

Орловский государственный университет

Харьковский национальный
университет им. В.Н. Каразина

Институт вычислительной математики РАН

Военно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н.Е. Жуковского

Т Р У Д Ы
МЕЖДУНАРОДНЫХ
ШКОЛ-СЕМИНАРОВ
«МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ
ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Выпуск 2



Орел • 2003

Печатается по решению организационного комитета Международных школ-семинаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

Организационный комитет

профессор Гандель Ю.В. (Украина)
профессор Лифанов И.К. (Россия)
профессор Пивень В.Ф. (Россия)
учёный секретарь оргкомитета
кандидат физ.-мат. наук Аксютин А.А. (Россия)

Редакционная коллегия

Пивень В.Ф. – ответственный редактор
Гандель Ю.В.
Лифанов И.К.

Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Выпуск 2.
Орёл. ОГУ. 2003. – 81 с.

В сборнике представлены статьи участников Международных школ-семинаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школ-семинаров.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем теории фильтрации, гидродинамики и теплопроводности, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, численных методов и других методов математической физики.

Компьютерная вёрстка Федяев Ю.С.

Сборник статей издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00063, 03-01-96433).

© Оргкомитет школ-семинаров «МДОЗМФ», 2003 г.

© Авторы статей, 2003 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Научная школа «Математическое моделирование в гидродинамике и физике» Орловского государственного университета	5
2. Аксютин А.А. Использование потенциала простого слоя для решения двумерных граничных задач о дебите системы скважин в неоднородных слоях	7
3. Буравлев И.В. Исследование продвижения двух жидкостей различной плотности и вязкости в кусочно-однородном слое	16
4. Верещагин Д.А. Термодинамические потенциалы и скорость звука в неидеальных газах	20
5. Golubev G.V. On the filtration-capacitive nonhomogeneous porous stratum parameters identification problem by measuring results	25
6. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Фильтрационные течения в среде с границами раздела в виде двух концентрических окружностей	28
7. Квасов А.А. Задача об исследовании шлейфов вымываемых загрязнений при работе системы скважин	32
8. Марков О.И. О повышении эффективности ветви термоэлемента при линейном законе распределения концентрации носителей	37
9. Никольский Д.Н. Вычисление скорости перемещения поверхности раздела жидкостей различной вязкости методом дискретных особенностей	42
10. Пивень В.Ф. Интегральные уравнения задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородном слое	47
11. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование двумерного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое со степенным законом изменения его проводимости.....	53
12. Пивень В.Ф., Фролов М.А. Исследование интерференции скважин при нестационарной фильтрации упругой жидкости с прямолинейным контуром питания	64

13. Скрыбин Г.В.	Два способа понижения сингулярности интегрального уравнения на примере задачи о дебите скважины	68
14. Шестерин Д.Е.	Исследование работы сложного водозабора в однородном грунте с источником загрязнения.....	76

НАУЧНАЯ ШКОЛА
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ГИДРОДИНАМИКЕ И ФИЗИКЕ»
ОРЛОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Фундаментальные направления работы школы:

1. Создание и изучение новых математических моделей в теории фильтрации, аэро-гидродинамике и теоретической физике.
2. Разработка новых аналитических и численных методов решения граничных задач математической физики.
3. Исследование конкретных актуальных проблем практики:
 - эксплуатация месторождений нефти и газа,
 - разработка водоносных пластов грунта при наличии в них источников загрязнения,
 - мониторинг окружающей среды.

Организатор и научный руководитель школы – доктор физико-математических наук, профессор Пивень Владимир Федотович

Школа готовит через аспирантуру специалистов высшей квалификации – кандидатов физико-математических наук по специальностям: 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ и 01.04.02 – теоретическая физика.

Выпускники физико-математического факультета Орловского госуниверситета – активные участники школы А.А. Аксютин., А.А. Квасов, Д.Н. Никольский, С.Л. Ставцев, М.А. Фролов защитили в 2000-2003 годах кандидатские диссертации.

При школе постоянно работает научный семинар «Проблемы гидродинамики» (рук. профессор В.Ф. Пивень), на заседаниях которого апробируются диссертационные работы, докладываются и обсуждаются материалы научных статей, дипломные работы студентов. На семинарах заслушиваются доклады преподавателей и аспирантов не только нашего университета, но и других вузов Орла, Москвы, Харькова (Украина).

Участники школы выступили организаторами IX, X и XI Международных симпозиумов «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» («МДОЗМФ»), которые прошли в Орловском госуниверситете и Херсонском университете (Украина). Они участвовали в издании научных трудов и программ этих симпозиумов.

На базе этой школы организованы и проведены в Орловском госуниверситете три Международных школы-семинара «МДОЗМФ-2000», «МДОЗМФ-2002» и «МДОЗМФ-2003» молодых ученых России и Украины. На этих школах-семинарах выступили с обзорными докладами академик РАН В.В. Воеводин, доктора наук, профессора А.И. Желанников, И.К. Лифанов, В.Ф. Пивень, Е.Е. Тыртышников (Россия), Ю.В. Гандель (Украина). По итогам работы школ изданы научные труды. Второй выпуск этих трудов публикуется в настоящем сборнике.

Научная работа школы ведется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00063 на 2001–2003 г.г., 03-01-96433 на 2003–2005 г.г.).

Школа поддерживает тесные научные связи и выполняет совместные научные проекты с факультетом вычислительной математики и кибернетики МГУ, Институтом вычислительной математики РАН, Институтом математического моделирования РАН, Военно-воздушной инженерной академией им. проф. Н.Е. Жуковского, ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского».

Приносим глубокую благодарность ректору Орловского госуниверситета профессору Ф.С. Авдееву за финансовую помощь в проведении IX Международного симпозиума «МДОЗМФ-2000», Международных школ-семинаров «МДОЗМФ» и докторам физико-математических наук, профессорам Ю.В. Ганделю, И.К. Лифанову за совместное научное творчество.

Профессор В.Ф. Пивень, кандидаты физико-математических наук А.А. Аксюхин, А.А. Квасов, Д.Н. Никольский, С.Л. Ставцев, М.А. Фролов, аспиранты И.В. Буравлёв, Ю.С. Федяев.

Октябрь, 2003 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ О ДЕБИТЕ СИСТЕМЫ СКВАЖИН В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ¹⁾

А.А. Аксюхин

Россия, г. Орел, ОГУ, aksjuhin@au.ru

Ставится и решается двумерная граничная задача о дебите системы скважин, работающих в неоднородных слоях. В отличие от известных работ [1-4], проводимость слоя меняется скачком на границе сопряжения и в каждой из областей моделируется сильно отличающимися друг от друга непрерывными функциями координат. Использование потенциала простого слоя позволяет свести задачу к системе слабосингулярных интегральных уравнений типа Фредгольма I и II рода и интегральных соотношений. Предлагается метод численного решения полученной системы.

1. Рассмотрим двумерную стационарную напорную фильтрацию несжимаемой вязкой жидкости к системе совершенных скважин в неоднородных слоях грунта. Пусть область фильтрации D представляет собой тонкий слой, расположенный на плоскости, где выбраны декартовы координаты x, y . Пусть гладкая простая (без самопересечений) кривая L делит область D на части D_1 и D_2 , проводимости которых $P_1(M)$ и $P_2(M)$ моделируются положительными функциями координат точки $M(x, y)$ и имеют непрерывные первые производные по x и y в соответствующих областях. Причем, $P_\nu(M) = K_\nu(M)H(M)$, $\nu = 1, 2$, где $K_\nu(M)$ – проницаемость среды в области D_ν , $H(M)$ – толщина слоя. В отличие от известных работ [1-4], проводимости $P_1(M)$ и $P_2(M)$ моделируются различными математическими функциями. Движение жидкости к системе скважин в области D_ν будем характеризовать скоростью течения жидкости $\vec{V}_\nu(M)$ и квазипотенциалом скорости течения $\varphi_\nu(M)$, которые удовлетворяют закону Дарси и уравнению неразрывности, записанными в безразмерной форме [3]:

$$\vec{V}_\nu(M) = K_\nu(M) \nabla \varphi_\nu(M), \operatorname{div} \vec{V}_\nu = 0, M \in D_\nu, \nu = 1, 2. \quad (1.1)$$

Следуя [2, 3], из выражений (1.1) перейдем к эллиптическому уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P_\nu(M) \frac{\partial \varphi_\nu(M)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_\nu(M) \frac{\partial \varphi_\nu(M)}{\partial y} \right) = 0, M \in D_\nu, \nu = 1, 2. \quad (1.2)$$

На границе L областей D_1 и D_2 выполняются условия сопряжения:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M), K_1^+(M) \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ = K_2^-(M) \left(\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^-, M \in L, \quad (1.3)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 01-01-00063, 02-01-06460, 03-01-96433).

где знаком «+» (или «-») обозначены предельные значения соответствующих величин, при подходе границы L со стороны (или противоположной стороны) положительной нормали \vec{n}_M к границе в точке M .

Если область D содержит сингулярную линию L_0 , на которой проницаемость слоя обращается в ноль, либо – бесконечность, то на этой кривой выполняется условие:

$$P_v(M) \frac{\partial \varphi_v(M)}{\partial n_M} = 0, \text{ либо } \varphi_v(M) = 0, \quad v = 1, 2, \quad M \in L_0. \quad (1.4)$$

В том случае, если область D среды полностью или частично ограничена контуром питания, который будем моделировать гладкой (либо кусочно-гладкой) простой кривой L_Π , то на нём для квазипотенциалов скоростей выполняется условие:

$$\varphi_v(M) = \alpha(M), \quad v = 1, 2, \quad M \in L_\Pi, \quad (1.5)$$

где $\alpha(M)$ – заданная непрерывная функция координат точек границы L_Π .

Пусть m скважин произвольно расположены в области фильтрации, но ни одна из них не попадает на границы L , L_0 , L_Π . Будем моделировать каждую эксплуатационную скважину стоком, а нагнетательную – источником с мощностями, равными приведённым дебитам скважин q_μ , $\mu = 1, \dots, m$. Под приведённым дебитом понимают расход жидкости через фильтр скважины за единицу времени, отнесённый к длине фильтра и к коэффициенту проницаемости среды в точке забоя скважины. Контур каждой скважины будем моделировать окружностью $L_{C\mu}$ малого, по сравнению с размерами области D_v , радиуса $R_{C\mu}$, $\mu = 1, \dots, m$. Давления на границах $L_{C\mu}$ полагаются постоянными и заданными в точках $M_{C\mu} \in L_{C\mu}$:

$$\varphi_v(M_{C\mu}) = C_\mu, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad v = 1 \text{ или } 2, \quad (1.6)$$

где C_μ – известные константы.

В отсутствии границ L , L_Π течение в области D описывает квазипотенциал $\phi_1(M)$, если проводимость среды изменяется по закону $P_1(M)$, или квазипотенциал $\phi_2(M)$, если проводимость среды – $P_2(M)$. Функции $\phi_v(M)$, $v = 1, 2$ имеют особенности в точках $M_{C\mu}$ и на границе L_0 , являются решениями уравнения (1.2), удовлетворяют условию (1.4) и содержат искомые мощности q_μ , $\mu = 1, \dots, m$ источников и стоков:

$$\phi_1(M) = \sum_{\mu=1}^{m_1} q_\mu \tilde{\phi}_\mu(M), \quad \phi_2(M) = \sum_{\mu=m_1+1}^m q_\mu \tilde{\phi}_\mu(M), \quad (1.7)$$

где $\tilde{\phi}_\mu(M)$, $\mu = 1, \dots, m$ – известные функции координат, m_1 – количество скважин в области D_1 .

Для решения задачи (1.2)-(1.7) искомые квазипотенциалы скоростей течения будем искать в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \phi_\nu(M) + \varphi_\nu^*(M), \quad M \in D_\nu \setminus \Gamma, \quad \nu = 1, 2, \quad (1.8)$$

где $\Gamma = L \cup L_0 \cup L_\Pi \cup \bigcup_{\mu=1}^m L_{C\mu}$, а $\varphi_\nu^*(M)$ – квазипотенциалы возмущения, обусловленные наличием границ L и L_Π . Причём, когда область D не ограничена, потребуем выполнения следующего условия в бесконечности для $\varphi_1^*(M)$ [1, 3]:

$$\varphi_1^*(M) \Rightarrow 0, \quad r_{MN} \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где $N \in L$, а r_{MN} – расстояние между точками N и M .

2. Сведём задачу о дебите скважин к системе интегральных уравнений. Для этого квазипотенциалы $\varphi_\nu^*(M)$ будем моделировать в областях D_ν потенциалами простого слоя, распределёнными с плотностями g_ν и f_ν , $\nu = 1, 2$ вдоль границ L и L_Π , и имеющими вид:

$$\varphi_\nu^*(M) = \int_L g_\nu(N) P_\nu(N) \Phi_\nu(M, N) dl_N + \int_{L_\Pi} f_\nu(T) P_\nu(T) \Phi_\nu(M, T) dl_{\Pi T}, \quad (2.1)$$

$$M \in D_\nu \setminus \Gamma, \quad \nu = 1, 2, \quad N \in L, \quad T \in L_\Pi,$$

где $\Phi_\nu(M, N)$ (и $\Phi_\nu(M, T)$) – фундаментальные решения уравнения (1.2), описывающие сток единичной мощности в слое проводимости $P_\nu(M)$, $\nu = 1, 2$. Функции $\Phi_\nu(M, N)$, $\Phi_\nu(M, T)$ удовлетворяют условию (1.4).

Следуя [5], функции (2.1), а также их нормальные производные в точке $M \in L$ непрерывно продолжим на границы L , L_Π и найдём предельные значения этих функций:

$$\left(\varphi_\nu^*(M)\right)^\pm = \varphi_\nu^*(M), \quad M \in L \quad \text{и} \quad \left(\varphi_\nu^*(M)\right)^\pm = \varphi_\nu^*(M), \quad M \in L_\Pi, \quad \nu = 1, 2; \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{1,2}^*(M)}{\partial n_M}\right)^\pm = \frac{\partial \varphi_{1,2}^*(M)}{\partial n_M} \mp \frac{g_{1,2}(M)}{2}, \quad M \in L. \quad (2.3)$$

Такой выбор потенциалов возмущений позволяет перейти к слабосингулярным интегральным уравнениям и решать их известными [3, 5, 6] численными методами. Причём, функции $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu = 1, 2$ уже удовлетворяют уравнению (1.4). При подстановке функций (2.1)-(2.3) с учётом (1.8) в граничные условия (1.3), (1.5), (1.6) получим систему четырёх интегральных уравнений и m интегральных соотношений:

$$\int_L g_1(N) P_1(N) \Phi_1(M, N) dl_N + \int_{L_\Pi} f_1(T) P_1(T) \Phi_1(M, T) dl_{\Pi T} + \phi_1(M) - \quad (2.4)$$

$$- \int_L g_2(N) P_2(N) \Phi_2(M, N) dl_N - \int_{L_\Pi} f_2(T) P_2(T) \Phi_2(M, T) dl_{\Pi T} - \phi_2(M) = 0, \quad M \in L;$$

$$\left[\int_L g_1(N)P_1(N) \frac{\partial \Phi_1(M, N)}{\partial n_M} dl_N + \int_{L_{\Pi}} f_1(T)P_1(T) \frac{\partial \Phi_1(M, T)}{\partial n_M} dl_{\Pi T} - \frac{g_1(M)}{2} + \frac{\partial \phi_1(M)}{\partial n_M} \right] \cdot [1 + \Lambda(M)] - [1 - \Lambda(M)] \cdot \left[\frac{\partial \phi_2(M)}{\partial n_M} + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + \int_L g_2(N)P_2(N) \frac{\partial \Phi_2(M, N)}{\partial n_M} dl_N + \int_{L_{\Pi}} f_2(T)P_2(T) \frac{\partial \Phi_2(M, T)}{\partial n_M} dl_{\Pi T} + \frac{g_2(M)}{2} \right] = 0,$$

$$\text{где } M \in L, \Lambda(M) = \frac{K_1^+(M) - K_2^-(M)}{K_1^+(M) + K_2^-(M)};$$

$$\int_L g_\nu(N)P_\nu(N)\Phi_\nu(M, N)dl_N + \int_{L_{\Pi}} f_\nu(T)P_\nu(T)\Phi_\nu(M, T)dl_{\Pi T} + \phi_\nu(M) = \alpha(M), \quad M \in L_{\Pi}, \nu = 1, 2; \quad (2.6)$$

$$\int_L g_\nu(N)P_\nu(N)\Phi_\nu(M_{C_\mu}, N)dl_N + \int_{L_{\Pi}} f_\nu(T)P_\nu(T)\Phi_\nu(M_{C_\mu}, T)dl_{\Pi T} + \phi_\nu(M_{C_\mu}) = C_\mu, \quad M_{C_\mu} \in L_{C_\mu}, \mu = 1, \dots, m_1 \text{ при } \nu = 1; \mu = m_1 + 1, \dots, m \text{ при } \nu = 2. \quad (2.7)$$

Выражения (2.4) и (2.6) являются неоднородными интегральными уравнениями первого рода типа Фредгольма с логарифмической особенностью. Формула (2.5) выражает неоднородное слабосингулярное интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма. Число интегральных соотношений (2.7) равно m .

Если границей области D_2 является замкнутый контур L , а область D_1 содержит бесконечно-удалённые точки, то условие (1.9) в любой из этих точек M^* принимает вид:

$$\int_L g_1(N)P_1(N)\Phi_1(M^*, N)dl_N + \int_{L_{\Pi}} f_1(T)P_1(T)\Phi_1(M^*, T)dl_{\Pi T} = 0, \quad r_{M^*N} \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Совместное решение системы интегральных уравнений (2.4)-(2.6) и соотношений (2.7), (при необходимости и (2.8)) позволяет определить плотности $g_\nu(N)$, $f_\nu(T)$, $\nu = 1, 2$ и мощности особенностей q_μ , $\mu = 1, \dots, m$.

Зная их, скорость течения можно найти по формуле:

$$\vec{V}_\nu(M) = K_\nu(M) \left[\nabla \phi_\nu^*(M) + \int_L g_\nu(N)P_\nu(N)\nabla_M \Phi_\nu(M, N)dl_N + \int_{L_{\Pi}} f_\nu(T)P_\nu(T)\nabla_M \Phi_\nu(M, T)dl_{\Pi T} \right], \quad M \in D_\nu \setminus \Gamma, \nu = 1 \text{ или } 2. \quad (2.9)$$

3. Интегральное уравнение (2.4)–(2.6) совместно с соотношениями (2.7) решим численно, используя метод дискретных особенностей [5, 6]. Численное решение уравнений этой системы заключается в замене непрерывных на границах L и L_{Π} подынтегральных функций совокупностью их значений в дискретных точках этих кривых и переходу от интегральных выражений к системе алгебраических.

Кривые L и L_{Π} зададим в параметрическом виде. Обозначим за $\vec{r}_N(s)$ и $\vec{r}_T(\sigma)$ радиусы-векторы точек $N \in L$ и $T \in L_{\Pi}$, где $s \in [0, S]$ и $\sigma \in [0, \Sigma]$ – параметры длин дуг кривых L и L_{Π} , а S и Σ – их длины. Кривую L разобьём равномерно по параметру s с шагом h_1 на n_1 точек, а кривую L_{Π} – по параметру σ с шагом h_2 на n_2 точек. Множество из n_1 точек на кривой L обозначим $E = \{s_k, k = 1, \dots, n_1\}$, а множество точек границы L_{Π} обозначим $\Xi = \{\sigma_i, i = 1, \dots, n_2\}$. Середины отрезков $[s_k, s_{k+1}]$ составят множество $E_0 = \{s_{0k}, k = 1, \dots, n_1\}$, причём для замкнутого контура L : $s_{n_1+1} = s_1$. А середины отрезков $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ составят множество $\Xi_0 = \{\sigma_{0i}, i = 1, \dots, n_2\}$ (для замкнутой границы L_{Π} $\sigma_{n_2+1} = \sigma_1$). Подынтегральные выражения в уравнениях (2.4), (2.6) и соотношениях (2.7) представим в параметрическом виде, а затем заменим интегралы по квадратурным формулам и выразим dl_N через h_1 , а $dl_{\Pi T}$ – через h_2 . При этом получим систему $2(n_1 + n_2) + m$ алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_1} g_{1k} \omega_1(s_k, s_{0\tau}) h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{1i} \omega_1(\sigma_i, s_{0\tau}) h_2 + \phi_1(s_{0\tau}) - \\ & - \sum_{k=1}^{n_1} g_{2k} \omega_2(s_k, s_{0\tau}) h_1 - \sum_{i=1}^{n_2} f_{2i} \omega_2(\sigma_i, s_{0\tau}) h_2 - \phi_2(s_{0\tau}) = 0, \quad \tau = 1, \dots, n_1; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^{n_1} g_{1k} \Omega_1(s_k, s_{0\tau}) h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{1i} \Omega_1(\sigma_i, s_{0\tau}) h_2 - \frac{g_{1\tau}}{2} + \dot{\phi}_1(s_{0\tau}) \right] \cdot [1 + \Lambda(s_{0\tau})] - \\ & - \left[\sum_{k=1}^{n_1} g_{2k} \Omega_2(s_k, s_{0\tau}) h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{2i} \Omega_2(\sigma_i, s_{0\tau}) h_2 + \frac{g_{2\tau}}{2} + \dot{\phi}_2(s_{0\tau}) \right] \cdot [1 - \Lambda(s_{0\tau})] = 0, \\ & \tau = 1, \dots, n_1; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_1} g_{vk} \omega_v(s_k, \sigma_{0j}) \cdot h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{vi} \omega_v(\sigma_i, \sigma_{0j}) \cdot h_2 + \phi_v(\sigma_{0j}) = \alpha(\sigma_{0j}), \\ & j = 1, \dots, n_2; \quad v = 1, 2; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_1} g_{vk} \omega_v(s_k, M_{C\mu}) \cdot h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{vi} \omega_v(\sigma_i, M_{C\mu}) \cdot h_2 + \phi_v(M_{C\mu}) = C_{\mu}, \\ & \mu = 1, \dots, m_1 \text{ при } v = 1; \quad \mu = m_1 + 1, \dots, m \text{ при } v = 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В выражениях (3.1)–(3.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
P_v(N)\Phi_v(N, M)dl_N &= \omega_v(s_k, s_{0\tau})h_1, \quad P_v(T)\Phi_v(T, M)dl_{\Pi T} = \omega_v(\sigma_i, s_{0\tau})h_2, \quad M \in L; \\
P_v(N)\Phi_v(N, M)dl_N &= \omega_v(s_k, \sigma_{0j})h_1, \quad P_v(T)\Phi_v(T, M)dl_{\Pi T} = \omega_v(\sigma_i, \sigma_{0j})h_2, \quad M \in L_{\Pi}; \\
P_v(N)\frac{\partial\Phi_v(N, M)}{\partial n_M}dl_N &= \Omega_v(s_k, s_{0\tau})h_1, \quad P_v(N)\frac{\partial\Phi_v(T, M)}{\partial n_M}dl_N = \Omega_v(\sigma_i, s_{0\tau})h_1, \quad M \in L; \\
P_v(N)\Phi_v(N, M_{C\mu})dl_N &= \omega_v(s_k, M_{C\mu})h_1, \quad P_v(T)\Phi_v(T, M_{C\mu})dl_{\Pi T} = \omega_v(\sigma_i, M_{C\mu})h_2, \\
M_{C\mu} \in L_{C\mu}; \quad \dot{\phi}_v(s_{0\tau}) &= \frac{\partial\phi_v(M)}{\partial n_M}, \quad M \in L; \quad g_{vk} = g_v(s_k), \quad g_{v\tau} = g_v(s_{0\tau}), \\
f_{vi} &= f_v(\sigma_i), \quad k = 1, \dots, n_1; \quad i = 1, \dots, n_2; \quad v = 1, 2; \quad \mu = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Если область фильтрации содержит бесконечно-удалённые точки, то к системе алгебраических уравнений (3.1)–(3.4) необходимо добавить ещё одно уравнение, полученное из выражения (2.8):

$$\sum_{k=1}^{n_1} g_{1k}\omega_1(s_k, r_{M^*N})h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{1i}\omega_1(\sigma_i, r_{M^*N})h_2 = 0, \quad (3.5)$$

где $r_{M^*N} \gg d$, d – характерный размер (например, линейный размер области D_2 для замкнутой границе L). При этом выражение (3.1) необходимо записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\gamma + \sum_{k=1}^{n_1} g_{1k}\omega_1(s_k, s_{0\tau})h_1 + \sum_{i=1}^{n_2} f_{1i}\omega_1(\sigma_i, s_{0\tau})h_2 + \phi_1(s_{0\tau}) - \\
- \sum_{k=1}^{n_1} g_{2k}\omega_2(s_k, s_{0\tau})h_1 - \sum_{i=1}^{n_2} f_{2i}\omega_2(\sigma_i, s_{0\tau})h_2 - \phi_2(s_{0\tau}) = 0, \quad \tau = 1, \dots, n_1,
\end{aligned} \quad (3.1')$$

где γ – дополнительное неизвестное, называемое регулирующей переменной [5]. Критерием правильности решения системы $2(n_1 + n_2) + m + 1$ алгебраических уравнений (3.1'), (3.2)–(3.5) будет выполнение неравенства:

$$\gamma \ll \min_{v,k,i,\mu} \{ |g_{vk}|, |f_{vi}|, |q_{\mu}| \}. \quad (3.6)$$

Для численного расчёта поля скоростей течения формулу (2.9) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_v(M) &= K_v(M)\nabla_M\phi_v(M) + K_v(M)\sum_{k=1}^{n_1} g_v(s_k)\nabla_M\omega_v(s_k, M)h_1 + \\
&+ K_v(M)\sum_{i=1}^{n_2} f_v(\sigma_i)\nabla_M\omega_v(\sigma_i, M)h_2, \quad M \in D_v \setminus \Gamma, \quad v = 1 \text{ или } 2.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

4. В качестве примера решения двумерных задач о дебите системы скважин в неоднородных слоях с использованием предложенной модели рассмотрим задачу о работе одной скважины ($m = 1$) в слое, проводимость которого моделируется в области D_1 функцией $P_1(M) = k_1 y_M^2$, а в области $D_2(M)$ – функцией $P_2(M) = k_2$, где k_1 и k_2 – заданные константы, а

толщина слоя $H(M) \equiv 1$. В качестве границы контура питания L_{Π} выберем окружность радиуса $a=1$ с центром в точке $M_1(x_1, y_1)$, и будем отсчитывать давление жидкости от этой кривой ($\alpha(M) = 0$). Границу сопряжения L будем моделировать окружностью радиуса $b = a/2$ с центром в точке $M_2(x_2, y_2)$. Контур скважины L_C моделируем окружностью малого радиуса $R_C = 10^{-4}a$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Окружности L_{Π} , L и L_C выберем так, чтобы они не имели общих точек, а область фильтрации D не содержала сингулярной линии L_0 . В качестве параметра разбиения окружностей L_{Π} , L удобно выбрать полярные углы θ и δ в полярных системах координат, связанных с центром окружностей. Вид квазипотенциалов $\phi_v(M)$ и фундаментальных решений $\Phi_v(M, N)$ в слоях с проводимостями $P_v(M)$, $v = 1, 2$ приведён в работах [2, 3].

