упрощается, если граница  $\Gamma$  имеет канонический вид (прямая, окружность). В этом случае поле скоростей  $\vec{\upsilon}_0(M,t)$  и скорость вихря  $\vec{V}_B(M,N)$  подбираем таким образом, чтобы граничные условия (1.6) выполнялись. Тогда g(M,t)=0 и необходимость в уравнениях (2.5), (2.10) отпадает, и интегро-дифференциальное уравнение (2.9) принимает вид

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N = \vec{\upsilon}_0(M, t), \quad M \in \Gamma_t.$$
 (3.1)

В случае отсутствия границы  $\Gamma$  интегро-дифференциальное уравнение движения границы  $\Gamma_t$  имеет тот же вид (3.1). В указанном случае нахождение положения границы  $\Gamma_t$  в любой момент времени сводится к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения (3.1) при начальном условии (1.10). Эта задача для плоскопараллельного движения исследована в [4].

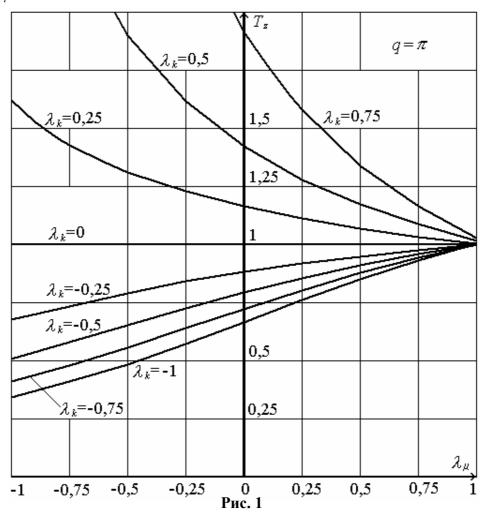
**4.** Исследуем плоскопараллельное движение границы  $\Gamma_t$  при работе совершенной скважины, нагнетающей грязную жидкость вязкости  $\mu_2$ , в кусочно-однородном слое (K=1) постоянной толщины (H=1). Скважина работает с постоянным дебитом q. Рассмотрим два случая, когда границу  $\Gamma$  можно моделировать прямой x=0 либо окружностью  $x^2+y^2=R^2$ . Начальное положение границы  $\Gamma_0$  совпадает с контуром скважины, представляющем собой окружность радиуса  $R_c$ . Работу скважины моделируем источником мощности q, расположенным в точке забоя скважины. Скважина расположена на оси Ox, причём расстояние d от её центра до границы  $\Gamma$  выбирается в качестве характерного размера (d=1). Картина течения будет симметрична относительно оси Ox. В случае  $\lambda_k=0$  (однородный грунт) движе-

ние границы  $\Gamma_t$  будет радиальным. Тогда время  $T_z$  достижения границей  $\Gamma_t$  контура  $\Gamma$  не зависит от параметра  $\lambda_\mu$  и равно

$$T_0 = \pi d^2 / q \quad (R_c << d).$$
 (4.1)

Это время выбирается в качестве характерного. В этом случае нужно положить  $q=\pi$  .

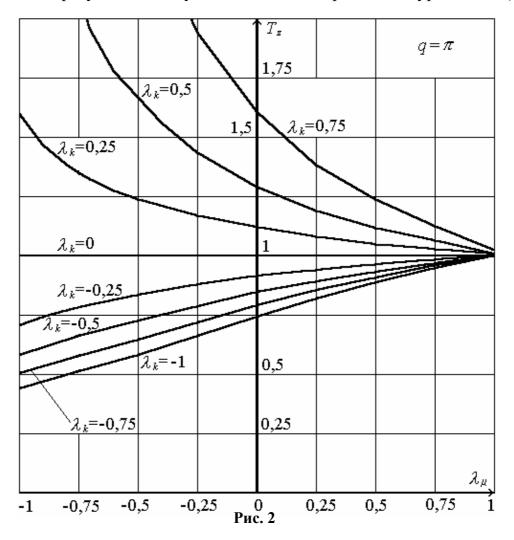
На рис. 1 показана зависимость времени  $T_z$  от параметра  $\lambda_\mu$  для различных значений параметра  $\lambda_k$ , когда граница  $\Gamma$  прямая, а на рис. 2 когда граница  $\Gamma$  окружность. При расчётах полагали R=1,  $R_c=0{,}001$ . Отметим, что с ростом параметра  $\lambda_k$  проницаемость грунта в области  $D_1$  увеличивается по сравнению с проницаемостью в области  $D_2$ . При  $\lambda_k=-1$  область  $D_2$  моделирует свободную жидкость ( $\Gamma$  – эквипотенциаль), а при  $\lambda_k=1$  область  $D_2$  непроницаема ( $\Gamma$  – линия тока). С ростом параметра  $\lambda_\mu$  вязкость жидкости в области  $D_t$  увеличивается по сравнению с вязкостью жидкости находящейся вне этой области. При  $\lambda_\mu<0$  в области  $D_t$  находится менее вязкая жидкость, а при  $\lambda_\mu>0$  — более вязкая. Видим, что для отрицательных значений параметра  $\lambda_k$  время  $T_z$  увеличивается с ростом параметра  $\lambda_\mu$ .



Для положительных значений  $\lambda_k$  время  $T_z$  уменьшается с ростом  $\lambda_\mu$ . При  $\lambda_k=1$  жидкость теоретически бесконечно долго будет достигать границы  $\Gamma$ .

Сравнивая рис. 1 и рис. 2 видим, что прямолинейный контур  $\Gamma$  более сильно влияет на время  $T_z$ . Также замечаем, что при  $\lambda_\mu \to 1$  время  $T_z \to 1$  практически для всех значений параметра  $\lambda_k$ . В случае прямолинейной границы  $\Gamma$  с погрешностью  $\eta = (T_z - T_0)/T_0 \le 0,05$  при  $\lambda_k \le 0$  и  $\lambda_\mu > 0,8$  можно использовать формулу (4.1) для оценки времени  $T_z$ . При  $\lambda_k \le 0,5$  сказанное выше справедливо для  $\lambda_\mu > 0,9$ . Когда граница  $\Gamma$  — окружность, формулу (4.1) можно использовать при  $\lambda_k \le 0$ ,  $\lambda_\mu > 0,75$  и при  $\lambda_k \le 0,5$ ,  $\lambda_\mu > 0,8$ .

Приведённые результаты получены численным решением уравнения (3.1).



Следуя [5], при решении поставленных задач полагали, что вихри дискретно распределены по контуру  $\Gamma_t$  (и  $\Gamma$ ). Положение границ  $\Gamma_t$  (и  $\Gamma$ ) задаётся дискретным множеством точек. Конечно-разностный аналог решаемых интегральных и дифференциальных (интегро-дифференциальных)

уравнений приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В рассматриваемом случае на каждом шаге по времени вихри распределялись с постоянным шагом по длине контура  $\Gamma_t$ . При решении использовалась одна система точек [5]. Производные по времени заменялись правыми разностями, по координатам – средними, а интегралы по формуле прямоугольников. Полученная СЛАУ решалась методом Гаусса. На каждом положение интерполировалось шаге времени границы  $\Gamma_{t}$ ПО прямолинейными (или кубическими) сплайнами. Заметим, что скорость движения  $\Gamma_t$  сильно уменьшается по мере удаления от источника. Поэтому целесообразно изменять шаг разбиения по времени. Также с течением времени сильно увеличивается длина контура  $\Gamma_t$ . Поэтому при решении выгодно изменять число точек разбиения  $\Gamma_t$ . В рассмотренных задачах для подбора шага по времени использовалось известное поле скоростей  $\vec{v}_0(M,t)$ . Так задавалось максимальное перемещение границы  $\Gamma_t$  вдоль оси Ox по направлению к границе  $\Gamma$ , и по известному полю скоростей находился шаг по времени. Число точек разбиения  $\Gamma_t$  увеличивалось на фиксированную величину по мере роста длины контура в заданное число раз. Это позволило существенно увеличить скорость и точность счёта.

Отметим, что движение границы  $\Gamma_t$  неустойчиво при  $\lambda_\mu \to -1$  (движение маловязкой жидкости в сильно вязкой). Неустойчивость счёта также наблюдается при стремлении  $\lambda_k \to 1$  ( $\lambda_k = 1$  отвечает непроницаемой области  $D_2$ ). Погрешность счёта в этих предельных случаях возрастает.

#### Литература

- 1. Пивень В.Ф. Математическое моделирование течений жидкости в неоднородных слоях // Юбилейный научный сборник в честь семидесятилетия Орловского государственного университета. Орёл, 2001. С. 89-98.
- 2. Пивень В.Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 10.
- 3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.
- 4. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование плоскопараллельного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости методом интегродифференциального уравнения // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ 2001». Херсон, 2001. С. 275-279.
- 5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

# УНИВЕРСАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОМПОНОВОК

В.А. Подобедов, В.М. Попов

Военный авиационный технический университет им. проф. Н.Е. Жуковского

Рассмотрены методологические вопросы построения математических моделей и комплекса программных средств в интересах сопоставительного анализа аэродинамических компоновок и формирования облика перспективных летательных аппаратов (ЛА).

Повышение требований к авиационной технике, оснащение ЛА разнообразными бортовыми системами и настоятельная потребность снижения уровней материальных и временных затрат на создание ЛА приводит к необходимости все более широкого использования математического моделирования при проведении проектных работ. Эта генеральная тенденция, с одной стороны, стимулирует соответствующие области науки, а с другой - выдвигает в число актуальных специфическую сложную проблему разработки математических моделей и программных комплексов, являющихся эффективным инструментарием проектировщиков, а не только средствами исследования физических процессов, явлений и эффектов. Как показала практика многолетних исследований, ведущихся в ВВИА (ВАТУ), рациональный подход к решению указанной проблемы состоит в максимальной унификации математических моделей и универсализации вычислительных процедур. Реализация такого подхода иллюстрируется ниже на примере создания комплекса программных средств для формирования аэродинамических компоновок ЛА на базе сопоставительного анализа разнородных (аэродинамических, радиолокационных, электростатических и др.) стационарных и нестационарных характеристик конкурирующих вариантов (рис.1).

Важнейшим этапом, определяющим успех создания комплекса, является выбор базового метода для расчета разнородных физических характеристик. Отечественная и зарубежная (например, [1]) практика построения эффективных численных моделей показывает, что целесообразно использовать модели, базирующиеся на разновидностях метода граничных элементов. Выбор конкретного метода в указанном классе основывается на анализе его возможностей при решении краевых задач, описывающих процессы взаимодействия ЛА с внешней средой и соответствующих выбранной совокупности обликоформирующих характеристик. Выявлено, что в данном случае возможна достаточно единая постановка краевых задач относительно некоторых потенциальных функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа (стационарные и квазистационарные процессы) или однородному скалярному уравнению Гельмгольца (нестационарные процессы) [2,3], а расчет характеристик может быть произведен в результате численного решения сингулярных интегральных уравнений. Этот факт предопределил выбор в каче-

стве базового метод дискретных вихрей (МДВ) [4], а также позволил сформулировать основные направления его совершенствования в соответствии с требованиями, представленными в таблице 1.

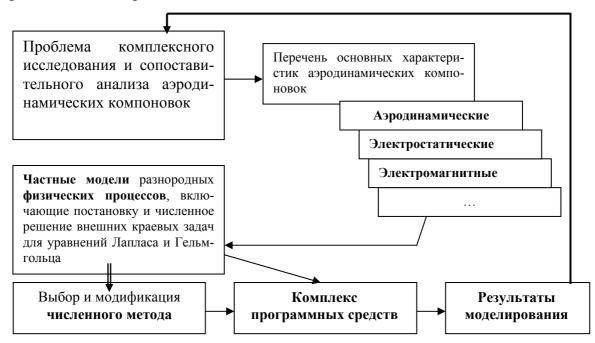


Рис.1. Комплексное исследование и сопоставительный анализ аэродинамических компоновок летательных аппаратов

Таблица 1.