Поле скоростей течения, рассчитанное численно по формулам (3.7) при $k_1 = k_2 = 1$, $C = 1$, $x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 2a$ представлено на рис. 1.

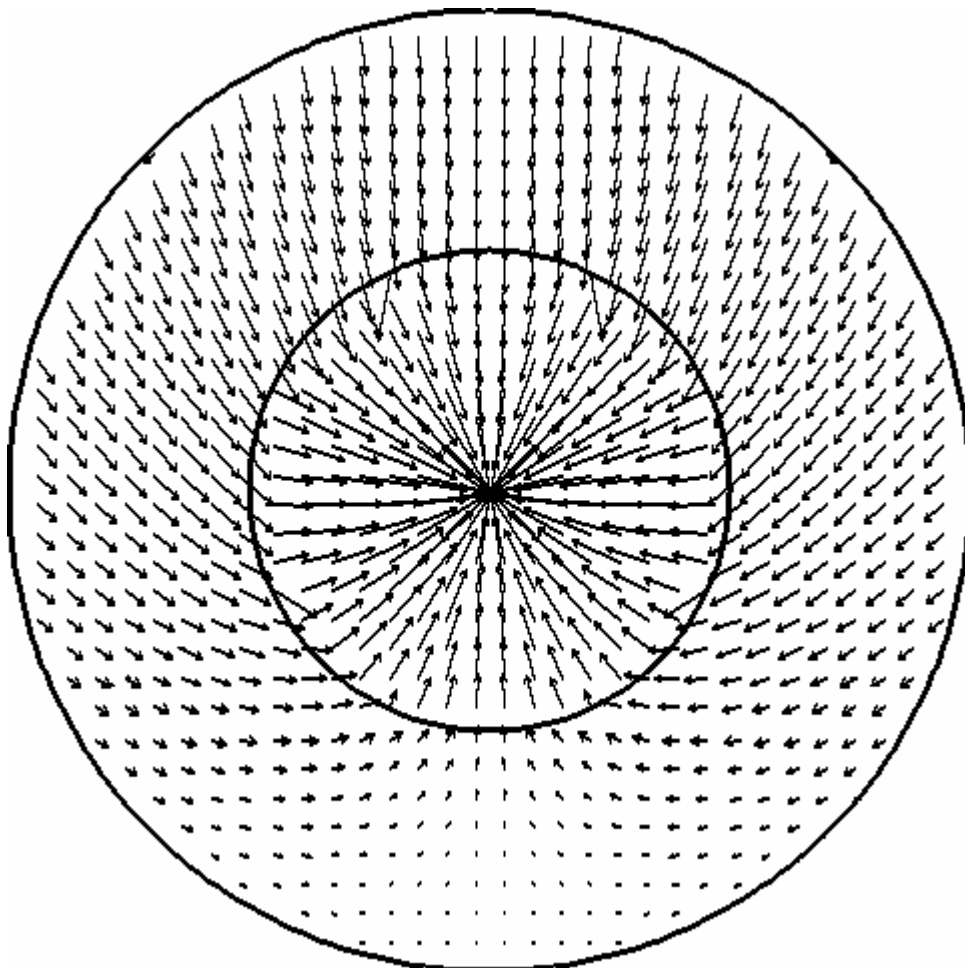


Рис. 1.

Исследования показывают, что дебит таким образом расположенной скважины возрастает с увеличением коэффициента k_1 . С ростом b (при фиксированном a) найденный дебит стремится к дебиту скважины,

рассчитанному по классической формуле Дюпюи [7] для слоя постоянной проводимости, при $b \rightarrow a$ (для $b = 0.95a$ отличие дебитов составляет всего лишь 0,35 %). Проведённые исследования дают основания считать постановку задачи о дебите системы скважин в неоднородном слое, скачок проводимости которого на границе сопряжения является функцией координат, и построенную численную модель решения этой задачи корректными.

Зависимость безразмерной плотности распределения $g_\nu(N)$, $\nu = 1, 2$ потенциала простого слоя от полярного угла θ (в градусах) точки $N \in L$ окружности L представлена на рис. 2 (положение скважины и границ при этом показано на рис. 1). Из рис. 2 видно, что плотность распределения потенциала простого слоя на границе различна по разные стороны от неё.

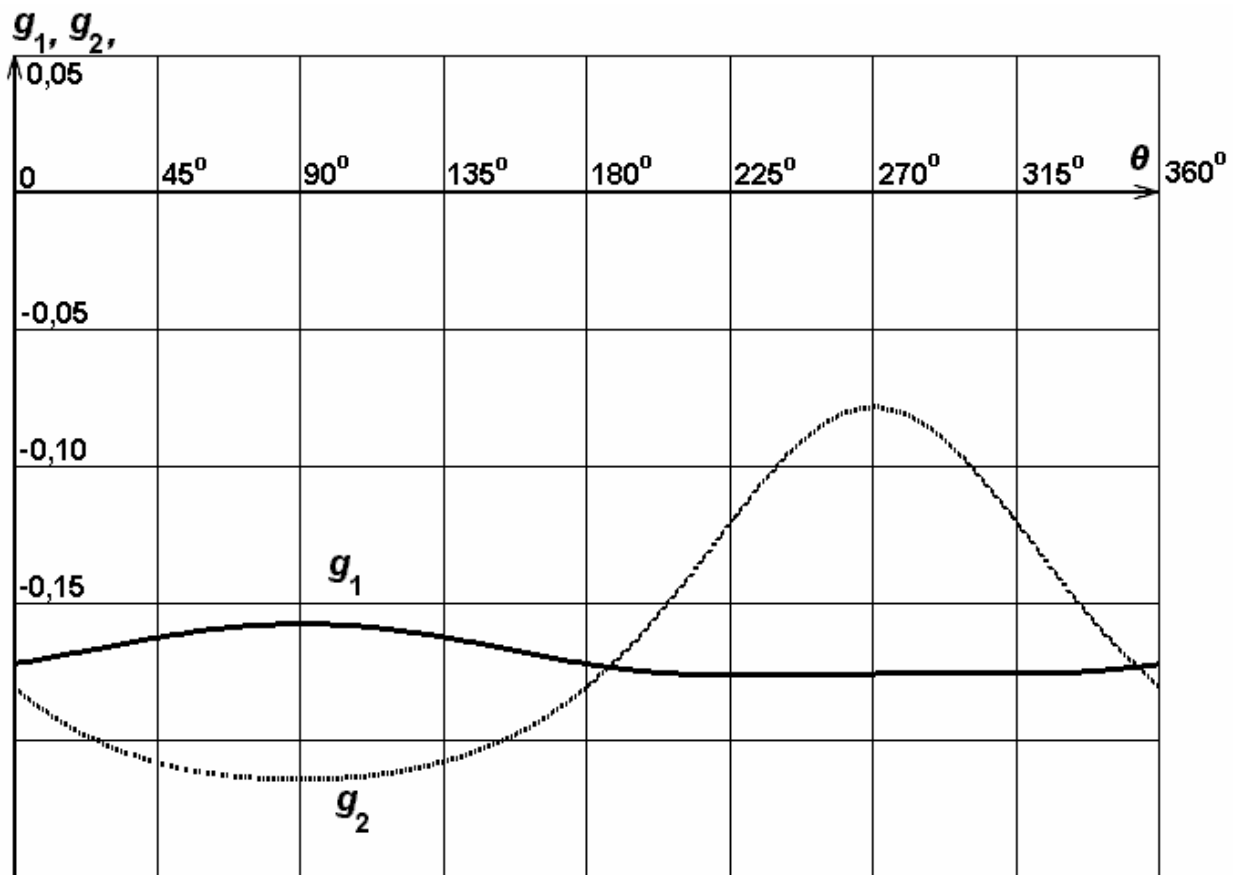


Рис. 2.

На рис. 3. показана картина течения жидкости к скважине при $x_1 = y_1 = y_0 = y_2 = 2a$, $x_0 = 1.8a$, $x_2 = 1.7a$.

Построенная математическая модель имеет общетеоретическую значимость. Рассмотренный класс задач и предложенный метод их решения имеет место для широкого круга физических процессов и явлений (гидродинамика, теория фильтрации, теплопроводность, электропроводность, электро- и магнитостатика), протекающих в неоднородных средах и описываемых уравнениями вида (1.1)–(1.2).

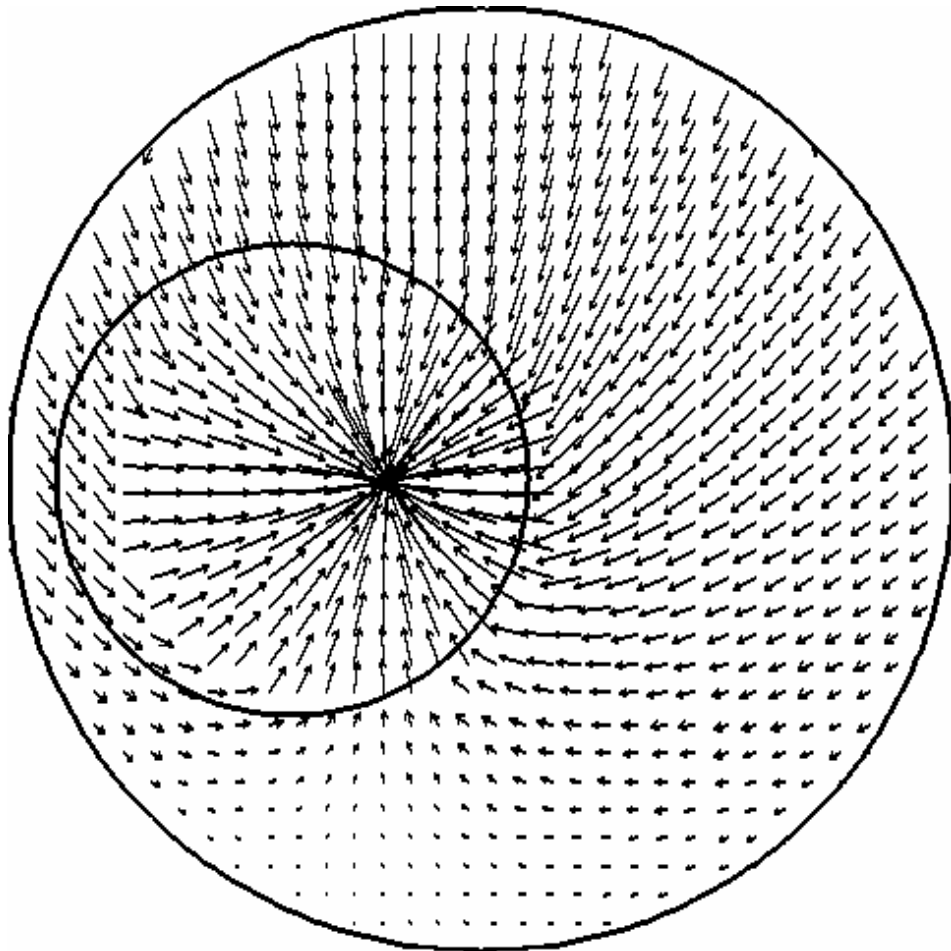


Рис. 3.

Литература.

1. Пивень В.Ф. Интегральное уравнение граничной задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородной среде // Труды IX Международного симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орёл, 2000. С. 343-348.
2. Аксюхин А.А., Пивень В.Ф. Определение дебита скважины в неоднородном слое, толщина которого изменяется по степенному закону // Вестник науки. Сборник трудов ученых Орловской области. В. 5. Т. 1. Орел. ОрёлГТУ. 1999. С. 284-289.
3. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Кандидатская диссертация. Орел. Орловский госуниверситет. 2000. - 153 с.
4. Фролов М.А., Аксюхин А.А.. Решение двумерных граничных задач о дебите скважин в неоднородных слоях грунта методом интегральных уравнений // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ-2001». Украина. Херсон, 2001. С. 364-373.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. - 520 с.
6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: «Янус-К». 2001. - 508 с.
7. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа. 1972. – 368 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДВИЖЕНИЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ И ВЯЗКОСТИ В КУСОЧНО- ОДНОРОДНОМ СЛОЕ

И.В. Буравлев

Орловский государственный университет

Ставится задача о продвижении границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в кусочно-однородном слое. Задача решается методами теории потенциалов. Исследуется влияние степени неоднородности на время эксплуатации скважины.

Рассмотрим двумерное движение границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в вертикальном слое проводимости $P = KH$ (K - коэффициент проницаемости слоя, H - его толщина). В области могут присутствовать источники течения. Кроме того, течение происходит в однородном поле силы тяжести. На вертикальной плоскости сечения слоя выберем декартовы оси координат (x, y) . Неподвижная граница Γ делит неограниченную область фильтрации D на области D_1 и D_2 , в которых слои имеют проводимости P_1 и P_2 . Полагаем, что $P_v = k_v$, k_v - постоянные, $v = 1, 2$. Скачок P на Γ обусловлен изменением коэффициента проницаемости.

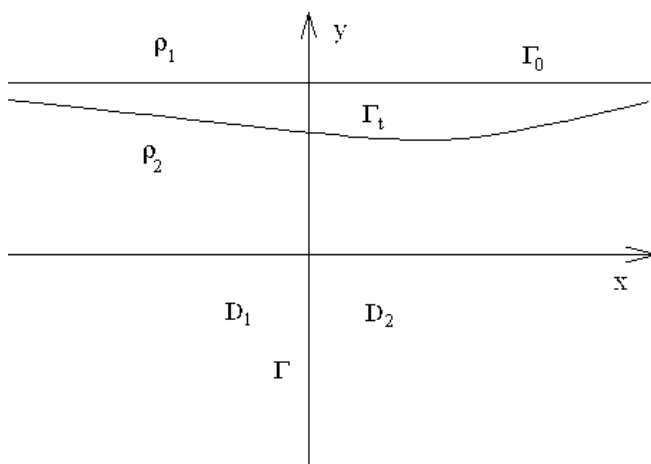


Рис. 1.

Пусть в области D имеется изменяющаяся со временем область D_t , ограниченная кривой Γ_t , в которой движется жидкость постоянной вязкости μ_2 и плотности ρ_2 . Вне области D_t находится жидкость постоянной вязкости μ_1 и плотности ρ_1 . Полагаем, что конфигурация области D_t и ее границы Γ_t в начальный момент времени $t = 0$ известна. Обозначим границу Γ_t в момент $t = 0$ как Γ_0 .

Движение жидкостей описывается системой уравнений, записанных здесь в безразмерном виде [1]:

$$\vec{v} = \frac{K}{\mu} \nabla \varphi, \quad (\varphi = \rho \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M - p), \quad (1)$$

$$\nabla \vec{v} = 0, \quad (2)$$

или следующим из системы (1) - (2) уравнением эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x_M} \left(P(M) \frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial x_M} \right) + \frac{\partial}{\partial y_M} \left(P(M) \frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial y_M} \right) = 0. \quad (3)$$

Здесь \vec{e}_g - орт силы тяжести и $M \in D \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t)$.

На границе Γ выполняются условия сопряжения:

$$\varphi^+(M,t) = \varphi^-(M,t), \quad k_1 \left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial n_M} \right)^+ = k_2 \left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma. \quad (4)$$

Здесь “+” (“-”) обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе Γ со стороны нормали \vec{n} (или противоположной стороны).

На подвижной границе Γ_t выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости:

$$\begin{aligned} \varphi^+(M,t) - \varphi^-(M,t) &= (\rho_1 - \rho_2) \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M, \\ \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial n_M} \right)^+ &= \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma_t. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь нормаль направлена из D_t .

Решение уравнения (3) будем искать в виде $\varphi^+(M,t) = \mu_1 [\varphi_0 + \varphi_*]$, $\varphi^-(M,t) = \mu_2 [\varphi_0 + \varphi_*]$, где φ_0 - потенциал невозмущенного течения, φ_* - потенциал возмущения, где φ_0 учитывает наличие границы Γ .

Граничные условия (4) и (5) теперь можно переписать для квазипотенциала возмущения:

$$\begin{aligned} \varphi_*^+(M,t) &= \varphi_*^-(M,t), \\ (1 + \lambda_k) \left(\frac{\partial \varphi_*(M,t)}{\partial n_M} \right)^+ &= (1 - \lambda_k) \left(\frac{\partial \varphi_*(M,t)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_\mu) \varphi_*^+(M,t) - (1 + \lambda_\mu) \varphi_*^-(M,t) &= \alpha \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M \\ \left(\frac{\partial \varphi_*(M,t)}{\partial n_M} \right)^+ &= \left(\frac{\partial \varphi_*(M,t)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\lambda_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$, $\alpha = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\mu_2 + \mu_1}$, $\lambda_k = \frac{k_1 - k_2}{k_2 + k_1}$.

Скорость возмущения на бесконечности должна исчезать:

$$\varphi_*(M,t) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \quad K(M) |\nabla \varphi_*(M,t)| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right), \quad \text{при } r_{MN} \rightarrow \infty,$$

$M \notin \Gamma_t, N \in \Gamma_t$.

В начальный момент времени $t=0$ положение границы Γ_t определяется уравнением:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0(\theta), \quad \theta - \text{параметр.} \quad (8)$$

Движение границы описывается уравнением:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{K(M)}{2} [(\nabla\varphi_*(M,t))^+ + (\nabla\varphi_*(M,t))^-], \quad M \in \Gamma_t. \quad (9)$$

Таким образом, чтобы проследить эволюцию границы Γ_t , необходимо найти квазипотенциал, удовлетворяющий уравнению (3) и условиям (6) и (7), а затем границу Γ_t как решение уравнения (9) при начальном условии (8).

Далее, следуя статье [2], квазипотенциал возмущения будем искать в виде

$$\varphi_*(M,t) = \int_{\Gamma_t} g(N,t)P(N) \frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} dl_N, \quad M \in D_v, \quad v = 1,2,$$

здесь $\Phi(M,N)$ - фундаментальное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничному условию (4), а $g(N,t)$ - неизвестная функция.

Подставляя это представление в граничные условия (7) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g(M,t) - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} g(N,t)P(N) \frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_M} dl_N = 2\lambda_\mu \varphi_0(M,t) + \alpha \vec{e}_g \cdot \vec{r}_M, \quad M \in \Gamma_t,$$

относительно функции $g(N,t)$. При этом граничное условие для нормальной производной выполняется автоматически.

Далее, подставляя предельные значения квазипотенциала двойного слоя в дифференциальное уравнение движения границы, получим:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = K(M)\nabla\varphi_0(M,t) + \int_{\Gamma_t} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_N} \vec{V}_B(M,N) dl_N, \quad M \in \Gamma_t,$$

при этом скорость вихря \vec{V}_B выбирается так, чтобы удовлетворить граничным условиям на Γ . В случае канонических границ можно воспользоваться теоремой о прямой и теоремой об окружности. Например, в случае прямолинейной вертикальной границы в ядре интегрального уравнения под $\Phi(M,N)$ тогда надо понимать потенциал стока единичной мощности вычисленного по теореме о прямой. Таким образом, следует различать четыре случая:

- 1) $N \in D_2, M \in D_2$: $\Phi(M,N) = \Phi_0(M,N) - \lambda_k \Phi_0(M,\bar{N})$
- 2) $N \in D_2, M \in D_1$: $\Phi(M,N) = (1 + \lambda_k)\Phi_0(M,N)$
- 3) $N \in D_1, M \in D_1$: $\Phi(M,N) = \Phi_0(M,N) + \lambda_k \Phi_0(M,\bar{N})$
- 4) $N \in D_1, M \in D_2$: $\Phi(M,N) = (1 - \lambda_k)\Phi_0(M,N)$

где $\Phi_0(M,N)$ - потенциал единичного стока находящегося в точке N , а \bar{N} - точка, полученная отражением точки N относительно прямой. Аналогичным образом следует учесть границу раздела сред в потенциале $\varphi_0(M,t)$.

Ниже приведены результаты расчетов движения границы раздела жидкостей для случая вертикальной прямолинейной границы раздела сред. На рисунке 2 показаны положения границы раздела жидкостей при ее движении к стоку. При этом $\lambda_k = -0.3$, $\lambda_\mu = 0$, $\alpha = -0.25$. Кроме того, прослежена зависимость времени эксплуатации скважины от параметра λ_k (рисунок 3) и от ординаты скважины (рисунок 4). Из рисунка 3 видно, что с увеличением λ_k растет время эксплуатации, а из рисунка 4 видно, что время эксплуатации очень быстро увеличивается при удалении стока.