Требования к комплексу моделей процессов, программным средствам и			
результатам			
К физическим и	К численным	К программным	К результатам
математическим	моделям	средствам	моделирования
моделям			
Выявление зави-	Универсальность	Единство блоков	Сопоставимость,
симостей харак-	способа задания	задания исходных	однозначная за-
теристик от ос-	исходных гео-	данных, их ана-	висимость ком-
новных геомет-	метрических дан-	лиза и визуализа-	плекса характе-
рических пара-	ных (схематиза-	ции	ристик от изме-
метров аэродина-	ции) при решении		нения основных
мической компо-	различных задач		геометрических
новки			параметров аэро-
			динамической
			компоновки
Информационная	Простота получе-	Универсальность	Достаточный
обеспеченность	ния и анализа ха-	вычислительных	диапазон приме-
по набору исход-	рактеристик, од-	алгоритмов,	нимости, высокая
ных данных на	нозначность за-	блочное построе-	и сопоставимая
ранних этапах	висимости харак-	ние программных	точность решения
проектирования	теристик от ис-	модулей, унифи-	различных физи-
	ходных данных	кация интерфей-	ческих задач
		сов подпрограмм	

Основные усилия по удовлетворению требований к численным моделям и программным средствам были направлены на обеспечение возможности использования универсальных дискретных схем для моделирования объектов произвольной компоновки, на повышение устойчивости вычислительных алгоритмов, на развитие выбранного базового численного метода на более широкий класс краевых задач (для уравнения Гельмгольца).

Были рассмотрены вопросы сходимости квадратурных формул МДВ. Сформулированы предположения и допущения относительно формы поверхности, ее разбиения и свойств искомого решения [2-3]. Показано, что в сформулированных предположениях квадратурная формула типа прямоугольников для потенциала сходится в контрольных точках со скоростью порядка величины меры дискретности при стремлении ее к нулю. Для нормальной производной потенциала во внутренних контрольных точках такая скорость сходимости достигается при использовании модифицированных квадратурных формул, в которых первое слагаемое соответствует квадратуре исходного МДВ, а второе определяет возможность линейного изменения плотности двойного слоя и учитывает локальные геометрические свойства разбиения поверхности. Методические исследования показали, что метод, базирующийся на использовании модифицированных квадратур, обладает большей устойчивостью к изменениям способа разбиения поверхности и алгоритмам выбора контрольных точек при расчете распределенных и суммарных характеристик, а соответствующие дискретные модели поверхности обладают необходимой универсальностью.

В целях повышения устойчивости решений и унификации алгоритмов был проведен анализ свойств системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которой редуцируется граничное интегральное уравнение при использовании МДВ. Следует отметить определенную аналогию свойств матриц взаимовлияния относительно потенциалов и нормальных составляющих скоростей. В случае замкнутой строго выпуклой поверхности эти матрицы имеют ранг, на единицу меньший размерности системы. Решение СЛАУ может быть построено введением регуляризирующей переменной (И.К. Лифанов) либо с использованием алгоритма метода наименьших квадратов (А.В. Дворак) [4]. Первый подход рационален при достаточно большом числе особенностей, второй – при относительно небольшом. Предложен иной метод построения СЛАУ МДВ с матрицей полного ранга- к строкам исходной матрицы прибавляется вектор площадей панелей, умноженный на произвольную ненулевую константу. Построенная таким образом матрица при фиксированном выборе этой константы имеет обратную матрицу с ограниченной сверху нормой.

Развитие численного метода состояло в построении решений краевых задач для скалярного однородного уравнения Гельмгольца. При получении квадратурных формул рационально следовать идеологии МДВ. Поверхность тела разбивается традиционным для МДВ способом и мера дискретности

разбиения много меньше, чем длина волны, соответствующая волновому числу. Построены квадратурные формулы [2,3], которые в явном виде включают функции взаимовлияния, рассчитываемые при решении краевых задач для уравнения Лапласа. Отдельно был изучен вопрос оценки скорости сходимости квадратур для интегралов с сильной особенностью при решении задачи Неймана для тонкой плоской ограниченной поверхности [3,5].

Таким образом, был построен численный метод расчета аэродинамических характеристик ЛА в неустановившемся дозвуковом потоке газа, базирующийся на идеях и основных вычислительных алгоритмах МДВ и единой форме задания исходных данных и схематизации поверхности ЛА [2,5].

Настоящая работа выполнена в рамках научной школы, созданной под руководством профессоров С.М. Белоцерковского и М.И. Ништа, и наиболее близка к научному направлению, возглавляемому профессором И.К. Лифановым.

Основным методическим результатом проведенных исследований [6] является вывод о том, что рациональный путь построения прикладного комплекса математических моделей и программных средств включает анализ заданной совокупности характеристик и описание соответствующих процессов, постановку краевых задач и выбор численного метода, обеспечивающего унификацию моделей и универсализацию вычислительных процедур, анализ интегральных уравнений и построение методов их численного решения, формулировку и решение задач исследований для обеспечения заданных свойств результатов моделирования, математические обоснования вычислительных процедур и их совершенствование, создание и тестирование комплекса программных средств.

Реализация изложенной методологии позволила разработать единую численную модель и комплекс программ моделирования квазистационарных процессов взаимодействия ЛА с внешними полями, построить модификацию МДВ, обеспечивающую повышение точности моделирования и расчета характеристик, построить МДО решения краевых задач для уравнения Гельмгольца, при k=0 соответствующий МДВ. В интересах информационного обеспечения процесса аэродинамического проектирования построен и протестирован комплекс программных средств, базирующийся на идеях МДВ, единой схематизации поверхности ЛА и универсальных вычислительных алгоритмах.

#### Литература

- 1. Миранда Л.Р. Применение вычислительной аэродинамики при проектировании самолета // Аэрокосмическая техника, № 2, 1985.
- 2. Попов В.М. Математическое моделирование процессов взаимодействия летательного аппарата с внешними полями и разработка универсальных вычислительных процедур комплексного анализа аэродинамических компоновок. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, М., ВАТУ, 2001.

- 3. Дворак А.В., Попов В.М.. Построение численного метода решения краевых задач для уравнения Гельмгольца // Электромагнитные волны и электронные системы, № 4, т.4, 1999.
- 4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995.
- 5. Гуляев В.В., Ништ М.И., Попов В.М. Линейные математические модели аэродинамики пространственных несущих систем в неустановившемся дозвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ, № 6, 2000.
- 6. Ништ М.И., Подобедов В.А. Аэродинамическое проектирование и математическое моделирование полета летательного аппарата // Полет, №4, 2000.

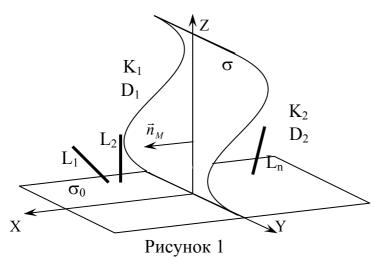
# ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ТРЁХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ $^{1)}$

С.Л. Ставцев

Институт вычислительной математики PAH, e-mail: sstass2000@mail.ru

В работе рассматривается трёхмерное течение жидкости к системе скважин в кусочно-неоднородной среде. Задача сводится к системе интегральных уравнений: фредгольмовского и гиперсингулярного. Для случая, когда проницаемость среды меняется только вдоль одного направления, указаны особенности решения гиперсингулярных уравнений с помощью метода замкнутых дискретных вихревых рамок. Приведены результаты расчётов.

Рассмотрим трёхмерное фильтрационное течение в области D, которое делится поверхностью  $\sigma$  на области  $D_1$  и  $D_2$ :  $D = D_1 \cup D_2 \cup \sigma$ .



Проницаемость среды в области  $D_{\nu}$  обозначим через  $K_{\nu}(M), M \in D_{\nu}, \nu=1,2.$  Область D может быть ограничена сингулярной поверхностью  $\sigma_0$ , на копроницаемости торой сред  $K_{\nu}(M)$  обращаются в ноль. Наличие этой поверхности определяется видом функций  $K_{\nu}(M)$ . Будем рассматривать только гладкие поверхности  $\sigma$  и  $\sigma_0$ .

В каждой из областей  $D_{\nu}$ 

рассмотрим  $n_{\nu}$   $\nu=1,2$  скважин  $L_{i}$   $i=1,...n_1+n_2$  (рисунок 1) с заданными дебитами  $q_{i}$   $i=1,2,...n_1+n_2$ .

Течение жидкости в областях  $D_{\nu}$  описывается с помощью квазипотенциалов  $\varphi_{\nu}$ , удовлетворяющих уравнению (из [1]):

-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №01-01-00063 и №02-01-00045)

$$\nabla (K_{\nu} \nabla (\varphi_{\nu}(M))) = 0, M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2. \tag{1}$$

Для расчёта искомого поля скоростей воспользуемся законом Дарси [1]:

$$\vec{V}_{\nu}(M) = K_{\nu}(M)\nabla\varphi_{\nu}(M), M \in D_{\nu}, \nu = 1,2,$$
 (2)

где  $\varphi_{V}(M) = -p(M) - z$ ,  $M \in D_{V}$ , V = 1,2. В (2)  $\vec{V}(M)$  — скорость течения в точке M; p(M) — давление; z — координата точки M по вертикальной оси OZ.

Для квазипотенциалов  $\varphi_{\nu}$  на поверхности  $\sigma$  выполняются граничные условия: условие непрерывности давления и расхода жидкостей (условия сопряжения):

$$\varphi_{1}(M) = \varphi_{2}(M), M \in \sigma;$$

$$K_{1}(M) \left(\frac{\partial \varphi_{1}(M)}{\partial n_{M}}\right) = K_{2}(M) \left(\frac{\partial \varphi_{2}(M)}{\partial n_{M}}\right), M \in \sigma.$$
(3)

где  $n_M$  – нормаль к границе  $\sigma$ , направленная в область  $D_1$  (рис. 1).

Так как движение жидкости определяется только скважинами, то при неограниченной области  $D_{\nu}$  для квазипотенциала  $\varphi_{\nu}$  выполняется условие на бесконечности:  $\varphi_{\nu}(M) \to 0$  при  $M \to \infty$ .

Решение ищем в виде

$$\varphi_{\nu}(M) = \varphi_{0\nu}(M) + \Phi_{\nu}(M), M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2,$$
 (4)

где  $\varphi_{0\nu}(M)$  — невозмущённые квазипотенциалы течений, т.е. течений в отсутствие поверхности  $\sigma$ . Квазипотенциал  $\varphi_{01}(M)$  имеет особые точки в области  $D_I$ , а  $\varphi_{02}(M)$  — в области  $D_2$ . При известных дебитах  $q_i$ , невозмущённые квазипотенциалы  $\varphi_{0\nu}(M)$ ,  $\nu=1,2$  известны ([4]).  $\Phi_{\nu}(M)$  — квазипотенциалы возмущений. Они учитывают влияние поверхности  $\sigma$  на течение жидкости.

Квазипотенциалы возмущения  $\Phi_{\nu}(M)$ ,  $\nu=1,2$  будем искать в виде потенциалов двойного слоя:

$$\Phi_{\nu}(M) = \int_{\sigma} g_{\nu}(P) K_{\nu}(P) \frac{\partial F_{\nu}(M, P)}{\partial n_{P}} d\sigma_{P}, M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2, M \notin \sigma, \quad (5)$$

где  $g_1(P)$  и  $g_2(P)$  — плотности распределения особенностей на поверхности  $\sigma$  в областях  $D_1$  и  $D_2$  соответственно;  $F_v(M,P)$ , v=1,2 — фундаментальные решения уравнения (1) для соответствующих проницаемостей  $K_v(z)$ , v=1,2. Они известны, и для определённых законов проницаемостей указаны в работе [2].

Подставляя (4) и (5) в (3), приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$\frac{g_1(M)}{2} + \frac{g_2(M)}{2} + \int_{\sigma} \left[ g_1(P)K_1(P) \frac{\partial F_1(M,P)}{\partial n_P} - g_2(P)K_2(P) \frac{\partial F_2(M,P)}{\partial n_P} \right] d\sigma_P = (6)$$

$$= \varphi_{02}(M) - \varphi_{01}(M), M \in \sigma;$$

$$\int_{\sigma} \left[ K_{1}(M)g_{1}(P)K_{1}(P) \frac{\partial^{2}F_{1}(M,P)}{\partial n_{M} \partial n_{P}} - K_{2}(M)g_{2}(P)K_{2}(P) \frac{\partial^{2}F_{1}(M,P)}{\partial n_{M} \partial n_{P}} \right] d\sigma_{P} =$$

$$= K_{2}(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_{M}} - K_{1}(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_{M}}, M \in \sigma.$$
(7)

Первое уравнение относится к уравнению фредгольмовского типа, а второе уравнение является гиперсингулярным. Выясним особенности решения второго интегрального уравнения из системы (6) - (7).