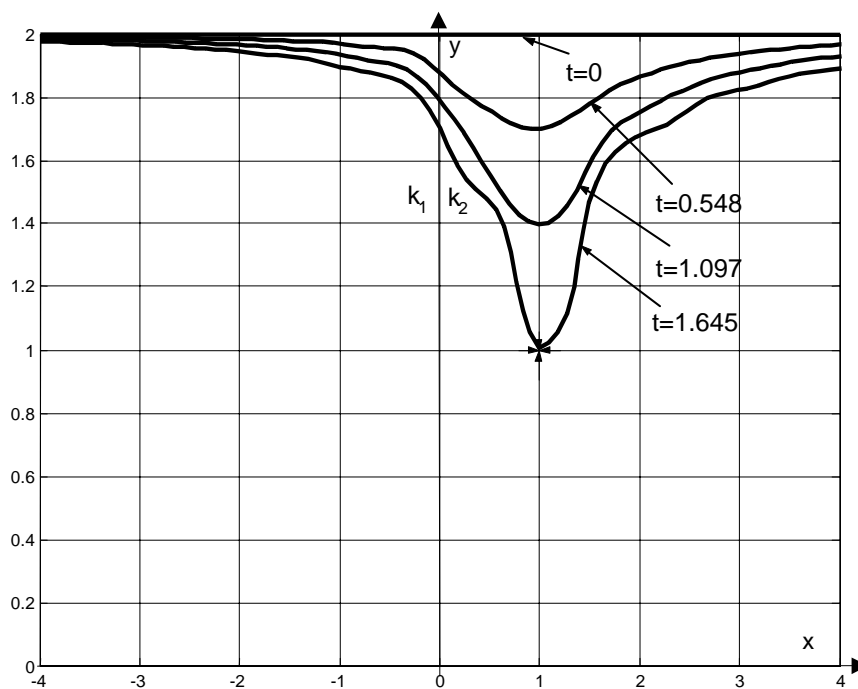


Рис. 2.

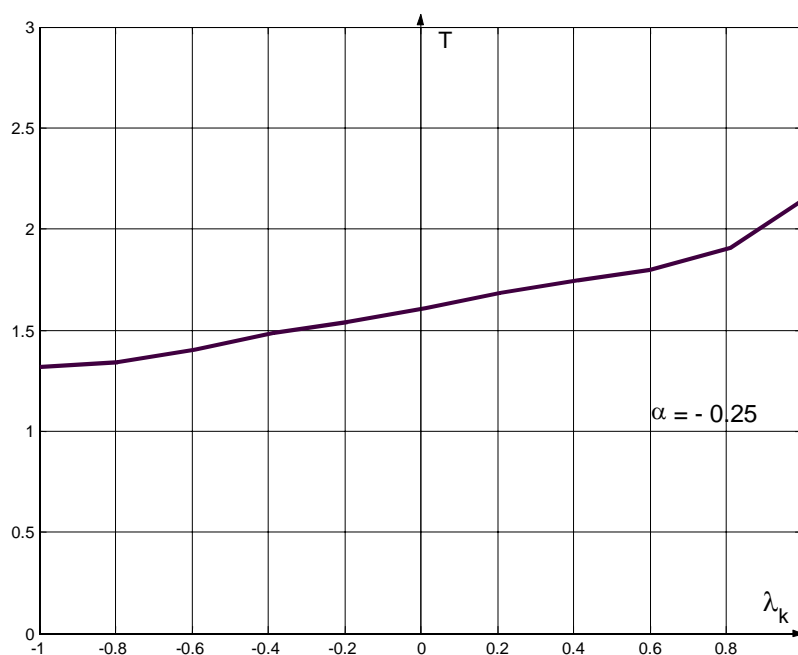


Рис. 3.

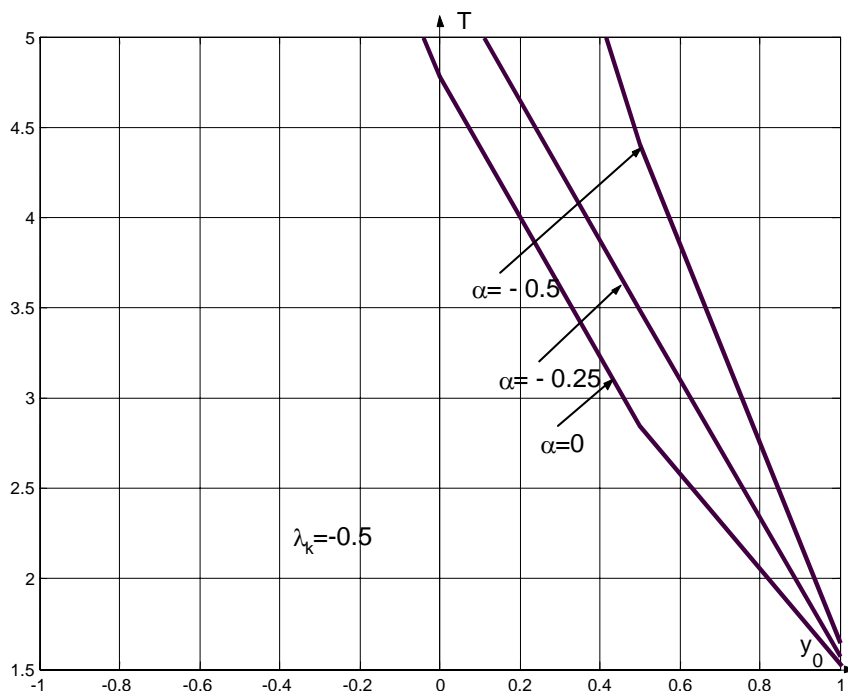


Рис. 4.

Литература

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. – Москва: Высшая школа, 1972. – 368 с.
2. Пивень В. Ф. Задача об эволюции границы раздела жидкостей различной плотности и вязкости в неоднородной среде. // Труды международных школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Орел. – 2002 – с. 69-74.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И СКОРОСТЬ ЗВУКА В НЕИДЕАЛЬНЫХ ГАЗАХ

Д.А. Верещагин

Калининградский государственный университет

verd@tphys.albertina.ru

Выведены общие формулы основных для термодинамических параметров для газов с уравнениями состояния неидеального газа. В явном виде получены соотношения определяющие зависимость скорости звука от давления и температуры в неидеальных средах. В качестве примера исследован характер поведения скорости звука как функции температуры и давления для газа Ван дер Ваальса и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Проблема вычисления скорости звука в газах имеет долгую историю. Первый теоретический расчет скорости звука в газе был сделан Ньютоном, который использовал гипотезу об изотермичности процесса

распространения звука. Однако, вычисленное им значение скорости звука для воздуха при нормальных условиях оказалось примерно на 20% меньше действительного значения.

Учет адиабатичности процесса распространения звука в газе, на которую впервые указал Лаплас, приводит при вычислении скорости звука в идеальном газе к известной формуле:

$$C_L = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (1)$$

которая для скорости звука в воздухе при нормальных условиях дает значение $C_L=330$ м/с², что хорошо согласуется с опытом. Как следует из формулы (1) скорость звука в идеальном газе не зависит от невозмущенного давления, но зависит от температуры. Однако для реальных газов зависимость звуковой скорости от параметров среды более сложная, в частности, характер распространения начинает зависеть от длины волны. Когда длина ультразвуковых волн становится очень малой, следует принимать во внимание молекулярную природу газа. Все это потребовало углубленной разработки математической стороны вопроса, связанной с выводом соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих процесс распространения звуковых волн в газе с учетом возникающих при этом тепловых эффектов.

Точные измерения скорости ультразвука в газах привели к открытию очень интересного явления. Было обнаружено, что в многоатомных газах при достаточно высоких ультразвуковых частотах скорость ультразвука претерпевает изменения, для таких газов имеет место дисперсия ультразвука. Одновременно с увеличением скорости ультразвука увеличивается его поглощение [1-3]. Объяснить наблюдаемые эффекты можно, только учитывая молекулярную структуру частиц газа. Расчеты скорости звука для не идеальных газов показывают [4,5], что получаемое значение в определенном диапазоне температур и давлений лучше согласуется с экспериментом, чем для идеального газа. Хорошо известно более общее, выражение для квадрата адиабатической скорости звука

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (2)$$

Однако формула неудобна для вычислений при произвольных уравнениях состояния среды, так как производная в правой части вычисляется при постоянной энтропии. Это требует, по сути, явного интегрирования уравнения $dS = 0$. Предлагаемая нами методика позволяет получить явные формулы для всех термодинамических величин при произвольном уравнении состояния вида:

$$P(T, V_1) = \frac{R_0 T}{V_1 - b} - \bar{P}(T, V_1) \quad (3)$$

Где P_1 – добавка к давлению идеального газа. Здесь приведем только выражение для энтропии

$$S = S_0 + R_0 \ln(V_1 - b) + C_{V_1} \ln(T) + \int_{\infty}^{V_1} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial T} \right)_{V_1} dV_1$$

и адиабаты

$$T(V_1 - b)^{\gamma-1} \exp\left(\frac{1}{C_{V_1}} \int_{\infty}^{V_1} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial T} \right)_{V_1} dV_1 \right) = const$$

Очевидно, что использование этих выражений при вычислении скорости звука по формуле (2) затруднительно. Однако можно рассмотреть альтернативный подход. Для этого, из соображений удобства, перейдем в соотношении к молярному объему $V_1 = V / \nu = M / \rho$, где V - объем, а ν - число молей.

$$c^2 = -\frac{V_1^2}{M} \left(\frac{\partial P}{\partial V_1} \right)_S \quad (4)$$

Здесь M - молярная масса вещества. Воспользовавшись методом якобианов, можно перейти от переменных (V_1, S) к переменным (V_1, T) .

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V_1} \right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V_1} \right)_T - \frac{T}{C_{V_1}} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V_1} \left(\frac{\partial S}{\partial V_1} \right)_T$$

Далее, используя соотношение Максвелла для квадрата адиабатической скорости звука, окончательно получаем:

$$c^2 = \frac{V_1^2}{M} \left[\frac{T}{C_{V_1}} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V_1}^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial V_1} \right)_T \right] \quad (5)$$

Использование уравнения позволяет в явной форме вычислить зависимость скорости звука от температуры и давления для неидеальных газов, подчиняющихся различным (в принципе любым) уравнениям состояния. Однако вычисленная по (5) явная формула для скорости звука содержит температуру и молекулярный объем, которые не являются независимыми, так как связаны термическим уравнением состояния $P = P(V_1, T)$. Для исследования зависимости скорости звука в среде от температуры или давления молекулярный объем V_1 должен быть исключен из явного выражения (5) с помощью указанного уравнения состояния, которое в совокупности с уравнением состояния можно рассматривать, как зависимость $C(P)$ (при $T = T_0$) или $C(T)$ (при $P = P_0$) в параметрической форме. Для идеального газа из (5) получаем формулу Лапласа.

Газ Ван дер Ваальса: Используя уравнение состояния газа Ван дер Ваальса:

$$p = \frac{R_0}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1^2} \quad (6)$$

для квадрата скорости звука из (6) получаем:

$$c^2 = \frac{\gamma R_0 V_1^2 T}{\mu (V_1 - b)^2} - \frac{2a}{\mu V_1} \quad (7)$$

В отличие от идеального газа скорость звука в газе Ван дер Ваальса зависит не только от температуры, но и от объема. Подставив из (6) температуру T в соотношение (7), можно получить зависимость скорости звука в газе Ван дер Ваальса от давления:

$$c^2 = \frac{\gamma R_0 V_1 P}{M(V_1 - b)} - \frac{a}{M} \left(\frac{\gamma}{V_1 - b} - \frac{2}{V_1} \right) \quad (8)$$

Ниже приведены графики зависимости скорости звука от давления для различных газов с использованием уравнения состояния Ван дер Ваальса.

На рис. 3 первой кривой соответствует постоянная адиабаты $\gamma = \frac{5}{6}$, что отвечает возбуждению трех поступательных и одной колебательной степеней свободы. Второй кривой соответствует постоянная адиабаты что отвечает возбуждению всех степеней свободы: поступательных, вращательных и колебательных. Отметим, что первая кривая лучше соответствует эксперименту в области малых давлений, а вторая - в области больших давлений. Это может объясняться тем, что при больших давлениях столкновения между молекулами происходит чаще, что повышает эффективность возбуждения внутренних степеней свободы. Это, в свою очередь, будет проявляться, как убыль постоянной адиабаты γ .

Аналогичные формулы получены для газов с уравнениями состояния в форме Бертло, Дитеричи, вириального разложения и других.

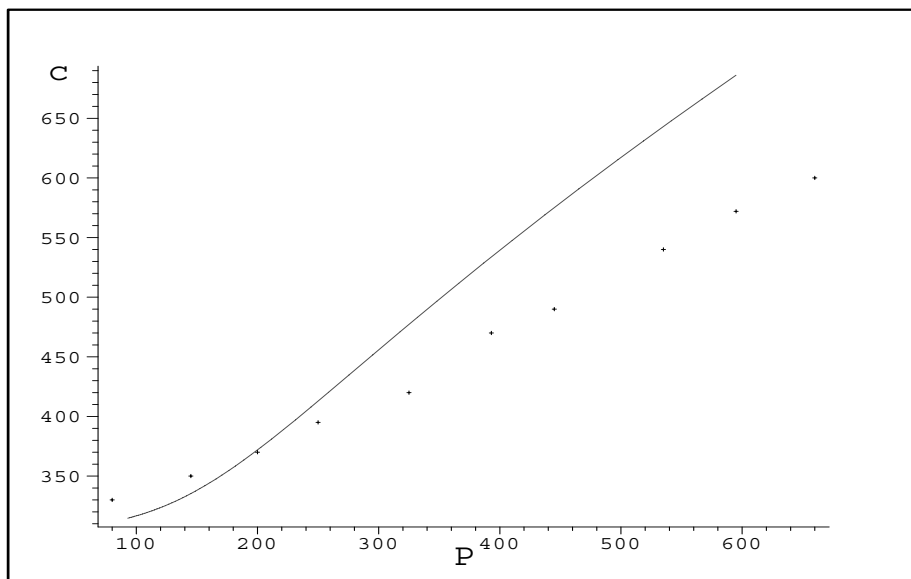


Рис. 1. Зависимость скорости звука от давления для аргона при $T_0 = 273K$ (скорость звука в м/с, давление в атм), \cdot - эксперимент.

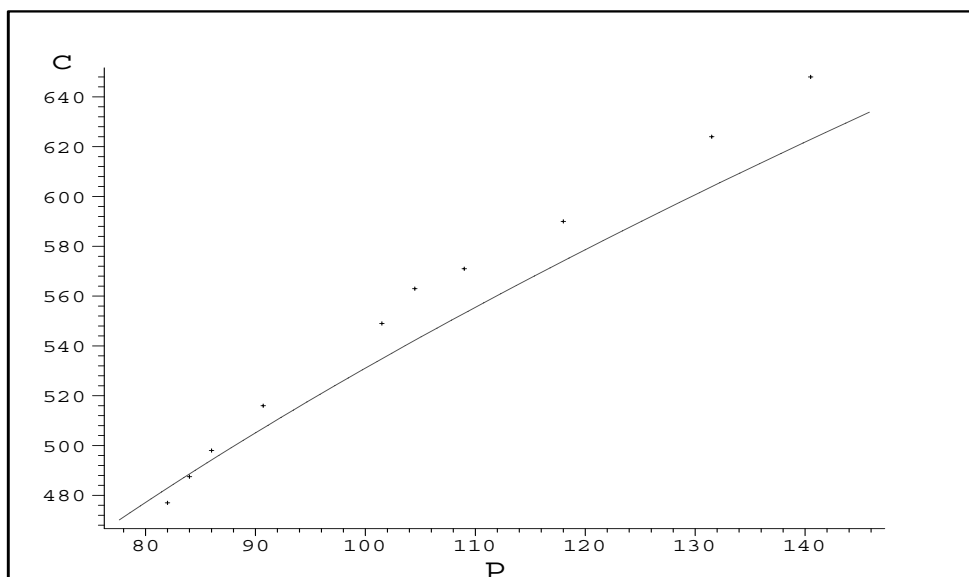


Рис. 2. Зависимость скорости звука от давления для этана при $T_0 = 273K$ (скорость звука в м/с, давление в атм), \cdot - эксперимент.

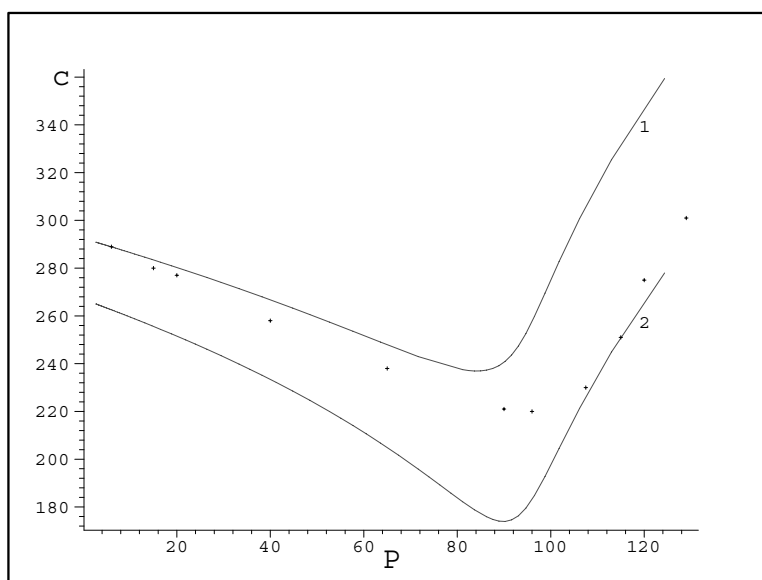


Рис. 3. Зависимость скорости звука от давления для углекислого газа при $T_0 = 273K$ (скорость звука в м/с, давление в атм), \cdot - эксперимент.

Литература

1. Красильников В.А. Звуковые и ультразвуковые волны М., Физматгиз. 1960. 560с.
2. Flugge S. Encyclopedia of Physics. V. XI/1. Acoustics I Springer - Verlag. Berlin - Gottingen - Heidelberg. 1961. P. 338-353.
3. Таблицы физических величин М., Атомиздат. 1976. 1006 с.
4. Leble S.B., Perelomova A.A., Kusmirek-Ochrymiuk M. Nonlinear Parameters and Sound Speed in Acoustics and its Evaluation for Real Gases and Liquids Hydroacoustics. 2001. V.4. P.139-142.
5. A. Perelomova Interaction of modes in nonlinear acoustics: theory and applications to pulse dynamics Gdansk. Technical University of Gdansk. P. 80-92.

УДК 532.546

**ON THE FILTRATION-CAPACITIVE NONHOMOGENEOUS POROUS
STRATUM PARAMETERS IDENTIFICATION PROBLEM BY
MEASURING RESULTS**

G.V. Golubev

Kazan State Technical University, e-mail: root@kaiadm.kazan.su

The engineering specifications analysis is taken as a basis, when filtration-capacitive parameters (FCP) identification methods are developed. Such engineering specifications is kept for the each exploited oil fields. The input data set is specified with that analysis and is used to formulate the corresponding mathematical problem. Different definitions of the FCP identification problem are determined with the opportunity of the different input data sets using. Explored and injected wells are simulated as discrete logarithm type singularities.

The filtration process in stratum of the oil-gas fields and the fullness of the extraction of oil-gas inventories enclosed in them are very depended on their nonhomogeneous. So the exploitation of methods of the identification of FCP of nonhomogeneous oil stratum, such as the hydroconductivity, the gas-conductivity, the hydroconductivity of the total water-oil flow and etc., is the very important problem of the underground hydromechanics. Calculations of the oil-gas fields condition are performed for some time ahead to plane the process of its operation with the using of the corresponding information in more early dates. Such calculations and the stratum pressure calculation for some time ahead as the particular case are based on the using of the FCP fields knowledge. The FCP fields knowledge is necessary to choice places for the drilling of reserve wells, when the mesh is compacted, for the determination of standing still zones dispositions and the choice of their clearing methods, for the optimisation problems solution and etc.

A number of nonlocal methods of FCP of nonhomogeneous stratum identification are developed by authors [1]–[3]. Methods allowing to determine the whole field of desired FCP in the given region simultaneously are understood as nonlocal methods by us. Methods of the problem solution, developed in the paper, are divided into two groups by the input data set, using by them. The definition of the first approach problem is based on the following input data set: pressure distribution in the stratum at a time moment (an isobar map) and values of the desired filtration parameter at some number of reference points. Their choice is defined by some rules. That approach is worked out for different models of filtration flows: one-phase two-dimensional unsteady filtration in the nonhomogeneous stratum; the plane joint filtration of two unmixed phases under condition that the capillary discontinuity on the phase section boundary is neglected; the gas filtration, describing with Leibenzon equation for nonhomogeneous stratum; the non-linear filtration of the high-viscosity fluid, according to “parametric” and “curvilinear” laws. So, that approach is derived for the broad class of filtration problems, that are met with in the practice of exploitation of oil-gas fields. A great number of test examples were solved by

that method. Good results were received during the identification of FCP of some real oil–gas fields by that method. Different calculating techniques were derived to implement that approach. They used: the finite difference approximation of the assumed equation; finite–elements representations of the desired function, different variations of the integral–relationships method. The recommendation of the choice of the specific numerical methods is made.

We shall examine some methods of the mathematical solving of formulated problems in more detail. The following equation was formed the basis of the mathematical modelling of the filtration process in the nonhomogeneous oil stratum:

$$[k\chi(\beta, p, x, y) p_x]_x + [k\chi(\beta, p, x, y) p_y]_y = ap_t + f(x, y, t), \quad (1)$$

where $k(x, y)$ is the unknown coefficient which evaluates filtration–capacitive characteristics of the oil stratum, $p(x, y, t)$ is the function of the stratum pressure. The representation of the $\chi(\beta, p, x, y)$ function depends on the choice of the filtration modelling. Here $\beta(x, y)$ is the “threshold” value of the filtration gradient, the filtration of the non–Newtonian fluid begins or the filtration velocity increases appreciably since that value; $f(x, y, t)$ is the density function. The analysis of the engineering specification allows to write that equation in the form, when the unknown value is the function $w = \sqrt{k}$. The equation (1), corresponding to the non–linear “parametric” law of the filtration, has the next form

$$\begin{aligned} & [w^2 Ha(|\nabla p| w - \lambda_1 \mu_0 \alpha) / (\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + (\nabla p)^2 w^2})]_x + \\ & + [w^2 Hb(|\nabla p| w - \lambda_1 \mu_0 \alpha) / (\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + (\nabla p)^2 w^2})]_y = \rho, \end{aligned} \quad (2)$$

where $a = p_x$, $b = p_y$, $\rho = (f + \beta H p_t) \mu$.

The Cauchy data completes the equation (2)

$$w|_l = \varphi(\tau), \quad (3)$$

The Cauchy data medium is necessary to close the Cauchy problem for the non–linear partial differential equation of the first kind with respect to unknown function w . Unknown coefficient k values, i. e. $w(x, y)$ function, are given on some points set, furnishing the digital medium of Cauchy data. The isobar map is defined at some moment of time. Hence, the stratum pressure field is known at the same time moment, i. e. coefficients of the equation (2) are known.

The mathematical problem is formulated so.

The function $w(x, y)$ satisfies the differential equation (2) in the domain D with the boundary Γ and takes known values (3) on the line l . It is in order to evaluate that function in the domain D . The domain D is the filtration space. The stratum pressure distribution is given in that space, and the coefficient $k(x, y)$ field is sought in it.

Some results of the numerical solution are like that. Algorithms of the problem numerical solution were attacked on the basis of listed methods. The solution of the one of test examples and the calculation for the real oil field are given further.

The test example. The solved problem had the exact analytical solution [4, p. 88] : $k = k_0(1 + \alpha x + \beta y)^2$. The case, when $k_0 = 2.03944 \text{ w. /}(m. K.)$, $\alpha = \beta = 0.4$ was examined. The number of wells was taken equal to 3. Coordinates of wells were given, The position of wells is shown in the figure 1, discharges of wells were equal to $Q_i = 5200 \text{ mw}$ ($i = 1, 2, 3$). The stratum pressure in the early time moment, when the stratum was not exploited, was taken equal to $p_s = 14.71 \text{ MPa}$.

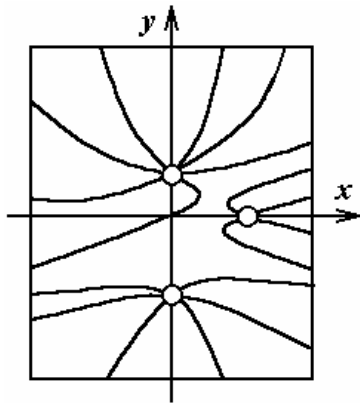


Figure 1

h	0.2	0.1	0.05	0.025
n_1	28	56	112	224
n_2	35	165	713	2941
δ	5.97	3.48	2.37	0.79
δ_1	3.53%	2.06%	1.28%	0.83%
δ_2	1.22%	0.54%	0.31%	0.20%

Calculations were made taking mesh width equal to 0.2; 0.1; 0.05; 0.025. Absolute and relative errors were calculated. Master data, generated in calculations, are presented in the Table 1. Here next designations were used: n_1 is the number of boundary mesh points, n_2 is the number of interior mesh points, δ is the maximum of absolute error in the domain, δ_1 is the maximum of relative error and δ_2 is the mean–relative error. Numerical results are sufficiently exact as a whole.