Ограничимся рассмотрением случая, когда проницаемости среды  $K_{\nu}$  меняются только вдоль одного направления, например оси OZ, т.е.  $K_{\nu}(M)=K_{\nu}(z)$ . В этом случае сингулярной поверхностью  $\sigma_0$ , на которой  $K_{\nu}(M)=0$ , может быть только плоскость z=const. Уравнение (1) примет вид:

$$K_{\nu}\left(z\right)\left(\frac{\partial^{2}\varphi_{\nu}(M)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}\varphi_{\nu}(M)}{\partial y^{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{\nu}(z)\frac{\partial\varphi_{\nu}(M)}{\partial z}\right) = 0, M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2. (8)$$

Для решения гиперсингулярного уравнения воспользуемся методом замкнутых дискретных вихревых рамок [3]. Обобщим этот метод на случай неоднородных сред, когда свойства среды меняются вдоль оси OZ. Перейдём от интеграла по поверхности к интегралу по замкнутому контуру.

При решении гиперсингулярного уравнения поверхность  $\sigma$  задаётся параметрически:  $\vec{r}(M) = \vec{r}(\varsigma, \xi)$ , где  $M \in \sigma$ ,  $\vec{r}(M)$  – радиус-вектор, определяющий положение точки на соответствующей поверхности;  $\varsigma, \xi$  - параметры. Поверхность разбивается равномерно по параметрам  $\varsigma$  и  $\xi$  на  $s_1s_2$  ячеек. В результате такого разбиения, мы можем представить один из гиперсингулярных интегралов в соотношении (7) в виде:

$$\int_{\sigma} K_{1}(M)g_{1}(P)K_{1}(P)\frac{\partial^{2}F_{1}(M,P)}{\partial n_{M}\partial n_{P}}d\sigma_{P} = K_{1}(M)\sum_{i=1}^{s_{1}}\sum_{j=1}^{s_{2}}g_{ij}\int_{\sigma_{ii}}K_{1}(P)\frac{\partial^{2}F_{1}(M,P)}{\partial n_{M}\partial n_{P}}d\sigma_{P}.$$
 (9)

При этом в силу малости площадки мы считаем, что  $g_{ij}=g_1$  (P)=const в пределах этой площадки. Т.к. для второго интеграла в рассматриваемом гиперсингулярном уравнении рассуждения проводятся аналогично, то в дальнейшем индекс при K(M) и F(M,P) мы будем опускать. Рассмотрим более подробно интегралы под знаком двойного суммирования:

$$K(M) \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial^{2} F(M, P)}{\partial n_{M} \partial n_{P}} d\sigma_{P} = K(M) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial F(M, P)}{\partial n_{P}} d\sigma_{P} \right) \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{i}) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial F(M, P)}{\partial n_{P}} d\sigma_{P} \right) \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{i}) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial F(M, P)}{\partial n_{P}} d\sigma_{P} \right) \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{k}) \right].$$

Это соотношение можно переписать более компактно, приняв во внимание соотношение (2) и вводя проекции скорости  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ :  $w_{ij}(M) = K(M) \times$ 

$$\begin{split} &\times \int_{\sigma_{ij}} K(P) \cdot \cdot \cdot \frac{\partial^2 F(M,P)}{\partial n_M \partial n_P} d\sigma_P = V_x \cos(\bar{n}_M \cap \bar{i}) + V_y \cos(\bar{n}_M \cap \bar{j}) + V_z \cos(\bar{n}_M \cap \bar{k}), \quad \text{гле} \\ &V_x = K(M) \cdot \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial n_P} d\sigma_P \right), \quad V_y = K(M) \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial n_P} d\sigma_P \right), \\ &V_z = K(M) \cdot \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\sigma_{ij}} K(P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial n_P} d\sigma_P \right), \quad \text{Т.к. } K(M) = K(z_M), \quad \text{то } V_x = K(z_M) \int_{\sigma_{ij}} K(z_P) \int_{\sigma_{ij}} K(z_P) \left( \frac{\partial^2 F(M,P)}{\partial x_M \partial x_P} + \beta \frac{\partial^2 F(M,P)}{\partial x_M \partial y_P} + \gamma \frac{\partial^2 F(M,P)}{\partial x_M \partial z_P} \right) \right) d\sigma_P. \quad \text{Здесь} \qquad \alpha = \cos(\bar{n}_P \cap \bar{i}), \\ &\beta = \cos(\bar{n}_P \cap \bar{j}); \quad \gamma = \cos(\bar{n}_P \cap \bar{k}) - \text{направляющие косинусы между вектором нормали к плошалке и производной от  $F(M,P)$  по  $n_P$ . Воспользуемся тем свойством, что  $F(M,P) = F(\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}, z_M, z_P), \quad \text{т.e.} \qquad \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_M} = \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_P} \\ &= \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_P}. \quad \text{Кроме этого, т.к. } F(M,P) \text{ удовлетворяет уравнению (8), то } K(z_P) \frac{\partial^2 F(M,P)}{\partial x_P^2} = -K(z_P) \frac{\partial^2 F(M,P)}{\partial y_P^2} - \frac{\partial}{\partial z_P} \left( K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right), \quad \text{поэтому } V_x = \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_P} \\ &= -K(z_M) \cdot \int_{\sigma_{ij}} \left\{ \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial y_P} \left( -K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial y_P} \right) - \frac{\partial}{\partial z_P} \left( K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right) \right\} d\sigma_P. \quad \text{Воспользуемся формулой} \\ &\int_{\sigma_{ij}} \alpha \left[ \frac{\partial R}{\partial y_P} - \frac{\partial Q}{\partial z_P} \right] + \beta \left[ \frac{\partial Q}{\partial z_P} - \frac{\partial P}{\partial y_P} \right] d\sigma_P \int_{\sigma_{ij}} \left( E(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right) \right] d\sigma_P. \quad \text{Воспользуемся формулой} \\ &\int_{\sigma_{ij}} \alpha \left[ \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right] + \beta \left[ \frac{\partial Q}{\partial z_P} - \frac{\partial P}{\partial z_P} \right] d\sigma_P \int_{\sigma_{ij}} \left( E(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right) d\sigma_P \right] d\sigma_P. \quad \text{Имеем } V_x(M) = -K(z_M) \cdot \int_{\sigma_{ij}} K(z_P) \left[ \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right] d\sigma_P - \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} d\sigma_P - \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} d\sigma_P \right]. \\ &\int_{\sigma_{ij}} \Delta H_{ADOTU4HO} V_y(M) = -K(z_M) \int_{\sigma_{ij}} K(z_P) \left[ \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right] d\sigma_P - \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} d\sigma_P \right]. \end{aligned}$$$