The practical example. The section of the central part of the stratum D_1 of the Bavly oil field (Tatarstan Republic) was examined. Its dimensions are equal to

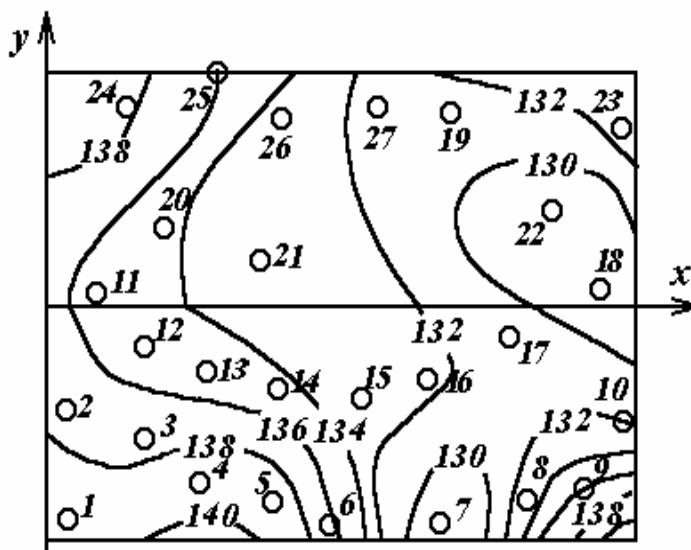


Figure 2

3 km × 1.8 km, and it is situated in the oil zone fully. There are 26 wells in that section, and their total discharge is equal to 1885.6 mw. Besides, yet another well stood idle. The isobar map of the section at the date at issue is shown in the figure 2. Real numbers of wells are replaced with conventional numbers. Another engineering specification was used in calculations, such as the

permeability map, the map of the stratum thickness and etc.

The stratum pressure is in flux from 12.75 MPa to 13.73 MPa, the closeness of isobar is absent. The hydroconductivity is changed chaotically from 1.784 to 19.273 w./(m. K.). Its change has not any law. The mesh width was equal to 200 m. There were 160 mesh points, including 112 interior and 48 boundary mesh points. Hydroconductivity values were given in some mesh points, placing on the boundary of the rectangle, i. e. on the Cauchy data medium, which was a part of the rectangle. Numerical solution results were correlated with experimental values, obtained with the using of the corresponding industrial map. The mean–relative error was equal to 14.58%. It is the sufficiently acceptable result, taking account of the gross data. The same calculation was done for another oil fields. Every time calculated FCP were correlated with experimental values. We received satisfactory results every time.

References

1. Golubev, G.V., Danilaev, P.G. & Tumashev, G.G. *The Definition of the Hydroconductivity of Nonhomogeneous Oil Fields with Nonlocal Methods*, Kazan State University, Kazan, 1978.
2. Golubev, G.V., Danilaev, P.G. *On the definition of filtration parameters fields with measurements results*, Pro. Int.Conf. on Development of Gasocondensate Fields, Section 3, Krasnodar, 1990.
3. Golubev, G.V. & Danilaev, P.G. *The determination of exploited oil seams FCP in high viscous oil production*, Pro. of Int. Conf. on Oil and Bitumens, V.6, Kazan, 1994, pp. 1913–1920.
4. Golubev, V.G. & Tumashev, G.G. *Filtration of Incompressible Fluids in Nonhomogeneous Porous Stratum*, Kazan State University, Kazan, 1972.

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СРЕДЕ С ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА В ВИДЕ ДВУХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ

А.А. Зайцев, А.Я. Шпилевой

Россия, Калининград, Калининградский государственный университет
theory@tphys.albertina.ru

Приведены общие решения задачи построения комплексных потенциалов фильтрационных течений для трехкомпонентной области с границами раздела в виде двух концентрических окружностей. В специальных случаях они представлены через тэта–функции Якоби.

1. Для изучения плоско–параллельных течений, подчиняющихся закону Дарси, используется комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y),$$

через который выражаются скорость фильтрации и давление [1]. В случае кусочно-однородных сред комплексные потенциалы для каждой области однородности определяются с помощью условий на границах раздела.

2. Пусть неоднородная среда имеет вид указанный на рисунке 1.

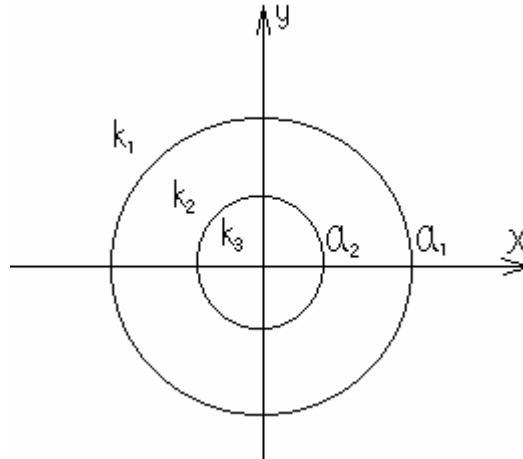


Рис. 1.

Среда разделена двумя концентрическими окружностями на области с коэффициентами проницаемости k_1 , k_2 , k_3 . Требуется определить комплексные потенциалы фильтрационных течений $W_1(z)$, $W_2(z)$, $W_3(z)$, если задана аналитическая функция $f(z)$, описывающая течение в безграничной однородной среде на всей плоскости. С помощью метода изображения особых точек [2, 3] или метода последовательного применения теоремы об окружности [4, 5] получены общие решения для различных течений в данной среде.

а) Особые точки функции $f(z)$ находятся в области $|z| > a_1$, тогда

$$\begin{aligned} W_1(z) &= f(z) - \lambda_1^2 \cdot \bar{f}\left(\frac{a_1^2}{z}\right) + (1 - \lambda_1^2) \cdot [1] \\ W_2(z) &= (1 + \lambda_1) \cdot [[1] + [2]] \\ W_3(z) &= (1 + \lambda_1) \cdot (1 - \lambda_2) \cdot [2] \end{aligned} \quad (1)$$

б) Особые точки функции $f(z)$ находятся в области $a_2 < |z| < a_1$, тогда

$$\begin{aligned} W_1(z) &= (1 - \lambda_1) \cdot [[1] + [3]] \\ W_2(z) &= f(z) + [1] + [2]' + [3]' + [4] \\ W_3(z) &= (1 - \lambda_2) \cdot [[2] + [4]] \end{aligned} \quad (2)$$

в) Особые точки функции $f(z)$ находятся в области $|z| < a_2$, тогда

$$\begin{aligned} W_1(z) &= (1 - \lambda_1) \cdot (1 + \lambda_2) \cdot [3] \\ W_2(z) &= (1 + \lambda_3) \cdot [[3] + [4]] \\ W_3(z) &= f(z) - \lambda_2 \cdot \bar{f}\left(\frac{a_2^2}{z}\right) + (1 - \lambda_2^2) \cdot [4] \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
[1] &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-1} \lambda_2^k \bar{f}\left(\frac{q^{2k} \cdot a_1^2}{z}\right); [2] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2^k f\left(\frac{q^{2k}}{z}\right); \\
[3] &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2^k f(q^{2k} \cdot z); [4] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2^k \bar{f}\left(\frac{q^{2k}}{z}\right); \\
\lambda_1 &= \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}; \lambda_2 = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}; q = \frac{a_2}{a_1}.
\end{aligned}$$

[2]' и [3]' означают то же, что [2] и [3], но суммирование ведется не от нуля, а от единицы.

3. Выражения (1)–(3) не содержат решения для случая, когда точечный источник находится в области $|z| < a_2$ или в области $a_2 < |z| < a_1$. Дело в том, что функция $\ln(z - z_0)$ содержит особую точку в бесконечности. Поэтому решение для этих случаев находится отдельно на основании метода изображений [3]. Однако эти решения можно получить более простым способом, используя общие решения (2) или (3).

Пусть точечный источник находится в области $a_2 < |z| < 1$. Учитывая характер изображения особых точек относительно окружностей $|z| = a_1$ и $|z| = a_2$ записываем комплексные потенциалы $W_1(z)$, $W_2(z)$ и $W_3(z)$ для функции $f(z) = \ln(z - z_0)$ и добавляем к каждому из них слагаемое

$$(1 - \lambda_2) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k \ln z.$$

Запишем один из полученных комплексных потенциалов:

$$\begin{aligned}
W_2(z) &= \ln(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2^k \ln\left(\frac{z}{q^{2k}} - z_0\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2^k \ln(q^{2k} z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k \ln\left(\frac{a_1^2}{q^{2k} z} - \bar{z}_0\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-1} \lambda_2^k \ln\left(\frac{q^{2k} a_1^2}{z} - \bar{z}_0\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^{k+1} \lambda_2^k (1 - \lambda_2) \ln(z)
\end{aligned} \tag{4}$$

4. Исследуем комплексный потенциал (4) для специальных граничных условий.

a) Пусть области $|z| > a_1$ и $|z| < a_2$ заполнены свободной жидкостью. В этом случае $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -1$. Тогда ряды в (4) будут расходящимися, но они регуляризируются добавлением к их членам подходящих констант. В результате получаем:

$$W_2(z) = \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_0}{z} \frac{a_1}{a_2} q^{2k-1} \right) \left(1 - \frac{z}{z_0} \frac{a_2}{a_1} q^{2k-1} \right) -$$

$$- \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z \cdot \bar{z}_0}{a_1 \cdot a_2} q^{2k-1} \right) \left(1 - \frac{a_1 \cdot a_2}{z \cdot \bar{z}_0} q^{2k-1} \right) \quad (5)$$

С помощью известного представления для тэта-функции Якоби:

$$\mathcal{G}_0(\nu) = H_0 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k-1} e^{2\pi i \nu} \right) \left(1 - q^{2k-1} e^{-2\pi i \nu} \right); \quad (6)$$

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k} \right)$$

Комплексный потенциал $W_2(z)$ принимает вид:

$$W_2(z) = \ln \left(\frac{\mathcal{G}_0(\nu)}{\mathcal{G}_0(\nu^3)} \right); \quad (7)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{z_0}{zq} \right); \nu^3 = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{z \cdot \bar{z}_0}{a_1^2 q} \right).$$

б) Пусть внутренняя область $|z| < a_2$ непроницаема, а внешняя $|z| > a_1$ заполнена свободной жидкостью. В этом случае $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$ и выражение (4) преобразуется к виду:

$$W_2(z) = \ln \left(\frac{\mathcal{G}_0(\nu^3)}{\mathcal{G}_0(\nu)} \right). \quad (8)$$

в) Для случая, когда внутренняя и внешняя области непроницаемы ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$), рассмотрим физически реальный случай, когда в области $a_2 < |z| < a_1$ находится источник в точке z_0 в точке z_1 , т.е. берем суперпозицию

$$f(z) = \ln(z - z_0) - \ln(z - z_1). \quad (9)$$

Записывая выражение (4) для функции (9) и проведя преобразования, аналогичные указанным, получаем:

$$W_2(z) = \ln \left(\frac{\mathcal{G}_0(\nu) \cdot \mathcal{G}_0(\nu^3)}{\mathcal{G}_0(\nu_1) \cdot \mathcal{G}_0(\nu_1^3)} \right); \quad (10)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{z_1}{zq} \right); \nu_1^3 = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{z \cdot \bar{z}_1}{a_1^2 z} \right).$$

Полученные решения (7), (8) и (10) удобны благодаря свойствам тэта-функции Якоби.

Таким образом, общие решения (1) – (3) задачи построения комплексных потенциалов фильтрационных течений для области с

границами раздела в виде двух концентрических окружностей являются универсальными, т.е. они справедливы для различных течений и различных граничных условий.

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М., 1972.
2. Голубева О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения. // Изв. АН СССР. МЖТ. 1966. №1.
3. Костицына Л.И. К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной пористой среде. // Уч. зак. МОПИ им. Н.К. Крупской. Тр. каф. теорет. физики. 1966. Т. 164. Вып. 2.
4. Шпилевой А.Я. О последовательном применении теоремы об окружности // Проблемы теоретической гидродинамики // Тула. Тульский пед. ин-т. 1977.
5. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Элементы теории отражения и преломления волн и потоков // Калининград. Калининградский государственный университет. 1994.

УДК 532.546

ЗАДАЧА ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ШЛЕЙФОВ ВЫМЫВАЕМЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПРИ РАБОТЕ СИСТЕМЫ СКВАЖИН¹

А.А. Квасов

Орловский государственный университет

Указан метод решения задачи об определении шлейфа вымываемого загрязнения в слое сложной геологической структуры. Фильтрационное течение обусловлено работой в условиях поступательного потока грунтовых вод системы скважин.

Двумерные фильтрационные течения в тонком слое переменной проводимости $P(z)$ (P есть функция координат точки, расположенной в основании слоя) опишем линейным законом Дарси и уравнением неразрывности [1]. Из этих уравнений для комплексного потенциала $W(z)$, введённого для описания фильтрационного течения, имеем уравнение [2]:

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)[W(z) - \bar{W}(z)] = 0, \text{ где } A(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln \sqrt{P(z)}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1)$$

Если область фильтрации состоит из двух областей, проводимость грунта которых изменяется скачком на их границе сопряжения, причём $P_1 = k_1 P(z)$, $P_2 = k_2 P(z)$, то на этой границе должны выполняться граничные условия: непрерывность давления и расхода жидкости [1]. Для комплексных потенциалов W_1 , W_2 они принимают вид [2]:

$$(1 - \lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda \bar{W}_2^-(z), \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00063, 03-01-96433).

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in [-1, 1)$, «+» и «-» обозначены предельные значения соответствующих функций на границе сопряжения областей D_1 и D_2 . Задача (1), (2) является задачей сопряжения. Она актуальна и имеет место во многих разделах физики и механики. Так, в работе [3] задача сопряжения положена в основу определения и исследования в неоднородном слое шлейфа вымываемого из очага загрязнения. Обобщим задачу об определении шлейфа загрязнения и поставим её для области D , содержащей несколько очагов загрязнения и границ смены неоднородностей. Полагаем, что фильтрационное течение обусловлено работой в поступательном потоке грунтовых вод системы скважин (наряду с эксплуатационными скважинами, моделирующими водозабор, могут работать и нагнетательные).

Пусть область фильтрации состоит из области D_1 внутри которой имеются области D_ν ($\nu = 2; \dots; n_\Gamma + 1$, n_Γ — целое число). Грунт в каждой из областей D_ν характеризуем коэффициентом проницаемости $K_\nu(z) = k_\nu K(z)$ (k_ν — const, $\nu = 1; 2; \dots; n_\Gamma + 1$). Считаем, что для каждой из областей D_ν ($\nu = 2; \dots; n_\Gamma + 1$) внешней областью является лишь одна область D_μ ($\mu \neq \nu$). Тогда границ сопряжения Γ_i различных областей будет n_Γ . Направление обхода кривой Γ_i ($i = 1; 2; \dots; n_\Gamma$), связанное с направлением орта касательной к ней, выберем по направлению движения часовой стрелки. Считаем, что среди всех выделенных подобластей числом χ_Γ областей промоделированы различного рода очаги загрязнения. Тогда назовём чистыми области D_ν , $\nu = 1; 2; \dots; n_\Gamma + 1 - \chi_\Gamma$, а загрязнёнными — соответственно D_ν , где $\nu = n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 3 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma + 1$. Нумерацию границ смены неоднородностей осуществим таким образом, чтобы по отношению к Γ_i отрицательной областью (по направлению от неё направлен орт нормали к Γ_i) была D_{i+1} , $i = 1; 2; \dots; n_\Gamma$. Тогда границами чистых областей будут Γ_i , $i = 1; 2; \dots; n_\Gamma - \chi_\Gamma$, а границами загрязнения (для них внутренней областью является загрязнённая область) — Γ_i , где $i = n_\Gamma + 1 - \chi_\Gamma, n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma, \dots, n_\Gamma$. В процессе фильтрации жидкость, прошедшую через указанные χ_Γ загрязнённые области, будем считать также загрязнённой. Таким образом, за каждой из областей D_ν ($\nu = n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 3 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma + 1$) будет распространяться шлейф загрязнения G_ν .

Пусть фильтрационное течение обусловлено работой в условиях поступательного потока грунтовых вод системы скважин (эксплуатационных и нагнетательных). Каждую из скважин в плоскости xOy основания слоя моделируем точечным стоком, расположенным в точке z_{c_j} и имеющим мощность q_j , равную дебиту j ($j = 1; 2; \dots; n_c$) скважины. Тогда комплексный потенциал течения W_0 [3] в отсутствии границ Γ_i , $i = 1; 2; \dots; n_\Gamma$ ($k_\nu = 1$, $\nu = 1; 2; \dots; n_\Gamma + 1$) имеет вид:

$$W_0(M) = G(M) + \sum_{j=1}^{n_c} q_j F(z, z_{cj}), \quad (3)$$

где $G(M)$ — непрерывная в области фильтрации функция, описывающая поступательный поток скорости u , $F(z, z_{cj})$ — функция, описывающая течение к стоку единичной мощности, расположенному в точке z_{cj} . Скважины могут находиться в любой из областей D_v ($v = 1; 2; \dots; n_\Gamma + 1$), в том числе и в загрязнённых. В последнем случае на эксплуатационные скважины не накладываются условия их работы без загрязнения. Пусть среди всех n_c скважин δ_s скважин являются эксплуатационными (у них дебит положителен), а остальные $n_c - \delta_s$ — нагнетательными (их дебит отрицателен). Полагаем, что к некоторым из δ_s скважин предъявляются требования о добычи чистой, не проходящей через очаги загрязнения D_v ($v = n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 3 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma + 1$), жидкости. Число этих скважин обозначим δ_c . Если в очаг загрязнения или в образовавшийся от него шлейф попала одна (или несколько) из δ_c скважин, то она ни при каком дебите без загрязнения работать не сможет и, следовательно, её из числа δ_c скважин необходимо исключить (положить её дебит равным нулю).

Для определения вымываемых из очагов загрязнения шлейфов G_v ($v = n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 3 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma + 1$) используем методику, разработанную в статье [3]. Моделируем границы Γ_i ($i = 1; 2; \dots; n_\Gamma$) кривыми класса Ляпунова. Течение в каждой из областей D_v ($v = 1; 2; \dots; n_\Gamma + 1$) опишем комплексным потенциалом W_v вида

$$W_v(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad (4)$$

где $W_0(z)$ определяется по формуле (3), а комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ ищем в виде потенциала двойного слоя

$$W_*(z) = \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{\Gamma_m} g_m(\zeta) P(\zeta) \frac{\partial F_1(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} dl_\zeta, \quad z \in D_v \quad (v = 1; 2; \dots; n_\Gamma + 1), \quad (5)$$

$$W_*^\pm(z) = \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{\Gamma_m} g_m(\zeta) P(\zeta) \frac{\partial F_1(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} dl_\zeta \pm \frac{g_i(z)}{2}, \quad z \in \Gamma_i \quad (i = 1; 2; \dots; n_\Gamma)$$

непрерывно распределённого с плотностью $g_i(z)$ ($g_i(z)$ — вещественная функция) на границах Γ_i , $i = 1; 2; \dots; n_\Gamma$, где $F_1(z, \zeta)$ — первое фундаментальное решение уравнения (1). Задачу сопряжения на n_Γ границах для возмущённого комплексного потенциала, подобно [3], сводим к решению системы интегральных уравнений:

$$g_i(z) - 2\lambda_i \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{L_m} g_m(\zeta) P(\zeta) \frac{\partial \Phi_1(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} dl = 2\lambda_i \varphi_0(z), \quad z \in \Gamma_i, \quad (6)$$

где $\lambda_i = (k_v - k_\mu)/(k_v + k_\mu)$, v — индекс положительной по отношению к Γ_i области, μ — индекс отрицательной по отношению к Γ_i области, $i = 1; 2; \dots; n_\Gamma$, $\varphi_0(z)$ — действительная часть комплексного потенциала (3), $\Phi_1(z, \zeta) = \mathbf{Re}F_1(z, \zeta)$. Решив систему (6) методом дискретных особенностей [4], найдём функции $g_j(z)$, а следовательно, учитывая формулы (5), (4), (3), найдём и комплексные потенциалы W_v , описывающие течение в областях D_v ($v = 1; 2; \dots; n_L + 1$).

Для определения вымываемых из загрязнённых областей шлейфов укажем их границы. Для этого, во первых, находим такие линии тока, которые имеют с Γ_i ($i = n_\Gamma + 1 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma$) одну общую точку [3]. Эти точки находятся на границе загрязнения Γ_i и в них нормальная составляющая скорости фильтрации к Γ_i равна нулю. Тогда, искомые точки, следуя [3], определяем из систем уравнений:

$$\begin{cases} z = z(\theta), \\ \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial n_z} - \frac{1}{P(z)} \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{L_m} \frac{\partial g_m(\zeta)}{\partial l_\zeta} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial l_z} dl = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где θ — параметр в уравнении, задающем границу загрязнения, $\Psi_2(z, \zeta) = P(z) \mathbf{Im}F_2(z, \zeta)$, $F_2(z, \zeta)$ — второе фундаментальное решение уравнения (1). Отметим, что системы уравнений вида (7) записываются для всех границ загрязнения, Γ_i ($i = n_\Gamma + 1 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma$). Теперь, следуя [3], проведя линии тока

$$\psi_0(z) + \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{L_m} \frac{\partial g_m(\zeta)}{\partial l_\zeta} \Psi_2(z, \zeta) dl = \psi_0(z_r) + \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{L_m} \frac{\partial g_m(\zeta)}{\partial l_\zeta} \Psi_2(z_r, \zeta) dl \quad (8)$$

через найденные точки z_r ($r = 1, 2, 3, \dots$), указываем стационарные границы вымываемых шлейфов загрязнения. Нестационарные границы шлейфов G_i , следуя [3], ищем в ходе решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = 2 \left(K(z) \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial z} - \frac{i}{H(z)} \sum_{m=1}^{n_\Gamma} \int_{L_m} \frac{\partial g_m(\zeta)}{\partial l_\zeta} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial l_z} dl \right) \quad (9)$$

при начальных условиях:

$$z_0 = z(\theta, 0), \quad z \in \Gamma_i^{(0)}, \quad (10)$$

где $\Gamma_i^{(0)}$ — стационарная граница шлейфа G_i , являющаяся частью границы загрязнения Γ_i ($i = n_\Gamma + 1 - \chi_\Gamma; n_\Gamma + 2 - \chi_\Gamma; \dots; n_\Gamma$).

Для построения областей захвата каждой из скважин ищем обусловленную работой скважины критическую точку. Эта точка, следуя [3], удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial z} - \frac{i}{P(z)} \sum_{m=1}^{n_r} \int_{L_m} \frac{\partial g_m(\zeta)}{\partial l_\zeta} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial l_z} dl = 0. \quad (11)$$

Построив линии тока (8), где вместо z_r следует подставить координаты найденных из (11) критических точек, имеем области захвата скважин. Следуя предложенной в [5] схеме численного эксперимента по определению предельно допустимого дебита эксплуатационной скважины, находим условия работы без загрязнения водозабора, состоящего из δ_c скважин, расположенных в сложном по геологической структуре фильтрационном слое.

Проведённые по формулам (6)–(11) расчёты для кусочно-однородного слоя ($P = const$) проиллюстрированы на рис. 1. Здесь представлены шлейфы G_7 и G_8 вымываемых загрязнений и область захвата работающего с предельно допустимой мощностью водозабора, состоящего из трёх равнодебитных скважин. Очаги загрязнения промоделированы областями D_7 и D_8 .

Отметим, что имея фундаментальные решения уравнения (1), можно проводить аналогичные расчёты и исследования в других слоях переменной проводимости.