Рассмотрим 
$$V_z(M) = K(z_M) \frac{\partial}{\partial z_M} \int_{\sigma_{ij}} K(z_P) \left[ \alpha \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_P} + \beta \frac{\partial F(M,P)}{\partial y_P} + \gamma \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right] d\sigma_P$$
. Введём новую функцию  $\Psi$ , удовлетворяющую условию  $F(M,P) = \frac{1}{K(z_P)} \frac{\partial \Psi}{\partial z_P}$ . Тогда с учётом соотношения (8), имеем  $\frac{1}{K(z_P)} \frac{\partial}{\partial z_P} \left( K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} \right) = -\frac{1}{K(z_P)} \frac{\partial}{\partial z_P} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_P^2} \right)$ . После несложных преобразований  $K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_P} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_P^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_P^2} + C$ . Согласно определению новой функции, имеем  $K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_P} = \frac{\partial}{\partial x_P} \frac{\partial \Psi}{\partial z_P}$ ;  $K(z_P) \frac{\partial F(M,P)}{\partial y_P} = \frac{\partial}{\partial y_P} \frac{\partial \Psi}{\partial z_P}$ . Подставляя в выражение для  $V_z$ , воспользовавшись формулой (10) имеем  $V_z(M) = K(z_M) \frac{\partial}{\partial z_M} \int_C \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial y_P} dx_P - \frac{\partial \Psi}{\partial x_P} dy_P \right]$ .

$$V_{x}(M) = -K(z_{M}) \int_{C} K(z_{P}) \left[ \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_{P}} dy_{P} - \frac{\partial F(M,P)}{\partial y_{P}} dz_{P} \right];$$

$$V_{y}(M) = -K(z_{M}) \int_{C} K(z_{P}) \left[ \frac{\partial F(M,P)}{\partial x_{P}} dz_{P} - \frac{\partial F(M,P)}{\partial z_{P}} dx_{P} \right];$$

$$V_{z}(M) = K(z_{M}) \frac{\partial}{\partial z_{M}} \int_{C} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial y_{P}} dx_{P} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_{P}} dy_{P} \right];$$

$$(11)$$

вычисляем интегралы от элементарных ячеек в выражениях (9) и тем самым переходим от системы интегральных уравнений (7)-(8) к системе алгебраических уравнений, которую решаем одним из известных методов. Т.о. мы находим  $g_1(P)$  и  $g_2(P)$ . По формулам

$$\vec{V}_{v}(M) = K_{v}(M)\nabla\left(\varphi_{0v}(M) + \int_{\sigma} g_{v}(P)K_{v}(P)\frac{\partial F_{v}(M,P)}{\partial n_{P}}d\sigma_{P}\right), M \in D_{v}, v = 1,2, (12)$$

которые следуют из (2), (4) и (5), рассчитываем поле скоростей.

Вернёмся к системе алгебраических уравнений, состоящих из сумм вида (9). Матрица системы для замкнутой поверхности  $\sigma$  является вырожденной. Действительно, согласно формулам (11), мы заменяем поверхность системой замкнутых дискретных вихревых рамок, расположенных в неоднородной среде. Если для всех рамок поверхности положить  $g_{ij}$ =I, то скорости  $w_{ij}$ , индуцируе-

мые совпадающими отрезками соседних рамок взаимно уничтожатся и, поэтому в (9)

$$\sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} g_{ij} w_{ij} = 0$$

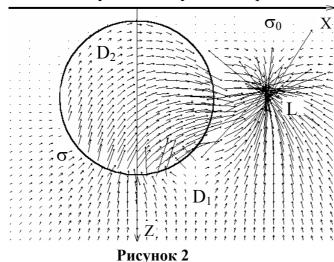
для каждого подынтегрального выражения в (7). Но это означает, что однородная система, соответствующая системе алгебраических уравнений имеет ненулевые решения, и циркуляции рамок определены с точностью до константы. Поэтому будем искать решение задачи, удовлетворяющее условию

$$g_{\nu}(M_0) = 0, M_0 \in \sigma, \nu = 1$$
 или 2, (13)

где  $M_0$  – одна из расчётных точек на поверхности  $\sigma$ . Для отыскания устойчивого такого решения осуществим регуляризацию гиперсингулярного уравнения (7), вводя дополнительную регуляризирующую переменную  $\gamma$ :

$$\begin{split} \int_{\sigma} \left[ K_{1}(M)g_{1}(P)K_{1}(P) \frac{\partial^{2}F_{1}(M,P)}{\partial n_{M} \partial n_{P}} - K_{2}(M)g_{2}(P)K_{2}(P) \frac{\partial^{2}F_{1}(M,P)}{\partial n_{M} \partial n_{P}} \right] d\sigma_{P} + \\ + \gamma &= K_{2}(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_{M}} - K_{1}(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_{M}}, M \in \sigma. \end{split} \tag{14}$$

Т.о. в случае замкнутой поверхности  $\sigma$  мы решаем систему (6), (13) и (14),



а затем по формулам (12) рассчитываем поле скоростей.

Пример расчётов приведён на рисунке 2. Здесь  $\sigma_0$  — сингулярная поверхность: плоскость z=0;  $\sigma$  - сфера радиуса 3L (L — длина фильтра скважины) с центром в точке (0,0,3.5L). Проницаемость в области  $D_1$   $K_1(M)=z^2$ ; в области  $D_2$   $K_2(M)=1$ .

#### Литература

- 1 Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М. Наука. 1977. 664 с.
- 2. Пивень В.Ф. Точечный источник в неоднородной пористой среде. // Московское общество испытателей природы. Москва, 1988, с. 48-54.
- 3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. ТОО "Янус". 1995. 520 с.
- 4. Аксюхин А.А. Определение дебита наклонных скважин методом дискретных особенностей. Труды X международного симпозиума «МДОЗМФ-2001». Херсон, 2001. С. 11-17.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К СИСТЕМЕ СКВАЖИН В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ, ПРОВОДИМОСТИ КОТОРЫХ МОДЕЛИРУЮТСЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ И МЕТАГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ КООРДИНАТ<sup>1)</sup>

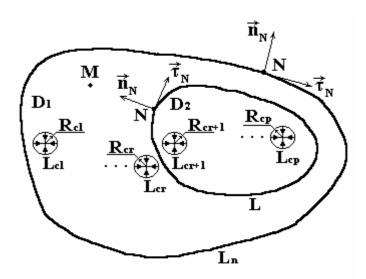
М.А. Фролов Орловский коммерческий институт

В отличие от [2, 6], ставится двумерная граничная задача о дебите системы скважин в кусочно-неоднородных слоях, с произвольными (кусочно-Ляпуновскими) границами области фильтрации и сопряжения слоев. Проводимости слоев моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат.