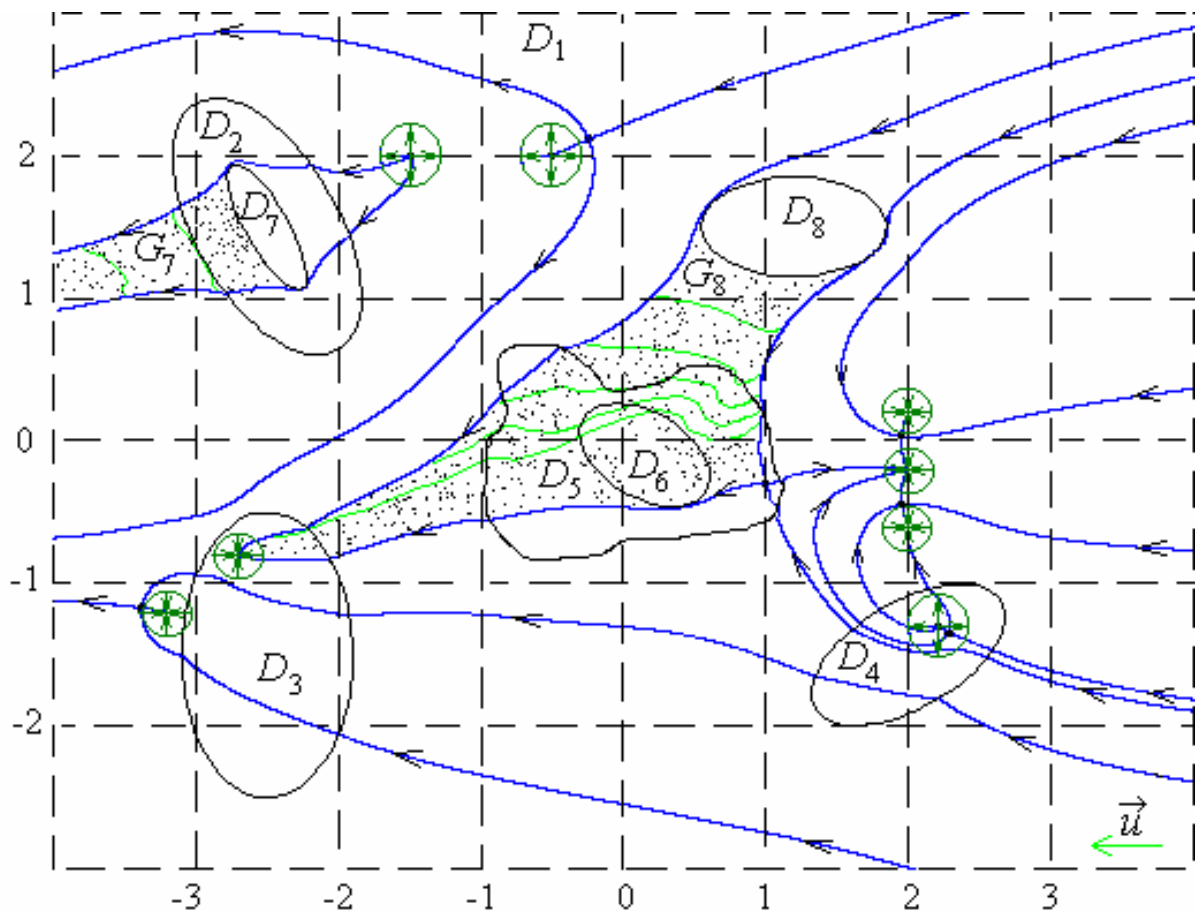


Рис. 1. Шлейфы вымываемых загрязнений и область захвата работающего без загрязнения водозабора, моделируемого тремя равнодебитными скважинами.

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: «Высшая школа». 1972. 368 с.
2. Пивень В.Ф. Граничные задачи сопряжения двумерных процессов в слоях переменной проводимости, моделируемой степенным законом // Докл. АН. 1997. Т. 357, № 3. С. 343-345.
3. Квасов А.А., Пивень В.Ф. Исследование двумерного шлейфа загрязнения в неоднородном слое // Вестник Харьковского нац. ун.-та., – 2003. – № 590. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 1. С. 139 – 144.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.
5. Квасов А.А., Пивень В.Ф. О работе водозабора без загрязнения // VIII Четаевская международная конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Тезисы докладов. Казань. Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2002. С. 263.

УДК 537.322.9

О ПОВЫШЕНИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЕТВИ ТЕРМОЭЛЕМЕНТА ПРИ ЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ

О.И. Марков

Орловский государственный университет, 302015, Орел. Россия

Численными методами решена граничная задача по расчету стационарного температурного поля ветви термоэлемента в режиме максимального температурного перепада. В расчете учитывались эффект Томсона, распределенный эффект Пельтье и температурная зависимость подвижности носителей заряда. Проводилась оптимизация по току и концентрации носителей. Расчет проводился в интервале температур горячего конца ветви 100-300 К.

Бурный рост производства термоэлектрических охладителей, происходящий в настоящее время, более остро ставит задачу повышения эффективности преобразователей. Повышение энергетических показателей термоэлектрических устройств в первую очередь связано с дальнейшим ростом термоэлектрической добротности, полупроводниковых материалов. Достигнутые на сегодня показатели еще очень далеки от теоретических пределов термоэлектрической добротности [1]. Известно, что одним из направлений повышения термоэлектрической добротности является использование неоднородных по длине ветвей термоэлемента [2]. Изучение термоэлементов с плавно меняющимися по длине ветви свойствами как предельного случая составного термоэлемента показало [3], что термоэлектрическая добротность повышается, если удельная проводимость растет, а коэффициент термоэдс уменьшается от горячего конца к

холодному. Более последовательный подход к решению той же проблемы, основанный на решении граничной задачи стационарной теплопроводности, использован в работе [4]. Оптимальное распределение примеси вдоль длины ветви определялось в результате решения вариационной задачи с применением принципа максимума Понтрягина. Использование данного формализма потребовало от авторов значительных упрощений задачи, в частности, предполагалось, что коэффициенты термоэдс, теплопроводности и электропроводности слабо зависят от температуры. Вкладом эффекта Томсона авторы также пренебрегали. Однако принятые приближения значительно снижают ценность полученных ими результатов. Кроме того, результаты получены авторами лишь для комнатной температуры горячего конца ветви. В данной работе сделана попытка с учетом температурной зависимости кинетических коэффициентов, а также эффекта Томсона получить решение граничной задачи [4]. Температурная зависимость электропроводности учтена в виде зависимости подвижности. $u = const \cdot T^{-3/2}$. В связи с тем, что задача имеет нелинейный характер, было получено численное решение граничной задачи, а также проведена численная оптимизация полученных решений. Рассмотрен режим максимального перепада температуры.

Температурное поле одномерной адиабатически изолированной неоднородной ветви термоэлемента в установившемся режиме максимального перепада температуры с учетом эффекта Томсона описывается стационарным уравнением теплопроводности [4]

$$\frac{d}{dx} \left(\chi \frac{dT}{dx} \right) + \frac{y^2}{\sigma} - \frac{k}{e} y T \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} - \frac{3}{2T} \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\chi \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha y T \Big|_{x=0}, T \Big|_{x=1} = T_1 \quad (2)$$

где для удобства решения задачи, в отличие от [4], нами был введен параметр $y = \frac{J \cdot l}{S}$. Кинетические коэффициенты для невырожденного случая имеют вид

$$\sigma = e n u, u = u_0 T^{-3/2}, \chi = \chi_p + 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \sigma, \alpha = \frac{k}{e} \left(2 + \ln \frac{2(2\pi m k T)^{3/2}}{n h^3} \right)$$

Решеточная теплопроводность, коэффициент пропорциональности u_0 в температурной зависимости подвижность носителей и эффективная масса m подбирались так, чтобы термоэлектрические свойства соответствовали полупроводниковым материалам с $Z = 3.0 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ при $T_1 = 300 K$.

Введенный нами параметр $y = \frac{J \cdot l}{S}$ может быть назван удельным током. Он не зависит от геометрии ветви, а определяется только физическими свойствами вещества и температурой. Оптимальное значение удельного тока определяет значение оптимального тока ветви, длина которой и сечение численно равны единице. Для нахождения оптимального тока ветви с другой геометрией достаточно умножить оптимальный удельный ток на отношение $\frac{S}{l}$.

Концентрация носителей заряда вдоль ветви распределяется, как и в [4] по линейному закону.

$$n = n_0(1 - gx) \quad (3)$$

При решении граничной задачи проводилась численная оптимизация перепада температуры по удельному току и концентрации n_0 на холодном конце ветви термоэлемента при заданном значении g . Интервал вариации величины $0 < g < 0.999$, что соответствует изменению отношения концентраций носителей на холодном и горячем концах $k = \frac{n_0}{n_1}$ в пределах $1 < k < 10^3$.

Результаты численного решения граничной задачи (1,2) отражены в графиках. Первоначально проведены расчеты для однородной ветви. На рис. 1 представлены график перепада температуры вдоль ветви термоэлемента при оптимальных значениях удельного тока в режиме максимального перепада температуры в зависимости от температуры горячего конца ветви.

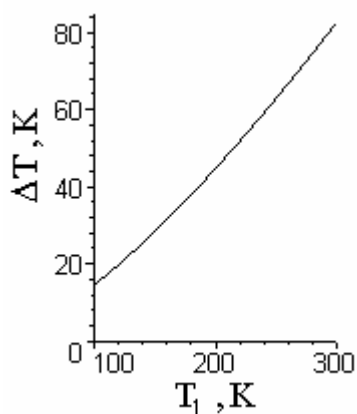


Рис. 1.

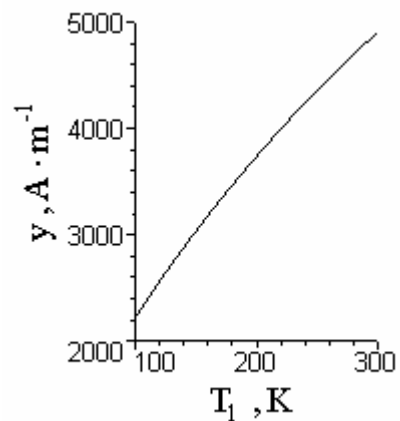


Рис. 2.

Наличие градиента концентрации носителей заряда приводит к понижению температуры холодного конца ветви за счет частичной или полной компенсации теплоты Джоуля. При оптимизации по концентрации на холодном конце ветви оптимальное значение концентрации n_0 меняется в сторону увеличения. Увеличение оптимальной концентрации носителей заряда на холодном конце приводит к снижению значения термоэдс в этой

точке, а, следовательно, является неблагоприятным фактором, т.к. способствует уменьшению возможного перепада температуры. На рис. 2 приведена кривая зависимости удельного оптимального тока ветви в зависимости от температуры горячего конца ветви.

Зависимость оптимального удельного тока от температуры холодного конца ветви представлена на рис. 3. Как видно из графика, имеется отклонение от линейной зависимости, которая имеет место в случае, когда кинетические коэффициенты не зависят от температуры.

На рис. 4 представлены графики зависимости максимального перепада температуры от логарифма отношения концентраций на холодном и горячем концах при разных температурах горячего конца ветви (кривая 1 – для 100 К, кривая 2 – для 150 К, кривая 3 – 200 К, кривая 4 – 250 К, кривая 5 – 300 К).

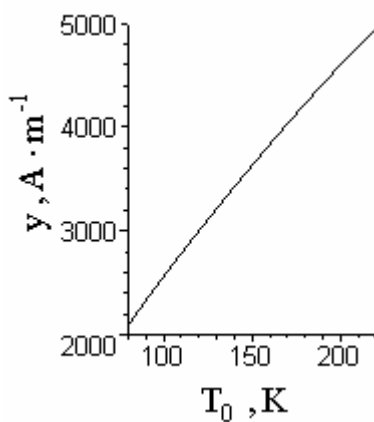


Рис. 3.

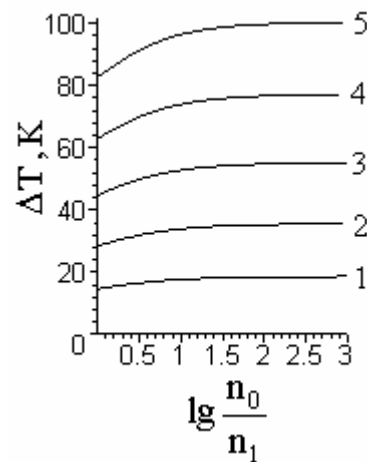


Рис. 4.

Рис.5.представляет зависимость удельного тока от отношения концентраций на холодном и горячем концах ветви (кривая 1 – для 100 К, кривая 2 – для 150 К, кривая 3 – 200 К, кривая 4 – 250 К, кривая 5 – 300 К) Как видно, для достижения больших перепадов температуры требуется и больший ток.

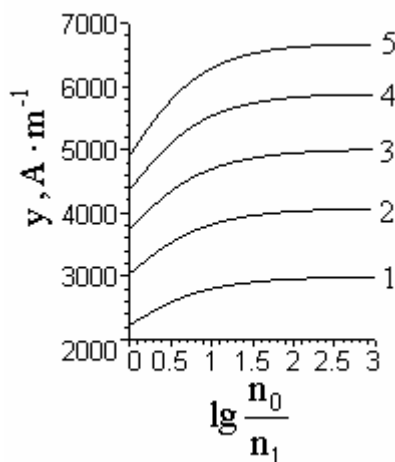


Рис. 5.

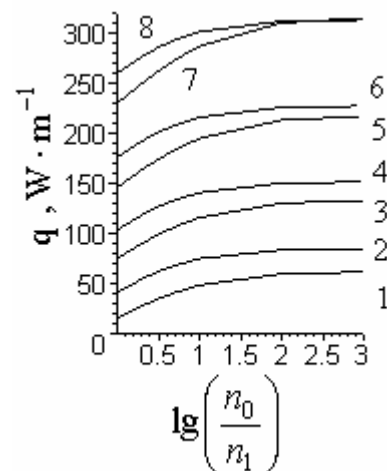


Рис. 6.

Значительно больший интерес с практической точки зрения представляет режим максимальной холодопроизводительности. Известно, что в этом режиме возникает значительный перегрев средней области ветви термоэлемента и, поэтому выяснение влияния распределенного эффекта Пельтье и эффекта Томсона на температурное поле в данном режиме имеет большое значение. Для расчета в этом режиме граничное условие на холодном конце ветви должно быть представлено в виде

$$\chi \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \alpha y T|_{x=0} - q \quad (5)$$

где $q = \frac{Q \cdot l}{S}$ - удельная холодопроизводительность ветви (холодопроизводительность ветви, длина которой и сечение численно равны единице).

Поглощение теплоты распределенного эффекта Пельтье позволит существенно снизить перегрев ветви или вообще ликвидировать его. Поскольку в работе [4] эффект Томсона не учитывался, представляет интерес оценка величины его. На рис. 6 приведены нагрузочные характеристики ветви для разных перепадов температуры (60К – кривые 1, 2; 40 К – кривые 3, 4; 20 К – кривые 5, 6; 0 К – кривые 7, 8, причем четные цифры с учетом эффекта Томсона, нечетные – без учета Томсона). Как видно, наиболее значительный рост приведенной холодопроизводительности ветви приходится на 10-30-кратное изменение концентрации носителей. При перепаде температур 60 К холодопроизводительность увеличивается в 3,3 раза при изменении концентрации в 10 раз и в 4,1 раза при изменении концентрации в 25 раз. С уменьшением перепада температуры кратность увеличения холодопроизводительности падает и при нулевом перепаде температур достигает значений 1,25 и 1,44 соответственно. Следует обратить внимание на то, что при уменьшении перепада температуры при больших перепадах концентрации носителей вклад эффекта Томсона становится пренебрежимо малым.

Как показывают расчеты, использование ветвей термоэлементов с линейным распределением концентрации носителей заряда по длине ветви, может существенно повысить максимальный перепад температуры и повысить холодопроизводительности термоэлектрических холодильников. Вклад эффекта Томсона достаточно значителен и сравним с вкладом распределенного эффекта Пельтье.

Литература

1. E.S. Rittner. On the theory of the Peltier heat pump.-J.Appl.Phys.,1959, V.30, №5, P.702-707.
2. A.H. Boerijk. Zero-first and second order theories of a general thermo couple.- J.Appl.Phys.,1961, V.32, №8, P.1584-1589.

3. В.А. Семенюк. Возможности повышения эффективности термоэлектрического охлаждения при использовании неоднородных термоэлементов - Теплофизика и теплотехника, 1978, вып.35, С.80-84.
4. К.Ф. Иванова, Ф.С. Ривкин. Оптимальное распределение концентрации носителей тока вдоль высоты ветвей термоэлемента. - ЖТФ, 1982, т.5, в.7, с.1406-1411.

УДК 532.546

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТИ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ¹

Д.Н. Никольский

Орловский государственный университет

Разработка метода вычисления скорости подвижной границы раздела жидкостей, имеет значение для решения задач об эволюции подвижной границы. Принципиальная особенность рассмотренной задачи, состоит в том, что она трехмерна, в отличие от известных трудов [1-4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный грунт. Пусть вытесняемая жидкость вязкости μ_2 в некоторый момент времени t занимает односвязную область D_2 , ограниченную некоторой поверхностью σ_t . Внешняя область D_1 занята вытесняющей жидкостью вязкости μ_1 . Вытеснение считаем поршневым.

В области D_1 течение описывается потенциалом φ_1 , в области D_2 — φ_2 . Потенциалы φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению Лапласа[5]:

$$\Delta \varphi_\nu(M) = 0, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (1)$$

На поверхности σ_t выполняются условия непрерывности давлений и расхода жидкости[5]

$$\varphi_1(M)^+ = \varphi_2(M)^-, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \sigma_t \quad (2)$$

Имеет место закона Дарси[5]:

$$\vec{V}_\nu(M) = \frac{1}{\mu_\nu} \nabla \varphi_\nu(M), \quad \nu = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь \vec{V}_1 и \vec{V}_2 — скорости фильтрации жидкостей вязкостей μ_1 и μ_2 , в соответствующих областях D_1 и D_2 .

Скорость подвижной поверхности σ_t найдем как полусумму предельных значений скоростей фильтрации жидкостей вязкостей μ_1 и μ_2 при подходе к σ_t из областей D_1 и D_2 , соответственно[3,5]:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00063, 03-01-96433).

$$\vec{V}(M) = \frac{\vec{V}_1(M) + \vec{V}_2(M)}{2}, \quad M \in \sigma_t. \quad (4)$$

Решение (1),(2) ищем в виде[5]

$$\varphi_\nu(M) = \mu_\nu(\varphi_0(M) + \varphi_*(M)), \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \quad (5)$$

где $\varphi_* = \int_{\sigma_t} g(M)K(M, N)d\sigma_N$ — потенциал возмущения,

$$K(M, N) = \frac{1}{4\pi} \frac{(x_M - x_N)n_{x_N} + (y_M - y_N)n_{y_N} + (z_M - z_N)n_{z_N}}{r_{MN}^3}, \quad \varphi_0 — \text{ потенциал}$$

невозмущенного течения, моделирующий работу скважин, в отсутствии поверхности σ_t .

Согласно [6], потенциал возмущения φ_* на σ_t имеет вид

$$\varphi_*^\pm(M) = \varphi_*(M) \pm \frac{g(M)}{2}, \quad M \in \sigma_t, \quad (6)$$

где $\varphi_*(M) = \int_{\sigma_t} g(N)K(M, N)d\sigma_N$ и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши[6].

Решение (5) удовлетворяет второму условию из (2) и уравнениям (1). Первое условие из (2), с учетом (5) и (6), приводит к сингулярному интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода[5]:

$$g(M) - 2\lambda \int_{\sigma_t} g(N)K(M, N)d\sigma_N = 2\lambda\varphi_0(M), \quad M \in \sigma_t. \quad (7)$$

Выражение (4) с учетом (3), (5) и (6) примет вид[5]:

$$\vec{V}(M) = \nabla\varphi_0(M) + \nabla_M \int_{\sigma_t} g(N)K(M, N)d\sigma_N, \quad M \in \sigma_t. \quad (8)$$

Решая (7) вычислим плотность $g(M)$ распределения диполей на σ_t . Зная плотность $g(M)$ по формуле (8) вычислим скорость перемещения σ_t .

2. Численная схема. Пусть выбрана правая декартова система координат (x, y, z) . Разобьем поверхность σ_t на элементарные площадки $\Delta\sigma_{ij}$, $i = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, ограниченные четырёхугольными рамками. Каждая рамка (рис.1) определяется четырьмя координатами $P_{ij}(\xi_{ij}, \zeta_{ij}, \eta_{ij})$, $i = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_1 - 1$. Координаты расчетных точек $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, $i = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, $j = 0, 1, \dots, n_1 - 2$ будем вычислять как средние арифметические координат углов рамок

$$x_{ij} = \frac{\xi_{in_1+j} + \xi_{in_1+j+1} + \xi_{(i+1)n_1+j+1} + \xi_{(i+1)n_1+j}}{4},$$

$$y_{ij} = \frac{\zeta_{in_1+j} + \zeta_{in_1+j+1} + \zeta_{(i+1)n_1+j+1} + \zeta_{(i+1)n_1+j}}{4},$$

$$z_{ij} = \frac{\eta_{in_1+j} + \eta_{in_1+j+1} + \eta_{(i+1)n_1+j+1} + \eta_{(i+1)n_1+j}}{4},$$

$$i = 0, 1, \dots, n_2 - 2, \quad j = 0, 1, \dots, n_1 - 2.$$

Считаем, что во всех точках, каждой площадки $\Delta\sigma_{ij}$ плотность постоянна и равна плотности g_{ij} в расчетных точках M_{ij} . Заменим интегралы в (7) и (8) суммами, имеем

$$g_{mk} - 2\lambda \sum_{i=0}^{n_2-2} \sum_{\substack{j=0 \\ ij \neq mk}}^{n_1-2} g_{ij} K_{mkij} \Delta\sigma_{ij} = 2\lambda \varphi_{0mk}, \quad m = 0, 1, \dots, n_2 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad (10)$$

$$\text{где } K_{mkij} = \frac{1}{4\pi} \frac{(x_{mk} - x_{ij})n_{x_{ij}} + (y_{mk} - y_{ij})n_{y_{ij}} + (z_{mk} - z_{ij})n_{z_{ij}}}{r_{mkij}^3},$$

$$r_{mkij} = \sqrt{(x_{mk} - x_{ij})^2 + (y_{mk} - y_{ij})^2 + (z_{mk} - z_{ij})^2},$$

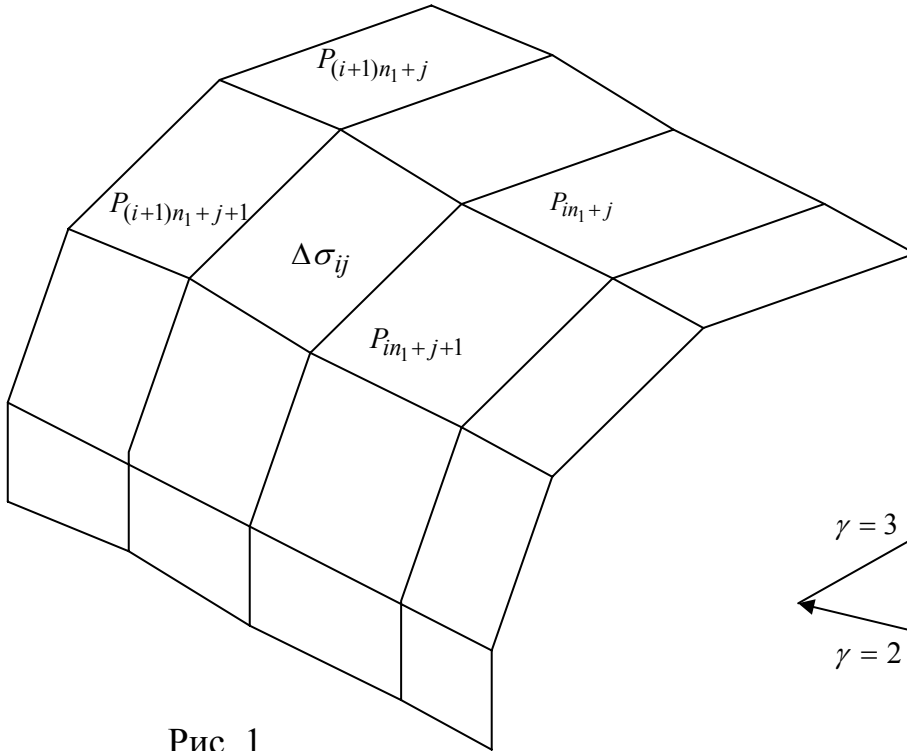


Рис. 1

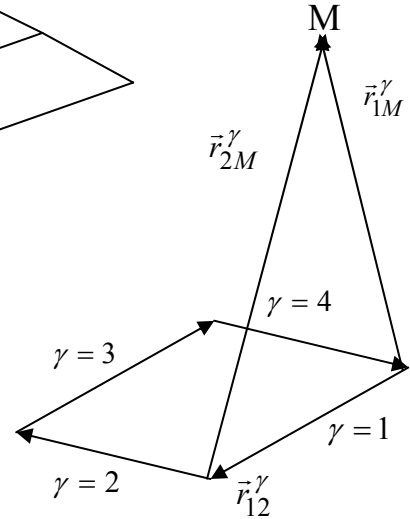


Рис. 2

$$\vec{V}_{mk} = (\nabla\varphi_0)_{mk} + \sum_{i=0}^{n_2-2} \sum_{j=0}^{n_1-2} g_{ij} \int_{\Delta\sigma_{ij}} K(M, N) d\sigma_N \quad (11)$$

С учетом теоремы Ампера[5]

$$\int_{\Delta\sigma_{ij}} K(M, N) d\sigma_N = -\frac{1}{4\pi} \int_{L_{ij}} \frac{d\vec{l}_N \times \vec{r}_{MN}}{r_{MN}^3}$$

имеем

$$\vec{V}_{mk} = (\nabla\varphi_0)_{mk} - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{n_2-2} \sum_{j=0}^{n_1-2} g_{ij} \int_{L_{ij}} \frac{d\vec{l}_N \times \vec{r}_{MN}}{r_{MN}^3}, \quad (12)$$

$$\text{где [5]} \int_{L_{ij}} \frac{d\vec{l}_N \times \vec{r}_{MN}}{r_{MN}^3} = \sum_{\gamma=1}^4 \frac{\vec{r}_{12}^\gamma \times \vec{r}_{1M}^\gamma}{r_{12}^{\gamma 2} r_{1M}^{\gamma 2} - (\vec{r}_{12}^\gamma \cdot \vec{r}_{1M}^\gamma)^2} \left(\frac{\vec{r}_{12}^\gamma \cdot \vec{r}_{1M}^\gamma}{r_{1M}^\gamma} - \frac{\vec{r}_{12}^\gamma \cdot \vec{r}_{2M}^\gamma}{r_{2M}^\gamma} \right) \quad (\text{см. рис. 2}).$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению СЛАУ (10) и вычислению интеграла (12). СЛАУ (10) имеем матрицу, коэффициенты перед неизвестными которой, образуют матрицу с диагональным преобладанием элементов. Такую систему можно решать простым методом Гаусса.

3. Сопоставление с аналитикой. В случае канонических границ σ_t несложно получить аналитическое решение. Рассмотрим случай, когда в области D_2 , работает одна эксплуатационная скважина. Скважину будем моделировать точечным стоком, расположенным в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\varphi_0(M) = q(4\pi r_{MM_1})^{-1}, \quad r_{MM_1} = \sqrt{(x_M - x_{M_1})^2 + (y_M - y_{M_1})^2 + (z_M - z_{M_1})^2} \quad (13)$$

Если σ_t представляет собой плоскость $z=0$, то потенциалы φ_1 и φ_2 по методу изображений, с учетом (5), примут вид:

$$\varphi_1(M) = \mu_2(1 - \lambda)\varphi_0(M), \quad \varphi_2(M) = \mu_2\varphi_0(M) - \mu_2\lambda\tilde{\varphi}_0(M), \quad (14)$$

где $\tilde{\varphi}_0(M) = (4\pi \tilde{r}_{MM_1})^{-1}$, $\tilde{r}_{MM_1} = \sqrt{(x_M - x_{M_1})^2 + (y_M - y_{M_1})^2 + (z_M + z_{M_1})^2}$.

Расположим скважину в точке $M_1(0,0,1)$ и выберем $\lambda=0,5$, $q=\pi$. Скорость перемещения плоскости раздела $z=0$, $x \in [-10,10]$, $y \in [-10,10]$ в некоторый момент времени в различных точках этой плоскости, полученная путем численного решения (10) и (12), построены на рис. 3. Видим, что полученная картина имеет физический смысл: вектора скорости направлены к скважине и в центральной области они больше, чем по краям.

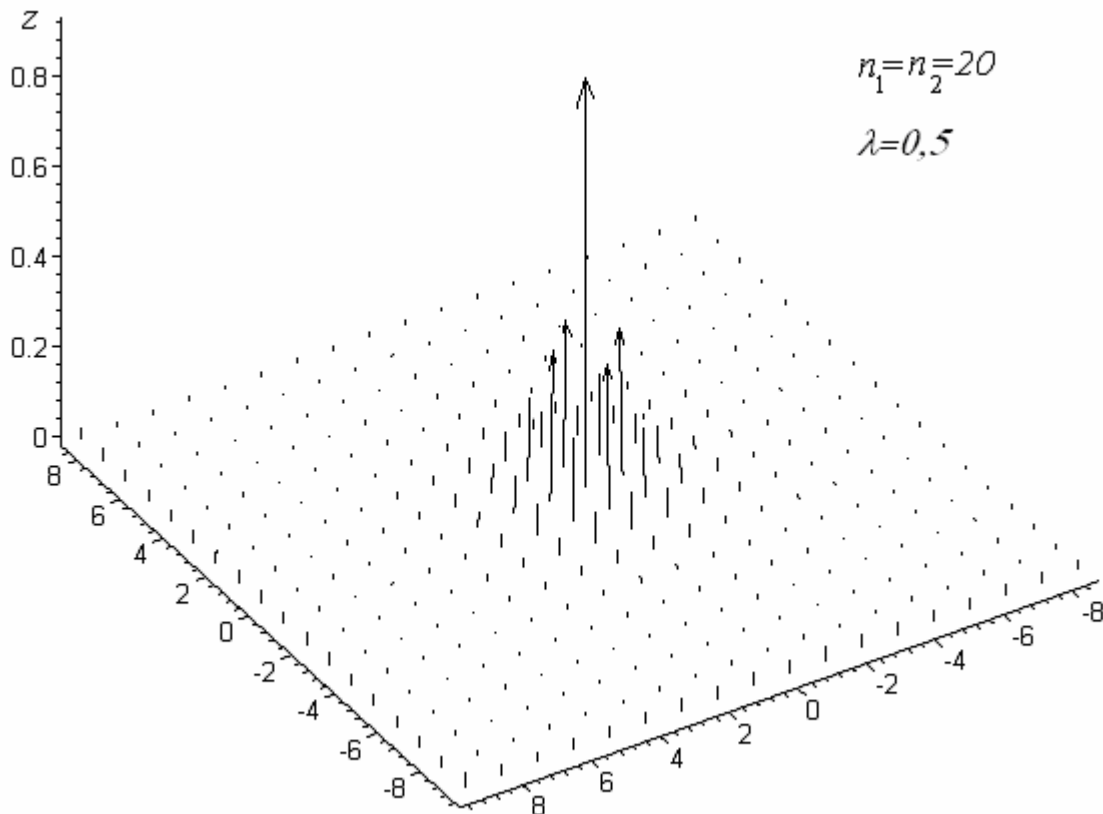


Рис. 3

На рис. 4 построена зависимость $\eta(x)$ на линии $y=0$ в плоскости σ_t . Здесь $\eta = 1 - \frac{V_z}{V_{0z}}$, $V_z = V_z(x,0,0)$ — скорость перемещения плоскости раздела, вычисленная численно, решением (10) и (12), а $V_{0z} = V_{0z}(x,0,0)$ — аналитическое значение скорости перемещения, полученное по формулам (3), (4), (13) и (14). Три кривые на этом рисунке соответствуют случаям $n_1 = n_2 = 20, 40, 60$.

Из рис. 4 видим, что с ростом числа элементарных площадок, на которые разбивается поверхность σ_t , погрешность численного счета η уменьшается.

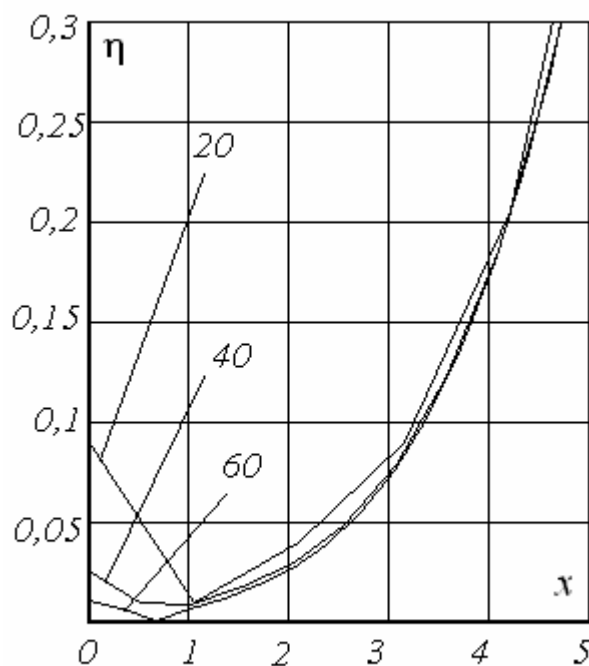


Рис. 4

Увеличение погрешности η на рис.4 происходит при увеличении абсолютного значения координаты x . Этот же результат можно заметить на рис.3. По краям плоскости σ_t вектора скорости резко увеличиваются, хотя из физических соображений ясно, что этого не должно быть: чем дальше мы расположены от скважины, тем меньше должно быть возмущение. Этот результат, связан с тем, что плоскость бесконечного размера, мы заменили на плоскость конечного размера $z=0$, $x \in [-10,10]$, $y \in [-10,10]$. В работе [3] предложен метод уменьшения погрешности, в таком случае.

Литература

1. Данилов В.Л., Кац В.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. М.: Недра. 1980. 264 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967гг.). М.: Наука. 1969. 456 с.

3. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Канд. диссертация. Орел. 2001. 191 с.
4. Lifanov I.K., Nikolsky D.N., Piven' V.F. Mathematical modelling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface. Russ. J. Numer. Anal. Match. Modelling, Vol. 17, No. 4, pp. 381-391.
5. Пивень В.Ф. Задача об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородной среде. Тр. Межд. школ-семинаров «МДОЗМФ». Орел, 2002. С.69-74.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО. Янус. 1995. 520 с.

УДК 532.546

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ¹

В.Ф. Пивень

Орловский государственный университет, oryol@au.ru

В отличие от известных трудов (см. обзор в [1]) ставится и исследуется трёхмерная (двумерная) задача сопряжения фильтрационных течений на границе, где коэффициент проницаемости слоя изменяется скачком, который является функцией координат точек этой границы. Исследование этой задачи сведено к решению системы интегральных (в том числе сингулярных) уравнений.

1. Стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной и недеформируемой пористой среде с коэффициентом проницаемости K характеризуется давлением p (или квазипотенциалом скорости φ) и скоростью фильтрации \vec{v} , которые определяются законом Дарси и уравнением неразрывности [1]:

$$\vec{v} = K \nabla \varphi \quad \left(\varphi = -\frac{p + \gamma z}{\mu} \right), \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь ∇ – оператор Гамильтона, μ и γ – вязкость и удельный вес жидкости, z – координата, отсчитываемая по вертикали вверх.

Поставим трёхмерную (двумерную) задачу сопряжения фильтрационных течений в кусочно-неоднородном слое. Пусть Γ – поверхность (в двумерном случае кривая на основании слоя) является границей сопряжения областей D_1 и D_2 течения, в которых коэффициенты проницаемости среды K_1 и K_2 (в двумерном случае проводимости слоя

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00063, 03-01-96433).

$P_1 = K_1 H_1$ и $P_2 = K_2 H_2$, H_1 и H_2 – его толщина в областях D_1 и D_2) моделируются непрерывно дифференцируемыми, хотя бы один раз, функциями координат точки M .

На границе Γ коэффициенты K_1 и K_2 изменяются скачком, их отношение, вообще говоря, зависит от координат точек этой границы. В двумерном случае толщина слоя непрерывна на границе: $H_1(M) = H_2(M) = H(M)$, $M \in \Gamma$. Кроме того коэффициенты проницаемости K_1 и K_2 (проводимости P_1 и P_2) слоя могут в областях D_1 и D_2 обращаться в ноль либо бесконечность на поверхностях (кривых) σ_{01} и σ_{02} , которые назовём сингулярными границами области течения. В частности, границы σ_{01} и σ_{02} могут совпадать, пересекаться между собой и с границей Γ . Областью течения будет $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma \cup \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$.

Фильтрацию жидкости в областях D_1 и D_2 описывают квазипотенциалы φ_1 и φ_2 , которые удовлетворяют в трёхмерном ($m = 3$) и двумерном ($m = 2$) случаях следующим из (1.1), (1.2) уравнениям

$$\nabla_M \cdot [A_\nu(M) \nabla_M \varphi(M)] = 0, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \quad (1.3)$$

где $A_\nu(M) = \begin{cases} K_\nu(M), & m = 3, \\ P_\nu(M), & m = 2. \end{cases}$

Согласно (1.1), запишем условия непрерывности давления и расхода жидкости на границе Γ (условия сопряжения) [1]:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M), \quad K_1^+(M) \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ = K_2^-(M) \left(\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in \Gamma. \quad (1.4)$$

Здесь «+» и «-» обозначают предельные значения соответствующих функций при подходе к границе Γ из области D_1 и D_2 (орт \vec{n} нормали к Γ направлен внутрь области D_1).

На сингулярных границах $\sigma_{0\nu}$, $\nu = 1, 2$ выполняются условия непротекания ($\sigma_{0\nu}$ – границы сброса жидкости) либо постоянства квазипотенциала ($\sigma_{0\nu}$ – границы водоёма покоящейся жидкости):

$$A_\nu(M) \frac{\partial \varphi_\nu(M)}{\partial n_M} = 0 \quad \text{либо} \quad \varphi_\nu(M) = \text{const}, \quad M \in \sigma_{0\nu}, \quad \nu = 1, 2 \quad (1.5)$$

Если область D содержит бесконечно удалённую точку, и характеристики течения φ и \vec{v} не имеют в ней сингулярностей (в бесконечности нет источников (стоков) течения), то эти характеристики должны удовлетворять условиям регулярности [1]. При наличии у характеристик φ и \vec{v} сингулярностей в бесконечности, то поведение φ и \vec{v} в бесконечности определяется видом этих сингулярностей.

Кроме того область D течения может иметь другого вида границы с соответствующими на них условиями [1].

Задача отыскания решений $\varphi_\nu(M)$, $\nu=1,2$ уравнений (1.3) при условиях (1.4) и (1.5) назовём задачей сопряжения течений в неоднородных слоях при наличии сингулярных границ $\sigma_{0\nu}$, $\nu=1,2$.

2. Течение жидкости обусловлено заданными источниками и стоками. Учтём эти источники (стоки), моделируя их особыми точками (сингулярностями) квазипотенциалов $\varphi_{01}(M)$ и $\varphi_{02}(M)$, которые описывают невозмущённые течения в слоях проницаемости (в двумерном случае – проводимости) $K_1(P_1)$ и $K_2(P_2)$ в отсутствие границы Γ ($K_1^+(M)=K_2^-(M)$), то есть в области $D \setminus \Gamma$. Причём, полагаем, что $\varphi_{01}(M)$ и $\varphi_{02}(M)$ удовлетворяет условиям (1.5) на сингулярных границах σ_{01} и σ_{02} соответственно.

Представим квазипотенциалы течения φ_1 и φ_2 в областях D_1 и D_2 с коэффициентами проницаемости (проводимости) $K_1(P_1)$ и $K_2(P_2)$ в виде

$$\varphi_\nu(M) = \varphi_{0\nu}(M) + \varphi_\nu^*(M), \quad M \in D_\nu, \quad \nu=1,2, \quad (2.1)$$

где $\varphi_\nu^*(M)$ ($\nu=1,2$) – квазипотенциалы возмущений, обусловленных тем, что в областях D_1 и D_2 слой имеет разные характеристики – коэффициенты проницаемости (проводимостями). Эти квазипотенциалы удовлетворяют уравнениям (1.3).

Учитывая (2.1), запишем условия (1.4) и (1.5) для квазипотенциалов возмущений:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{*+}(M) - \varphi_2^{*-}(M) &= \varphi_{02}^-(M) - \varphi_{01}^+(M), \\ K_1^+(M) \left(\frac{\partial \varphi_1^*(M)}{\partial n_M} \right)^+ - K_2^-(M) \left(\frac{\partial \varphi_2^*(M)}{\partial n_M} \right)^- &= K_2^-(M) \left(\frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M} \right)^- - K_1^+(M) \left(\frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M} \right)^+, \\ &M \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A_\nu(M) \frac{\partial \varphi_\nu^*(M)}{\partial n_M} = 0 \quad \text{либо} \quad \varphi_\nu^*(M) = 0, \quad M \in \sigma_{0\nu}, \quad \nu=1,2. \quad (2.3)$$

Поскольку квазипотенциалы $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu=1,2$ не имеют в бесконечности особых точек, то потребуем для них выполнения в бесконечности условий регулярности [1]:

$$\varphi_\nu^*(M) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \quad A_\nu(M) \left| \nabla \varphi_\nu^*(M) \right| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right) \quad (\nu=1 \text{ или } 2) \quad \text{при} \quad r_{MN} \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

(точка M удаляется в бесконечность, а точка $N \in D$).

Таким образом, решение задачи сопряжения для квазипотенциалов возмущений состоит в отыскании функций $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu=1,2$, удовлетворяющих уравнениям (1.3) и условиям (2.2)-(2.4).

3. Квазипотенциалы возмущений $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu=1,2$ ищем в виде потенциалов двойных слоёв с плотностями $g_\nu(N)$, $\nu=1,2$:

$$\varphi_\nu^*(M) = \int_{\Gamma} g_\nu(N) A_\nu(N) \frac{\partial \Phi_\nu^{(1)}(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, \quad M \in D_\nu, \quad \nu=1,2, \quad (3.1)$$

где $d\sigma_N$ – элемент площади (длины) поверхности (кривой) Γ , $\Phi_\nu^{(1)}(M, N)$ ($\nu=1,2$) – первые фундаментальные решения (стоки единичной суммарной мощности) уравнений (1.3), которые удовлетворяют условиям (2.3) и (2.4).

Полагаем, что эти решения можно представить в виде

$$\Phi_\nu^{(1)}(M, N) = G_\nu(M, N) + \frac{1}{2^{m-1} \pi \sqrt{A_\nu(M) A_\nu(N)}} \begin{cases} \frac{1}{r_{MN}}, & m=3, \\ \ln \frac{1}{r_{MN}}, & m=2, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $G_\nu(M, N)$ ($\nu=1,2$) – функции, имеющие в окрестности точки $M=N$ (исключая эту точку) непрерывные первые производные по координатам точки N .

Удовлетворим квазипотенциалы (3.1) условиям (2.2). Следуя [2], непрерывно продолжим (3.1) на границу Γ и при учёте (3.2) получим предельные значения квазипотенциалов:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{*+}(M) &= \int_{\Gamma} g_1(N) A_1(N) \frac{\partial \Phi_1^{(1)}(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \frac{g_1(M)}{2}, \\ \varphi_2^{*-}(M) &= \int_{\Gamma} g_2(N) A_2(N) \frac{\partial \Phi_2^{(1)}(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N - \frac{g_2(M)}{2}, \quad M \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Воспользуемся (3.2) и свойством непрерывности производной по нормали к границе Γ потенциала двойного слоя (3.1). Полагая, что коэффициенты проницаемости слоя, квазипотенциалы невозмущённых течений и их производные по нормали к границе Γ принимают на ней предельные значения $K_\nu(M)$, $\varphi_{0\nu}(M)$ и $\frac{\partial \varphi_{0\nu}(M)}{\partial n_M}$ ($\nu=1,2$), $M \in \Gamma$, из условий (2.2) имеем систему интегральных уравнений для $g_\nu(M)$, $\nu=1,2$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} g_1(N) A_1(N) \frac{\partial \Phi_1^{(1)}(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N - \int_{\Gamma} g_2(N) A_2(N) \frac{\partial \Phi_2^{(1)}(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \frac{g_1(M) + g_2(M)}{2} = \\
& = \varphi_{02}(M) - \varphi_{01}(M), \\
& K_1(M) \int_{\Gamma} g_1(N) A_1(N) \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N - K_2(M) \int_{\Gamma} g_2(N) A_2(N) \frac{\partial^2 \Phi_2^{(1)}(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N = \\
& = K_2(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M} - K_1(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Учитывая (3.2) и следуя [2], имеем, что первое уравнение системы (3.4) есть неоднородные интегральные уравнения второго рода типа Фредгольма, а второе уравнение представляет собой неоднородное сингулярное интегральное уравнение первого рода.

Таким образом, исследование поставленной задачи сопряжения сводится к решению системы уравнений (3.4).

4. Решение второго уравнения системы (3.4) вызывает значительные трудности в силу его сингулярности. В случае двумерной фильтрации в кусочно-неоднородном слое сингулярность этого уравнения можно понизить, преобразовав его к уравнению первого рода типа Фредгольма.

Следуя [3], запишем соотношения между первыми $\Phi_v^{(1)}(M, N)$ и вторыми $\Phi_v^{(2)}(M, N)$ (которые представляют собой вихри, расположенные в точке N с циркуляцией, отнесённой к проводимостям слоёв $P_v(N)$ и равной -1) фундаментальными решениями уравнений (1.3) при $A_v(M) = P_v(M)$ ($v = 1, 2$):

$$\frac{\partial \Phi_v^{(1)}(M, N)}{\partial n_N} = -\frac{1}{P_v(N)} \frac{\partial \Phi_v^{(2)}(M, N)}{\partial \sigma_N}, \quad v = 1, 2, \quad M, N \in \Gamma \quad (M \neq N),$$

где орты касательной и нормали к кривой Γ образуют правую систему.

Продифференцируем эти соотношения по направлению орта \vec{n}_M нормали в точке $M \in \Gamma$. Получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_v^{(1)}(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} = -\frac{1}{P_v(N)} \frac{\partial^2 \Phi_v^{(2)}(M, N)}{\partial n_M \partial \sigma_N}, \quad v = 1, 2, \quad M, N \in \Gamma \quad (M \neq N).$$

Используя эти равенства, входящие во второе уравнение системы (3.4) интегралы при $A_v(N) = P_v(N)$, $v = 1, 2$ запишем

$$J_v = \int_{\Gamma} g_v(N) P_v(N) \frac{\partial^2 \Phi_v^{(1)}(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N = - \int_{\Gamma} g_v(N) \frac{\partial}{\partial \sigma_N} \left(\frac{\partial \Phi_v^{(2)}(M, N)}{\partial n_M} \right) d\sigma_N.$$

Вычислим интегралы J_v , $v = 1, 2$ по частям вдоль кривой Γ ($\sigma_N \in [0, L]$, L – длина этой кривой). Полагаем, что имеют место равенства

$$g_v(0) \frac{\partial \Phi_v^{(2)}(M, 0)}{\partial n_M} = g_v(L) \frac{\partial \Phi_v^{(2)}(M, L)}{\partial n_M}, \quad v = 1, 2, \quad M \in \Gamma,$$

которые выполняются, в частности, когда кривая Γ замкнута. Находим

$$J_\nu = \int_\Gamma \frac{\partial g_\nu(N)}{\partial \sigma_N} \frac{\partial \Phi_\nu^{(2)}(M, N)}{\partial n_M} d\sigma_N, \quad \nu = 1, 2, \quad M \in \Gamma.$$

Так как по координатам точки $M \in \Gamma$ квазипотенциалы $\Phi_\nu^{(2)}(M, N)$ вихрей связаны с функциями токов $\Psi_\nu^{(2)}(M, N)$ этих вихрей уравнениями

$$\frac{\partial \Phi_\nu^{(2)}(M, N)}{\partial \sigma_M} = \frac{1}{P_\nu(M)} \frac{\partial \Psi_\nu^{(2)}(M, N)}{\partial n_M}, \quad \frac{\partial \Phi_\nu^{(2)}(M, N)}{\partial n_M} = -\frac{1}{P_\nu(M)} \frac{\partial \Psi_\nu^{(2)}(M, N)}{\partial \sigma_M} \\ \nu = 1, 2, \quad M, N \in \Gamma \quad (M \neq N),$$

то интегралы J_ν , $\nu = 1, 2$ примут вид

$$J_\nu = -\frac{1}{P_\nu(M)} \int_\Gamma \frac{\partial g_\nu(N)}{\partial \sigma_N} \frac{\partial \Psi_\nu^{(2)}(M, N)}{\partial \sigma_M} d\sigma_N, \quad \nu = 1, 2, \quad M \in \Gamma. \quad (4.1)$$

Учитывая (4.1) и $P_\nu(M) = K_\nu(M)H(M)$, $\nu = 1, 2$, $M \in \Gamma$, второе уравнение системы (3.4) запишем в виде

$$\int_\Gamma \frac{\partial g_2(N)}{\partial \sigma_N} \frac{\partial \Psi_2^{(2)}(M, N)}{\partial \sigma_M} d\sigma_N - \int_\Gamma \frac{\partial g_1(N)}{\partial \sigma_N} \frac{\partial \Psi_1^{(2)}(M, N)}{\partial \sigma_M} d\sigma_N = \\ = P_2(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M} - P_1(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \Gamma. \quad (4.2)$$

Так как функции $\Psi_\nu^{(2)}(M, N)$, $\nu = 1, 2$ имеют в точке $M = N$ особенности логарифмического типа, то уравнение (4.2) представляет собой интегральное уравнение первого рода типа Фредгольма.