Успешное решение граничных задач теории фильтрации в неоднородных слоях (пластах) имеет большое значение в таких прикладных областях науки как гидротехника, мелиорация, гидрогеология и др. Исследование влияния неоднородностей на дебит скважин актуально и значимо для практики эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, водоносных пластов.

Одной из актуальных проблем добычи нефти и газа является изучение степени влияния неоднородности пласта на процесс фильтрации к скважинам.

Поставим задачу о дебите системы числа p совершенных эксплуатационных скважин в неоднородном слое.



Пусть в области D, в произвольных точках с координатами  $(x_{0i},y_{0i})$  i=1,2,...,p расположены скважины, радиусы которых  $R_{ci}$  (см. рис.). Заданный гладкий контур  $L_n$  является контуром питания скважин. Другой, также гладкий контур L делит область D на области  $D_1$  (ограниченную  $L_n$ ) с про-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №01-01-00063)

водимостью  $P_1$  и  $D_2$ , с проводимостью  $P_2$ . В областях  $D_1$  и  $D_2$ , сопрягающихся вдоль заданного контура L, проводимости  $P_1$  и  $P_2$  слоев изменяются непрерывно, а на самом контуре L — скачком. Полагаем, что  $P_v = K_v H_v$ , v=1,2, где  $H_v=H_v(M)$  — толщина слоя, непрерывная функция точки M (в том числе и на L). Функция  $K_v=K_v(M)$  — проницаемость слоя, терпит разрыв на L. Предположим, что скважины ограниченные контурами  $L_{ci}$ , i=1,2,...,r находятся в области  $D_1$ , а скважины ограниченные контурами

$$L_{ci}$$
  $i = r + 1, 2, ..., p$  — в области  $D_2$ .

Области  $D_1$  и  $D_2$  могут быть ограничены некоторой особой линией  $\Gamma$ , на которой проводимость слоя равна нулю  $(P_{\nu}(x,y)=0,\ \nu=1$  или 2) или обращается в бесконечность.  $(P_{\nu}(x,y)=\infty,\ \nu=1$  или 2).

Квазипотенциалы скоростей течения в областях  $D_1$  и  $D_2$ , обозначим соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  координат точки M, всюду в областях  $D_1$  и  $D_2$ , за исключением особых точек этих функций, областей  $D_{ci}$ , контуров  $L_{ci}$ , i=1,2,...,p,  $L_n$ , L, линии  $\Gamma$  (если она есть), удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( P_{\nu}(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( P_{\nu}(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial y} \right) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

$$M \in D', \quad D' = D \setminus C, \quad D = D_1 \bigcup D_2,$$

$$C = \bigcup_{i=1}^{p} L_{ci} \bigcup L \bigcup L_n \bigcup \Gamma.$$
(1)

Следуя [3, 5], на контуре L должны выполняться условия непрерывности давления и расхода жидкости:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M),$$

$$K_1^+ \left( M \right) \left( \frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ = K_2^- \left( M \right) \left( \frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^-, M \in L, \tag{2}$$

где знаками «+» и «-» обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к контуру L из областей  $D_1$  и  $D_2$ .

Течение жидкости к скважинам происходит вследствие разности давлений на контурах питания  $L_n$  и контурах скважин  $L_{ci},\ i=1,2,...,p$ . Пусть на этих контурах заданы давления. Тогда на контурах  $L_n$  и  $L_{ci},\ i=1,2,...,p$  имеем:

$$\varphi_1(M) = \alpha(M), M \in L_n, \tag{3}$$

$$\varphi_1(M) = C_i, \ M \in L_{ci}, \ i = 1, 2, ..., r, 
\varphi_2(M) = C_i, \ M \in L_{ci}, \ i = r + 1, 2, ..., p,$$
(4)

где  $C_i$ , i=1,2,...,p — произвольные постоянные,  $\alpha(M)$  — в общем случае регулярная периодическая функция координат. В дальнейшем полагаем  $\alpha(M)\equiv 0$ .

Если слой содержит линию  $\Gamma$ , то в этом случае, следуя [5], квазипотенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  должны еще удовлетворять условиям:

$$P_{\nu}(M)\frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial n_{M}} = 0, \ M \in \Gamma, (\nu = 1 \text{ или } 2)$$
 (5)

на границе, где P(x, y) = 0 или

$$\varphi_{\nu}(M) = C, \nu = 1, 2, C = \text{const}, M \in \Gamma$$
(6)

на границе, вдоль которой  $P_{\nu}(x,y) = \infty$ ,  $\nu = 1$  или 2. В задачах фильтрации часто давление отсчитывают от линии  $\Gamma$ , вдоль которой проводимость обращается в бесконечность, поэтому в (6) обычно выбирают  $C \equiv 0$ .

Решение задачи представим в виде:

$$\varphi_{\nu}(M) = \varphi_{0\nu}(M) + \varphi_{\nu}^{*}(M), \nu = 1, 2.$$
 (7)

Работу скважин, дебиты которых  $q_i$ , будем моделировать точеными стоками мощности  $q_i$ . Функция  $\varphi_{0\nu}(M)$  — заданный в отсутствии границ  $L_n$  и L квазипотенциал скорости, описывающий течение к скважинам в области D', который имеет p особенностей логарифмического типа в точках  $(x_{0i}, y_{0i}) \in D \setminus (L_n \bigcup L \bigcup \Gamma)$ , i = 1, 2, ..., p:

$$\varphi_{01}(M) = \sum_{i=1}^{r} q_i f_i(M, M_{0i}), \ \varphi_{02}(M) = \sum_{i=r+1}^{p} q_i f_i(M, M_{0i}). \tag{8}$$

Здесь p — общее число скважин,  $q_i$  — их дебиты, приходящиеся на единицу проводимости слоя:  $q_i = \frac{\Pi_i}{P_{\nu}(x_0,y_0)}, \ \nu=1,2$ . Вид функции  $f_i(M,M_{0i})$  зависит от конкретной задачи, причем, в точках  $M_{0i}$ , i=1,2,...,p она имеет особенность логарифмического типа.