Уравнение (4.2) надлежит решать совместно с первыми уравнениями системы (3.4) в двумерном случае ($A_\nu(M) = P_\nu(M)$, $\nu = 1, 2$).

Полученные интегральные уравнения могут быть решены численно на основе методов дискретных особенностей [4].

Литература

1. Пивень В.Ф. Математическое моделирование течений жидкости в неоднородных слоях // Юбилейный научн. сборник в честь 70-летия Орловского госуд. университета. Изд-во Орловского госун-та. Орёл. 2001. С. 89–98.
2. Пивень В.Ф. Интегральное уравнение граничной задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородной среде // Труды IX Международного симпозиума «МДОЗМФ–2000». Орёл. 2000. С. 343–348.
3. Пивень В.Ф. Сведение граничной задачи сопряжения обобщённых аналитических функций к интегральному уравнению // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. №9. С. 1194–1198.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ПРОДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ
РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТИ В КУСОЧНО-
НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ
ИЗМЕНЕНИЯ ЕГО ПРОВОДИМОСТИ¹**

В.Ф. Пивень, Ю.С. Федяев

Орловский государственный университет

Ставится двумерная задача об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородных слоях, проводимости которых моделируются степенной функцией координат. Исследование этой задачи приводит к системе интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, которые решаются численно на основе методов дискретных особенностей. Исследуется влияние различия проницаемостей слоёв и вязкостей жидкостей на движение границы в случае, когда проводимость слоя меняется скачком на прямолинейной границе.

1. Рассмотрим двумерную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости в неоднородном тонком слое проводимости

$$P(M) = K(M)H(M), \quad (1.1)$$

где M – точка в плоскости основания слоя, $K(M)$ – коэффициент проницаемости слоя, $H(M)$ – его толщина. Считаем, что основание слоя является горизонтальной плоскостью, на которой выберем декартовы оси координат x , y . Проводимость $P(M) \geq 0$ моделируется непрерывной с первыми частными производными функцией координат. Движение жидкости обусловлено источниками и стоками течения.

Поле скоростей жидкости в области течения D удовлетворяет системе уравнений, записанных для скорости фильтрации \vec{v} в безразмерном виде [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_y}{K} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x}{K} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (H v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H v_y) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$, $K = K(M)$, $H = H(M)$ и $M \in D$.

Пусть неподвижная граница Γ делит область фильтрации D на области D_1 и D_2 , в которых слои характеризуются проводимостями P_1 и P_2 . Полагаем, что $P_\nu = k_\nu P(M)$, k_ν – постоянные, $\nu = 1, 2$. Скачок P на Γ обусловлен изменением коэффициента проницаемости.

В области фильтрации D также присутствует изменяющаяся с течением времени область D_t , в которой движется жидкость постоянной вязкости μ_2 . Вне области D_t находится жидкость постоянной вязкости μ_1 . Область D_t ограничена кривой Γ_t . Полагаем, что кривая Γ_t изменяется так, что она в любой момент времени является простой (без самопересечений) и принадлежит классу Ляпунова. Положение области D_t (границы Γ_t) в начальный момент времени $t = 0$ известно, которое обозначим D_0 (Γ_0).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00063, 03-01-96433).

Параметрическое уравнение границы Γ_0 имеет вид (σ – параметр):

$$\text{при } t = 0 \quad \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \quad M \in \Gamma_0. \quad (1.3)$$

Область фильтрации может быть ограничена непроницаемой или эквипотенциальной границей L . В этом случае на этой границе будут выполняться условия непроницаемости (граница L – линия тока) или постоянства давления (граница L – эквипотенциаль).

В области течения D может присутствовать сингулярная линия L_0 , на которой проводимость слоя обращается в ноль или бесконечность. Она может служить границей области D на которой выполняются условия непроницаемости или постоянства давления [1]. Таким образом, в общем случае под областью D понимается $D = D_1 \cup D_2 \cup D_t \cup C$, где $C = \Gamma \cup \Gamma_t \cup L \cup L_0$ обходится по часовой стрелке.

Поле скоростей жидкости в каждой из областей D_1, D_2, D_t , за исключением особых точек течения, удовлетворяет уравнениям (1.2). На линиях Γ, Γ_t, L, L_0 должны выполняться граничные условия

На границе Γ выполняются условия сопряжения для нормальной и касательной составляющих скорости

$$v_n^+(M, t) = v_n^-(M, t), \quad v_\tau^+(M, t)/k_1 = v_\tau^-(M, t)/k_2, \quad M \in \Gamma. \quad (1.4)$$

Здесь и далее «+» («–») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе со стороны нормали \vec{n} (или противоположной стороны). Нормаль направлена в область D_1 , а вектор касательной $\vec{\tau}$ здесь и далее образует с \vec{n} правовинтовую систему.

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы по сравнению с силами гидродинамического давления. Тогда на подвижной границе Γ_t выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости, которые для скорости фильтрации имеют вид:

$$v_n^+(M, t) = v_n^-(M, t), \quad \mu_1 v_\tau^+(M, t) = \mu_2 v_\tau^-(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \quad (1.5)$$

Здесь нормаль направлена из области D_t .

Если область фильтрации ограничивает непроницаемая или эквипотенциальная кривая L , то на ней выполняется следующее условие:

$$v_n(M, t) = 0 \quad \text{или} \quad v_\tau(M, t) = 0, \quad M \in L. \quad (1.6)$$

В случае, когда область фильтрации D содержит сингулярную линию L_0 , то на ней выполняется условие равенства нулю расхода жидкости или постоянства давления:

$$H(M) v_n(M, t) = 0 \quad \text{или} \quad v_\tau(M, t) = 0, \quad M \in L_0. \quad (1.7)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы определяется уравнением (1.3). Для нахождения положения границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$ запишем дифференциальное уравнение её движения. Учитывая связь физической скорости и скорости фильтрации, а также следуя [2] это уравнение примет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{\vec{v}^+(M,t) + \vec{v}^-(M,t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t. \quad (1.8)$$

Пусть в отсутствии границ Γ ($k_1 = k_2 = 1$) и Γ_t ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) известно невозмущённое поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$, особые точки которого в области $D \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t)$ произвольны и могут изменяться со временем. Представим поле скоростей следующим образом:

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0(M,t) + \vec{V}(M,t), \quad (1.9)$$

где $\vec{V}(M,t)$ – скорость возмущения, обусловленного границами Γ и Γ_t .

Невозмущённая скорость $\vec{v}_0(M,t)$ удовлетворяет уравнениям (1.2). Если область фильтрации ограничивает кривая L , которая имеет канонический вид, то используя метод функций Грина невозмущённое поле скоростей выбирается таким образом, что условие (1.6) выполняется. При наличии сингулярной линии L_0 полагаем, что скорость $\vec{v}_0(M,t)$ удовлетворяет условию (1.7). Так как $\vec{v}_0(M,t)$ непрерывна на границах Γ и Γ_t , то скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ также должна удовлетворять уравнениям (1.2) и вытекающим из (1.4) – (1.7) с учётом (1.9) граничным условиям

$$\begin{aligned} V_n^+(M,t) &= V_n^-(M,t), \\ (1 - \lambda_k)V_\tau^+(M,t) - (1 + \lambda_k)V_\tau^-(M,t) &= 2\lambda_k v_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} V_n^+(M,t) &= V_n^-(M,t), \\ (1 - \lambda_\mu)V_\tau^+(M,t) - (1 + \lambda_\mu)V_\tau^-(M,t) &= 2\lambda_\mu v_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$V_n(M,t) = 0 \quad \text{или} \quad V_\tau(M,t) = 0, \quad M \in L, \quad (1.12)$$

$$H(M)V_n(M,t) = 0 \quad \text{или} \quad V_\tau(M,t) = 0, \quad M \in L_0, \quad (1.13)$$

где $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_k \in [-1, 1]$ и $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\lambda_\mu \in [-1, 1]$.

Если область D содержит бесконечно удалённую точку, то полагаем, что скорость возмущения затухает на бесконечности:

$$V(M,t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r_{MN} \rightarrow \infty, \quad N \in (\Gamma \cup \Gamma_t), \quad M \notin (\Gamma \cup \Gamma_t) \quad (1.14)$$

(точка M удаляется в бесконечность, а точка $N \in D$).

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t (1.8) с учётом (1.9) примет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \frac{1}{2}[\vec{V}^+(M,t) + \vec{V}^-(M,t)], \quad M \in \Gamma_t. \quad (1.15)$$

Таким образом, нужно по заданному полю скоростей жидкостей $\vec{v}_0(M,t)$, положению границ Γ , L , L_0 и первоначальному положению границы Γ_0 найти положение границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$.

Решение поставленной задачи состоит в отыскании скорости возмущения $\vec{V}(M,t)$, удовлетворяющей уравнениям (1.2), условиям (1.10) – (1.14), и интегрировании дифференциального уравнения (1.15) при начальном условии (1.3).

2. Полагаем, что границы Γ и Γ_t в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. Будем искать скорость возмущения $\vec{V}(M, t)$ в виде потенциала вихревого слоя, распределённого с плотностью $g(N, t)$ на границе Γ и $f(N, t)$ на границе Γ_t :

$$\vec{V}(M, t) = \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N, \quad M \in D \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t). \quad (2.1)$$

Здесь $\vec{V}_B^*(M, N) = \vec{V}_B(M, N)/K(N)$, $\vec{V}_B(M, N)$ – скорость в точке M , создаваемая нормированным вихрем, расположенным в точке N . Эта скорость выражается через функцию тока $\Psi(M, N)$ вихря по формуле [2]

$$\vec{V}_B(M, N) = \frac{1}{H(M)} \left[\frac{\partial \Psi(M, N)}{\partial y_M} \vec{i} - \frac{\partial \Psi(M, N)}{\partial x_M} \vec{j} \right], \quad (2.2)$$

где \vec{i} и \vec{j} – орты координатных осей Ox и Oy . Отметим, что при наличии линии L_0 функцию тока вихря выбирается таким образом, чтобы скорость $\vec{V}_B(M, N)$ удовлетворяла условию (1.13). Если область фильтрации ограничивает кривая L , то скорость $\vec{V}_B(M, N)$ выбирается таким образом, чтобы условие (1.12) выполнялось.

Скорость возмущения (2.1) удовлетворяет условию (1.14). Непрерывно продолжим скорость $\vec{V}(M, t)$ на границы Γ и Γ_t . Следуя [2], получаем её предельные значения:

$$\vec{V}^{\pm}(M, t) = \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N \pm \frac{g(M, t)}{2} \vec{\tau}_M + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N, \quad M \in \Gamma, \quad (2.3)$$

$$\vec{V}^{\pm}(M, t) = \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N \pm \frac{f(M, t)}{2} \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.4)$$

В формуле (2.3) интеграл по Γ , а в (2.4) по Γ_t , понимаются в смысле главного значения по Коши.

Из (2.3) и (2.4) следует, что нормальные составляющие предельных значений скорости возмущения на границах Γ и Γ_t непрерывны. Подставляя (2.3) и (2.4) в условия (1.10) и (1.11), находим, что условия для нормальных составляющих скорости возмущения удовлетворяются, а из условий для касательных составляющих получаем систему двух неоднородных интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма [2]:

$$g(M, t) - 2\lambda_k \left(\int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N \right) = 2\lambda_k \vec{v}_0(M, t) \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma, \quad (2.5)$$

$$f(M,t) - 2\lambda_\mu \left(\int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N \right) = \\ = 2\lambda_\mu \vec{v}_0(M,t) \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (1.15), получим уравнение движения границы Γ_t :

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N, \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.7)$$

Следовательно, нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к решению эволюционной задачи для системы уравнений (2.5) – (2.7) при начальном условии (1.3).

Уменьшим число уравнений в полученной системе. Для этого исключим $f(M,t)$ из уравнения (2.7). Умножив (2.7) скалярно на единичный вектор касательной $\vec{\tau}_M$ в точке M границы Γ_t и используя (2.6), получим

$$f(M,t) = 2\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_M}{dt} \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.8)$$

Следовательно, плотность распределения особенностей $f(M,t)$ по границе Γ_t равна умноженной на $2\lambda_\mu$ касательной составляющей скорости движения границы Γ_t в точке M . Учитывая (2.7) и (2.8), находим векторное интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t :

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N - \int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N = \vec{v}_0(M,t), \\ M \in \Gamma_t. \quad (2.9)$$

Подставив (2.8) в (2.5) получим интегральное уравнение для определения плотности $g(M,t)$:

$$g(M,t) - 2\lambda_k \left(\int_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N + 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N \right) = \\ = 2\lambda_k \vec{v}_0(M,t) \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma. \quad (2.10)$$

Таким образом, изучение движения границы Γ_t сводится к решению эволюционной задачи для системы интегро-дифференциального (2.9) и интегрального (2.10) уравнений при начальном условии (1.3).

Решение поставленной задачи упрощается, если граница Γ имеет канонический вид (прямая, окружность). В этом случае поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$ и скорость вихря $\vec{V}_B(M,N)$ подбираем таким образом, чтобы граничные условия (1.10) выполнялись. Тогда $g(M,t) = 0$ и необходимость в уравнениях (2.5), (2.10) отпадает. Интегро-дифференциальное уравнение (2.9) принимает вид

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N = \vec{v}_0(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.11)$$

При отсутствии границы Γ интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет тот же вид (2.11). В указанных случаях нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения (2.11) при начальном условии (1.3) [3].

3. Решим уравнения (2.9), (2.10) численно с помощью метода дискретных особенностей [5]. Для этого разобьём подвижную границу Γ_t в момент времени t_p , $p = 0, 1, 2, \dots$ на n_p , а неподвижную границу Γ на m_p частей. Тогда положение границы Γ_t в момент времени t_p задаётся множеством точек $\{x_i^p, y_i^p, i = 0 \dots n_p\}$, а границы Γ множеством точек $\{x_k, y_k, k = 0 \dots m_p\}$. В случае замкнутой границы Γ_t (Γ) считаем, что $x_0^p = x_{n_p}^p$, $y_0^p = y_{n_p}^p$ ($x_0 = x_{m_p}$, $y_0 = y_{m_p}$). Отметим, что границы Γ_t и Γ разбиваются таким образом, чтобы они обходились по часовой стрелке. Начальное условие (1.3) примет вид:

$$\text{при } t=0 \quad \Gamma_0: \{x_i^0, y_i^0, i = 0 \dots n_0\} \quad (3.1)$$

Запишем конечно-разностный аналог уравнений (2.9) – (2.10). Заменяем производные по времени правыми разностями, производные по координатам центральными разностями, а интегралы по формуле прямоугольников (для замкнутых кривых Γ_t и Γ аналогичный результат получается при использовании формулы трапеций). Так как в уравнениях (2.9) интеграл по границе Γ_t , а в уравнениях (2.10) по границе Γ понимается в смысле главного значения по Коши, то в сумме, аппроксимирующей эти интегралы, следует выкинуть точку, в которой записывается соответствующее уравнение. На $p+1$ -ом шаге по времени Δt_{p+1} получим для замкнутых кривых Γ_t и Γ систему $2n_p + m_p$ линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{x_i^{p+1} - x_i^p}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} B_j^p V_{Bx_{i,j}}^* - \sum_{k=1}^{m_p} g_k^p V_{Bx_{i,k}}^* \Delta \ell_k &= v_{0x_i}, \\ \frac{y_i^{p+1} - y_i^p}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} B_j^p V_{By_{i,j}}^* - \sum_{k=1}^{m_p} g_k^p V_{By_{i,k}}^* \Delta \ell_k &= v_{0y_i}, \\ g_k^p - 4\lambda_k \lambda_\mu \sum_{j=1}^{n_p} B_j^p V_{B\tau_{k,j}}^* - 2\lambda_k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m_p} g_l^p V_{B\tau_{k,l}}^* \Delta \ell_l &= 2\lambda_k v_{0\tau_k}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $i = 1 \dots n_p$, $k = 1 \dots m_p$, $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$,

$$B_j^p = \frac{(x_j^{p+1} - x_j^p)(x_{j+1}^p - x_{j-1}^p)}{\Delta t_{p+1} \cdot 2} + \frac{(y_j^{p+1} - y_j^p)(y_{j+1}^p - y_{j-1}^p)}{\Delta t_{p+1} \cdot 2},$$

$$V_{B\tau_{k,\bullet}}^* = V_{Bx_{k,\bullet}}^* \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta\ell_k} + V_{By_{k,\bullet}}^* \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta\ell_k},$$

$$v_{0\tau_k} = v_{0x_k} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta\ell_k} + v_{0y_k} \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta\ell_k},$$

$$\Delta\ell_k = \left[\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \right] / 2.$$

Под $V_{Bx_{i,j}}^*$, $V_{By_{i,j}}^*$ понимаются значения проекции скорости \vec{V}_B^* создаваемой нормированным вихрём в i -ой точке границы Γ_t (Γ), расположенным в j -ой точке границы Γ_t (Γ). Под v_{0x_i} и v_{0y_i} понимается значения невозмущённого поля скоростей \vec{v}_0 в i -ой точке границы Γ_t (Γ). Для замкнутой кривой Γ_t (Γ) считаем, что $x_{m_p+1} = x_1$, $y_{m_p+1} = y_1$ ($x_{n_p+1}^p = x_1^p$, $y_{n_p+1}^p = y_1^p$). В случае разомкнутой кривой Γ_t (Γ) следует записать уравнения (3.2) в точке x_0^p (x_0). При этом в точках x_0^p (x_0) следует брать правые, а в $x_{n_p}^p$ (x_{m_p}) – левые разности для вычисления.

Решая полученную систему относительно неизвестных g_k^p , x_i^{p+1} , y_i^{p+1} , находим положение границы Γ_t в момент времени t_{p+1} по её положению в момент времени t_p .

Таким образом, последовательно решая систему (3.2) при начальном условии (3.1) определяем положение границы Γ_t в каждый момент времени t_p , $p = 1, 2, \dots$

На каждом шаге по времени положение границы Γ_t интерполируем линейными сплайнами. Для повышения устойчивости счёта на каждом шаге по времени переразбиваем границу Γ_t равномерно по её длине. Также выгодно изменять число точек разбиения на Γ_t и шаг по времени [4].

Схема счёта усложняется, когда границы Γ_t и Γ сближаясь пересекаются (либо соприкасаются). Тогда в уравнении (2.9) интеграл по Γ , а в (2.10) по Γ_t также следует понимать в смысле главного значения по Коши. Поэтому точки пересечения (соприкосновения) границ Γ_t и Γ следует выбрасывать из сумм, которыми заменяются соответствующие интегралы в уравнениях (3.2).

Полученную систему алгебраических уравнений решаем методом Гаусса. Отметим, что часть матрицы размером $(m \times m)$ (коэффициенты

перед плотностями g_k^p) остаётся неизменной на каждом шаге по времени (если не изменяется разбиение границы Γ). Поэтому, если расположить её в левом верхнем углу матрицы, то эту часть матрицы можно обратить только на первом шаге по времени и использовать на последующих шагах. Поэтому при решении разбиение границы Γ не менялось ($m_p = m_0$, $p = 1, 2, \dots$).

4. Рассмотрим эволюцию границы раздела жидкостей различной вязкости от нагнетательной скважины в слое проводимости $P = y^s$, $s > 0$. В этом случае область течения D ограничивает сингулярная линия $L_0: y = 0$, на которой проводимость слоя обращается в ноль. Пусть прямая $x = 0$ – граница Γ областей D_1 ($x < 0$) и D_2 ($x > 0$). Работу скважины дебита q будем моделировать источником мощности q находящемся на расстоянии d от границы Γ и сингулярной линии L в точке $(-d; d)$. Учтём влияние границы Γ и запишем квазипотенциал поля скоростей φ_{01} в области D_1 и φ_{02} в D_2 в виде [6]:

$$k_1 \varphi_{01} = -\frac{q}{2\pi} \left(\frac{d}{y}\right)^{\frac{s}{2}} \left(Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega) + \lambda_k Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_1) \right), \quad M(x, y) \in D_1 \quad (4.1)$$

$$k_2 \varphi_{02} = -(1 - \lambda_k) \frac{q}{2\pi} \left(\frac{d}{y}\right)^{\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega), \quad M(x, y) \in D_2.$$

Здесь $\omega = \frac{(x+d)^2 + y^2 + d^2}{2yd}$, $\omega_1 = \frac{(x-d)^2 + y^2 + d^2}{2yd}$, $Q_{\frac{s}{2}-1}$ – функция Лежандра второго рода. Квазипотенциалам (4.1) соответствует поле скоростей

$$\vec{v}_{0v} = k_v K \nabla \varphi_{0v} \quad v = 1, 2. \quad (4.2)$$

Функцию тока вихря Ψ выберем с учётом границы Γ в виде:

$$\Psi(M, N) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} (y\eta)^{\frac{s}{2}} \left(Q_{\frac{s}{2}}(z) - \lambda_k Q_{\frac{s}{2}}(z_1) \right), & N \in D_1, \quad M \in D_1, \\ -(1 - \lambda_k) \frac{1}{2\pi} (y\eta)^{\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}}(z), & N \in D_1, \quad M \in D_2, \\ -(1 + \lambda_k) \frac{1}{2\pi} (y\eta)^{\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}}(z), & N \in D_2, \quad M \in D_1, \\ -\frac{1}{2\pi} (y\eta)^{\frac{s}{2}} \left(Q_{\frac{s}{2}}(z) + \lambda_k Q_{\frac{s}{2}}(z_1) \right), & N \in D_2, \quad M \in D_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь $M = M(x, y)$, $N = N(\xi, \eta)$, $z = \frac{(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2}{2y\eta}$, $z_1 = \frac{(x+\xi)^2 + y^2 + \eta^2}{2y\eta}$.

Первоначальное положение границы Γ_0 совпадает с контуром скважины, который представляет собой окружность малого радиуса R_c с центром в точке $(-d, d)$.

В предельном случае при $s=0$ ($P=1$) будем рассматривать слой постоянной толщины $H=1$. Плоскопараллельное продвижение границы Γ_t в однородном слое ($H=1, K=1$) с непроницаемой границей $L: y=0$ будем рассматривать как предельный случай исследуемой задачи, когда $s=0$ и сингулярной границе $L_0: y=0$ соответствует непроницаемая граница $L: y=0$.

На рисунке 1 показана зависимость времени T_z достижения границы Γ от параметра λ_k для различных значений параметра s при $K=y^s$ и $\lambda_\mu=0$. Для всех значений параметра s с ростом λ_k время T_z возрастает. При $\lambda_k=1$ (Γ – непроницаемая граница) время $T_z \rightarrow \infty$. С ростом параметра s время T_z также возрастает.