Функции  $\varphi_{\nu}^*(M)$ ,  $\nu$  = 1, 2 — квазипотенциалы возмущения, вызванные наличием контуров  $L_n$  и L . Они описывают процесс в областях  $D_1$  и  $D_2$  .

Если область  $D_1$  простирается в бесконечность (контур  $L_n$  отсутствует), то необходимо наложить дополнительное условие. Пусть N — точка контура L, а  $r_{NM}$  — расстояние между точками N и  $M \notin L$ . Согласно [5], потребуем выполнения условия:

$$\varphi_1^*(M) \Rightarrow 0$$
 при  $r_{NM} \to \infty$ . (9)

Условие (9) означает отсутствие на бесконечности возмущения.

Поскольку квазипотенциал  $\varphi_{0\nu}(M)$  удовлетворяет уравнению (1), то квазипотенциалы возмущения  $\varphi_{\nu}^*(M)$  также удовлетворяют этому же уравнению. Условия (2)-(9) для квазипотенциалов  $\varphi_{\nu}^*(M)$ ,  $\nu$  = 1, 2 примут вид:

$$\varphi_1^{*+}(M) - \varphi_2^{*-}(M) = \varphi_{02}(M) - \varphi_{01}(M),$$

$$(1 + \lambda(M)) \left( \frac{\partial \varphi_1^*(M)}{\partial n_M} + \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M} \right)^+ = (1 - \lambda(M)) \left( \frac{\partial \varphi_2^*(M)}{\partial n_M} + \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M} \right)^-, (10)$$

где 
$$\lambda(M) = \frac{K_1^+(M) - K_2^-(M)}{K_1^+(M) + K_2^-(M)}$$
 — непрерывная гладкая функция,  $\lambda \in [-1;1]$ ;

$$\varphi_1^{*-}(M) = \alpha(M) - \varphi_{01}(M), M \in L_n,$$
(11)

$$\varphi_1^*(M) = C_i - \varphi_{01}(M), \ M \in L_{ci}, \ i = 1, 2, ..., r, 
\varphi_2^*(M) = C_i - \varphi_{02}(M), \ M \in L_{ci}, \ i = r + 1, 2, ..., p,$$
(12)

$$P_{\nu}(M)\frac{\partial \varphi_{\nu}^{*}(M)}{\partial n_{M}} = 0, \ M \in \Gamma, (\nu = 1 \text{ или } 2), \tag{13}$$

$$\varphi_{\nu}^{*}(M) = C, \nu = 1, 2, M \in \Gamma, C = \text{const.}$$
 (14)

Если контур  $L_n$  отсутствует (область  $D_1$  простирается в бесконечность), то необходимо наложить дополнительное условие. Пусть N — точка контура L, а  $r_{NM}$  — расстояние между точками N и  $M \not\in L$ . Согласно [5], потребуем выполнения условия:

$$\varphi_1^*(M) \to 0$$
 при  $r_{NM} \to \infty$ . (15)

Условие (15) означает затухание возмущения на бесконечности от ограниченной контуром L конечной области  $D_2$  (см.[5]).

Таким образом, чтобы найти дебиты  $q_i$ , i=1,2,...,p системы скважин, необходимо определить квазипотенциалы  $\varphi_1^*(M)$  и  $\varphi_2^*(M)$ , удовлетворяющиеуравнению (1) и условиям (10), (11) или (15), (12), а также условиям (13) или (14), когда граница  $\Gamma$  входит в область D.

Отличительная особенность данной задачи обусловлена принципиальной трудностью решения граничных задач в предположении:

a) 
$$\lambda = \lambda(M), M \in L$$
,

б) наличия сингулярной линии Г.

Исследование двумерной фильтрации жидкости к системе скважин в неоднородных слоях при данных предположениях, позволит более точно моделировать проводимости слоёв сложной геологической структуры.

Построенные и исследованные при этом модели граничных задач двумерных фильтрационных течений, могут быть использованы в качестве тестовых при апробации методов решения задач процессов, описываемых уравнениями вида (1).

B предположении, что 
$$K_1^+(M)=k_1K(M),\ K_2^-(M)=k_2K(M),$$
  $\lambda=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}=\mathrm{const}\,.$ 

В работах [1, 7, 8, 9] получены новые решения в конечном виде для канонических границ L и  $L_n$  (прямая, окружность), а в случае границ, моделируемых гладкими кривыми класса Ляпунова, задача о дебите сведена к системе интегральных уравнений и соотношений. Построены и исследованы новые математические модели граничных задач двумерных фильтрационных течений к системе скважин в неоднородных слоях, проводимость которых характеризуется гармоническими и метагармоническими функциями координат. Получены в конечном виде решения задач о дебитах скважин в случае канонических (прямолинейных и круговых) границ области фильтрации в слоях указанной проводимости. Для кусочно-гладких контуров питания и сопряжения слоёв, моделируемых кривыми класса Ляпунова, задача о дебите решена численно. Это позволило исследовать влияние неоднородностей слоёв, формы границ области фильтрации на дебит скважин. Исследована интерференция скважин в случае границ области питания и сопряжения слоёв, моделируемых кривыми Ляпунова.

#### Литература

- 1. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Канд. дисс. Орловский гос. Университет, 2000, 153 с.
- 2. Голубев Г.В. Тумашев Г.Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань. Изд-во КГУ, 1972. 196 с.
- 3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
- 4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
- 5. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дисс. Орёл, Орловский гос. ун-т, 1998, 266 с.
- 6. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969, 546 с.
- 7. Фролов М.А. Двумерная задача о работе нескольких скважин в кусочнонеоднородном слое проводимости  $P = \text{ch}^2(\mu y)$ . Труды IX Международного симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орёл, 2000. С. 451-456.
- 8. Фролов М.А. Исследование двумерных граничных задач о дебитах системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Канд. дисс. Орловский гос. Университет, 2001, 148с.
- 9. Фролов М.А., Аксюхин А.А. Решение двумерных граничных задач о дебите скважин в неоднородных слоях грунта методом интегральных уравнений. Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ-2001». Херсон, 2001. С. 364-373.

## Научное издание

## ТРУДЫ

Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

Компьютерная верстка – А.А. Аксюхин

Подписано в печать 28.10.2002 г. Формат 60x84 1/6 Усл. печ. л. 10. Заказ № 2810 от 28.10.2002 г. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО ПФ «Картуш» 302020, г. Орел, ул. Матросова, 5. Тел. 43-35-08