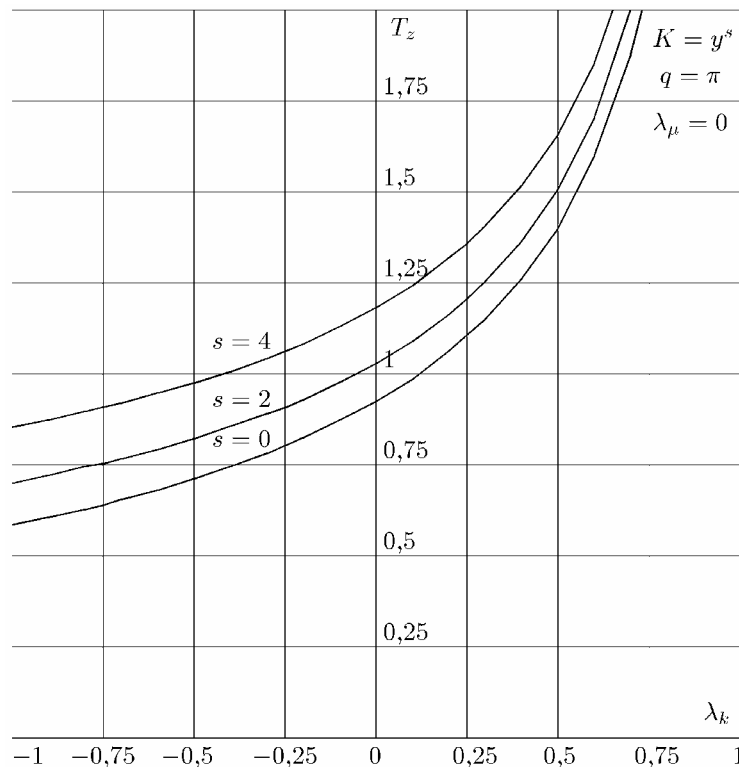


Рис. 1. Зависимость времени T_z достижения границы Γ от параметра λ_k (случай $K=y^s$)

На рисунке 2 показана зависимость времени T_z от параметра λ_k для различных значений параметра s при $H=y^s$ и $\lambda_\mu=0$. Как и в случае $K=y^s$ для всех значений параметра s с ростом λ_k время T_z возрастает. Сравнивая рис. 1 и рис. 2, замечаем, что время T_z для одинаковых параметров s ($s>0$) и λ_k в случае $H=y^s$ больше, чем при $K=y^s$.

На рисунках 3 и 4 показана зависимость времени T_z от параметра λ_μ для различных значений параметра λ_k в слое постоянной толщины ($H=1$) и проницаемости $K=y^s$ ($s=2; 4$). Замечаем, что с ростом параметра λ_k при постоянном λ_μ время T_z возрастает. При $\lambda_\mu \rightarrow 1$ различие во времени T_z для различных значений параметра λ_k уменьшается.

При расчётах полагали $d = 1$, $R_c = 0,001$, $q = \pi$.

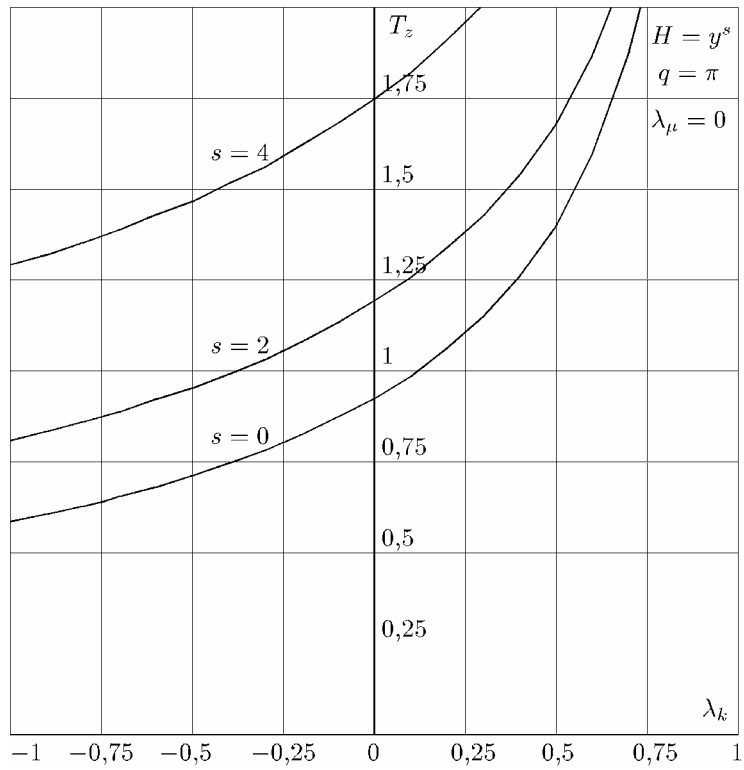


Рис. 2. Зависимость времени T_z достижение границы Γ от параметра λ_k (случай $H = y^s$)

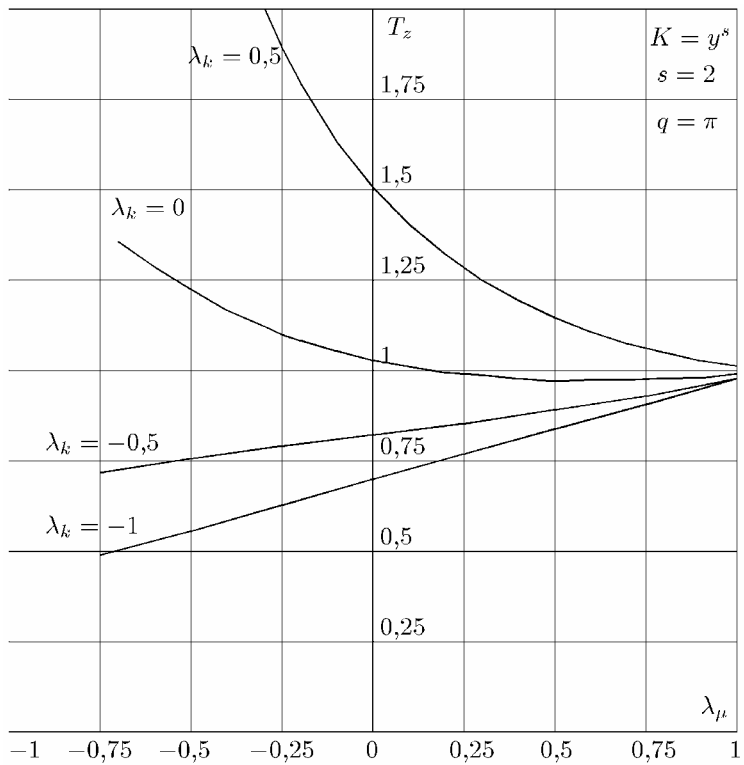


Рис. 3. Зависимость времени T_z достижение границы Γ от параметра λ_μ (случай $K = y^2$)

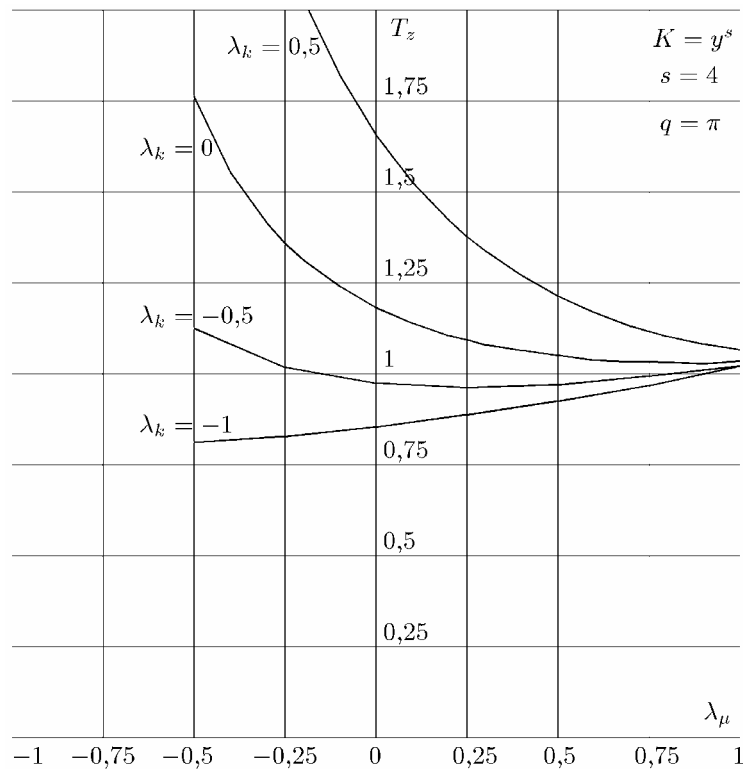


Рис. 4. Зависимость времени T_z достижения границы Γ от параметра λ_μ (случай $K = y^4$)

Заметим, что при $\lambda_\mu < -0,5$ (вытеснение маловязкой жидкостью более вязкой) движение границы Γ_t неустойчиво. С ростом степени неоднородности слоя (параметра s) неустойчивость усиливается.

Литература

1. Пивень В.Ф. Математическое моделирование течений жидкости в неоднородных слоях // Юбилейный научный сборник в честь семидесятилетия Орловского государственного университета. Орёл, 2001. С. 89-98.
2. Пивень В.Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №12. С. 1705–1710.
3. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование плоскопараллельного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости методом интегро-дифференциального уравнения // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ – 2001». Херсон, 2001. С. 275-279
4. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Эволюция двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое грунта // Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2003). Харьков-Херсон. 2003. С. 211–216.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
6. Пивень В.Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей // ПММ. 1997. Т.61, вып. 4. С. 595-605.

УДК 532.546

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СКВАЖИН ПРИ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ С
ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ**

В.Ф. Пивень, М.А. Фролов

Орловский государственный университет

В отличие от работ [1-6], рассматривается двумерная упругая нестационарная фильтрация жидкости к совершенным скважинам. Исследуется интерференция системы скважин в случае прямолинейного контура питания. Производится сопоставление со случаем стационарной фильтрации несжимаемой жидкости.

Рассмотрим нестационарную фильтрацию упругой капельной жидкости.

Основным уравнением движения упругой жидкости в упругой пористой среде является уравнение типа теплопроводности [6] (уравнение Щелкачёва):

$$\chi \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1)$$

где p — давление, $\chi = \frac{kK}{m_0\mu}$ — коэффициент пьезопроводности, k — коэффициент проницаемости среды, μ — вязкость среды, m_0 — пористость при начальном давлении p_0 , $K = \frac{K_{жс}}{1 + K_{жс}/m_0 K_c}$ — приведённый модуль упругости жидкости в упругой пористой среде, $K_{жс}$ — модуль объёмной упругости жидкости, K_c — модуль упругости пористой среды.

При решении практических задач целесообразно использовать безразмерные величины. Пусть $p' = \frac{p}{p_0}$ — безразмерное давление, $L' = \frac{L}{L_0}$ — безразмерная длина, $\nabla' = L_0 \nabla$ — безразмерный оператор, $t' = \frac{t}{t_0}$ — безразмерное время. Здесь p_0 , L_0 , t_0 — характерные значения соответствующих величин, их выбор определяется конкретным видом задачи. Выразим величины, входящие в уравнение (1), через соответствующие им безразмерные величины: $p = p_0 p'$, $\nabla = \frac{\nabla'}{L_0}$, $t = t_0 t'$.

Подставив последние соотношения в (1) имеем:

$$\chi \frac{p_0}{L_0^2} \nabla'^2 p' = \frac{p_0}{t_0} \frac{\partial p'}{\partial t'}$$

Полагая $t_0 = \frac{L_0^2}{\chi}$ и опуская штрихи, запишем уравнение (1) в безразмерных величинах:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1')$$

Таким образом, уравнение (1), записанное в безразмерных величинах, полностью сохраняет свой вид.

Фундаментальное решение уравнения (1'), описывающее плоскопараллельное течение жидкости к точечному стоку единичной мощности (мощность предполагается постоянной) в однородной среде имеет вид:

$$p = -\frac{1}{4\pi} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right), \quad (2)$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $\text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$ — функция интегрального экспоненциала.

Поставим задачу о дебите системы совершенных скважин, расположенных в некоторой области D .

Пусть в этой области расположено число p совершенных скважин. Работу скважин, обладающих дебитами¹ q_i , будем моделировать точечными стоками [1, 3, 5]. Полагаем, что координаты центра скважин $M_{0i} = (x_{0i}, y_{0i})$, а их контуры L_{ci} — окружности радиусов R_{ci} $i=1, \dots, n$. Контур L_n является контуром питания скважин.

Течение жидкости в слое происходит вследствие разности давлений на контурах питания L_n и на контурах скважин L_{ci} , $i=1, \dots, n$. Пусть на этих контурах заданы давления. Тогда согласно [2-4], на контурах L_n и L_{ci} , $i=1, \dots, n$ имеем:

$$p(M, t) = 0, \quad M \in L_n, \quad (3)$$

$$p(M, t) = p_i(t), \quad M = M_{ci} \in L_{ci}, \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

где $p_i(t)$, $i=1, \dots, n$ — давление в какой-либо точке контура i -й скважины в момент времени t .

¹ Для эксплуатационных скважин дебиты положительны ($q_i > 0$), нагнетательных — отрицательны ($q_i < 0$).

Выберем в качестве контура питания L_n прямую линию, уравнение которой $x = 0$. Применим к (2), согласно [2, 4], фильтрационную теорему о прямой. Функция давления (2), учитывая, что мощность отдельного стока равна q_i , а их число равно n примет вид:

$$p = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \left[\text{Ei} \left(-\frac{r_i^2}{4t} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t} \right) \right], \quad (5)$$

где $r_i = \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}$, $\tilde{r}_i = \sqrt{(x + x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}$, $i = 1, \dots, n$. Видно, что на контуре питания ($x = 0$) $r_i = \tilde{r}_i$, следовательно, условие (3) выполняется.

Определим дебиты скважин q_i . Удовлетворим (5) условиям (4). Имеем:

$$\begin{cases} p_1(t) = -\frac{1}{4\pi} q_1 \left[\text{Ei} \left(-\frac{R_{c1}^2}{4t} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{\tilde{r}_{c1}^2}{4t} \right) \right] \\ \vdots \\ p_n(t) = -\frac{1}{4\pi} q_n \left[\text{Ei} \left(-\frac{R_{cn}^2}{4t} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{\tilde{r}_{cn}^2}{4t} \right) \right] \end{cases}, \quad M \in L_{ci}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

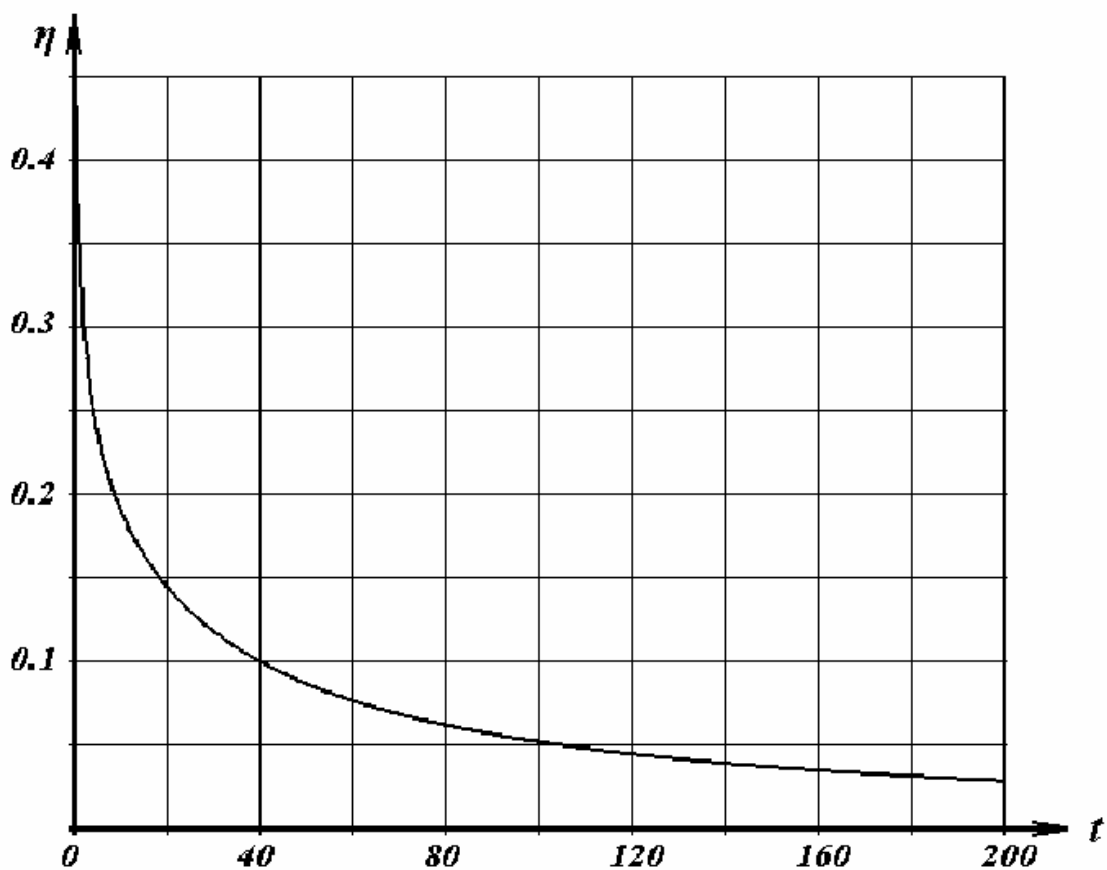
где $\tilde{r}_{ci} = \sqrt{(x_{ci} + x_{0i})^2 + (y_{ci} - y_{0i})^2}$, $i = 1, \dots, n$.

Система (6) состоит из n уравнений и имеет n неизвестных — q_i . Решая систему (6), находим неизвестные величины q_i , $i = 1, \dots, n$.

Исследуем зависимость давления в какой-либо точке контура скважины от параметра t . Рассмотрим одиночную скважину, контуром питания к которой является прямая $x = 0$. Пусть в момент времени t , в какой-либо точке скважины задано давление $p(t)$. На графике (см. ниже)

представлена зависимость величины $\eta = 1 - \frac{p(t)}{p_{уст}}$ от времени. Здесь $p_{уст}$ —

давление в какой-либо точке контура одиночной скважины для соответствующей задачи в случае установившейся фильтрации (жидкость несжимаема, уравнение (1) обращается в уравнение Лапласа). При расчёте принято: $l_0 = 1$ (единица длины), $x_0 = 10l_0$, $y_0 = 0$, $x_c = x_0 + R_c$, $y_c = y_0$, $R_{ci} = 0.01l_0$, $q = 1$. Как видно из графика, с ростом параметра t давление $p(t)$ стремится к давлению $p_{уст}$. При $t \approx 110$, различие $p(t)$ и $p_{уст}$ составляет не более 5%.



Зависимость относительного изменения давления η от времени t

Как видим, упругий характер течения сказывается лишь на первоначальном этапе. При $t \rightarrow \infty$, давление стремятся к соответствующему случаю стационарного режима [1, 3-5].

Проведённые исследования показывают, что формулы для стационарной фильтрации несжимаемой жидкости [1, 3-5], могут быть оценочными для упругого режима, вместо более сложных формул упругого режима. Рассмотренные задачи плоскопараллельной фильтрации могут выступать в качестве тестовых, при дальнейшей разработке метода интегральных уравнений для уравнений параболического типа.

Литература

1. Аксютин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Канд. дисс. Орловский гос. университет, 2000, 153с.
2. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
3. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел.: Изд-во ОГПИ, 1994. 148 с.
4. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дисс. Орёл, Орловский гос. ун-т, 1998, 266с.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1967. 444 с.

6. Фролов М.А. Исследование двумерных граничных задач о дебитах системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Канд. дисс. Орловский гос. Университет, 2001, 148с.
7. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, М., 1963, 396с.

УДК 532.546

ДВА СПОСОБА ПОНИЖЕНИЯ СИНГУЛЯРНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ

Г.В. Скрыбин

Орловский государственный университет

Решается система интегральных уравнений, содержащая сингулярные интегральные уравнения с использованием двух методов на примере двумерной задачи о дебите скважины в кусочно-неоднородных слоях (на границе соприкосновения проницаемость меняется скачком, величина которого зависит от рассматриваемой точки контура).

1. Пусть у нас имеется область D_1 грунт, в которой характеризуется проводимостью $P_1=K_1H_1$. В области D_1 находится включение (область D_2), с законом проводимости $P_2=K_2H_2$ (K_1 и K_2 функции проницаемости среды, H_1 и H_2 толщина слоя в области D_1 и D_2 соответственно, в нашей задаче положим $H_1=H_2=1$). Для определённости в качестве границы соприкосновения σ областей D_1 и D_2 выберем окружность, а вид функций K_1 и K_2 будет следующим: $K_1=k_1y^{-2}$, $K_2=k_2$, где $k_{1,2}=const$. Скважину расположим в центре области D_2 , которая моделируется точечным стоком.

Фильтрацию жидкости в областях D_1 и D_2 описывают квазипотенциалы φ_1 и φ_2 , которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P_v(M) \frac{\partial \varphi_v(M)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_v(M) \frac{\partial \varphi_v(M)}{\partial y} \right) = 0, M \in D_v, v=1,2. \quad (1)$$

На границе сопряжения σ для квазипотенциалов φ_1 и φ_2 выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M), K_1^+(M) \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ = K_2^-(M) \left(\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^-, M \in \sigma. \quad (2)$$

В рассматриваемой задаче, в силу выбранных законов проводимости контуром питания σ_{II} является ось Ox , которая также является сингулярной линией σ_0 (на линии σ_0 проводимость слоя обращается в бесконечность). Поэтому условия

$$\varphi_1^-(M) = C, (C=const), M \in \sigma_{II}, \quad (3)$$

$$\varphi_1^-(M) = A, (A=const), M \in \sigma_0. \quad (4)$$

для выбранных функций будут выполнены.

На контуре скважины σ_c необходимо выполнения условия постоянства давления:

$$\varphi_2(M_c) = C, M_c \in \sigma_c, \quad (5)$$

Квазипотенциалы φ_1 и φ_2 будем искать в виде:

$$\varphi_v(M) = \varphi_{0v}(M) + \Phi_v(M), v=1,2, M \in D_v, \quad (6)$$

Квазипотенциалы $\varphi_{0v}(M)$ описывают течение, вызываемое работой скважины, в отсутствие границы σ , для заданного в области D_v ($v=1,2$) закона проводимости. Они содержат в качестве множителя постоянную Π , которая представляет собой суммарный поток жидкости, подтекаемый к скважине за единицу времени и является искомой величиной. Обоснованием выбора в качестве неизвестной величины величину Π , является то, что проводимость областей D_1 и D_2 описывается различными функциями P_1 и P_2 . А так как приведённый дебит это величина определяемая, как мощность, приходящаяся на единицу проводимости ($q = \frac{\Pi}{P}$), то если задача решалась

относительно дебита q , в квазипотенциалах φ_{01} и φ_{02} фигурировали два различных значения q_1 и q_2 , несовпадающие с искомым дебитом q .

$\Phi_v(M)$ – квазипотенциалы возмущения, вызванного границей σ . Каждый из квазипотенциалов $\Phi_v(M)$, ($v=1,2$) характеризует течение в области D_v , и не имеет в ней особых точек.

Следуя [1,2,3], потенциалы возмущения $\Phi_v(M)$, ($v=1,2$) будем искать в виде потенциалов двойного слоя.

$$\Phi_v(M) = \int_{\sigma} g_v(N) P_v(N) \frac{\partial F_v(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, M \in D_v, v=1,2. \quad (7)$$

Здесь \vec{n}_N – вектор нормали, направленной в область D_1 , $g_v(N)$ – непрерывные функции распределения плотностей на кривой σ , $P_v(N)$ – проводимость слоя в точке $N \in \sigma$. $F_v(M, N)$, $v=1,2$ – фундаментальные решения уравнения (1), имеющие в точке N особенность.

После подстановки (6) в условия (2)-(5) задача о дебите скважины сводится к системе интегральных уравнений и интегрального соотношения.

$$\begin{aligned} & \frac{g_1(M) + g_2(M)}{2} + \int_{\sigma} \left(P_1(N) g_1(N) \frac{\partial F_1(M, N)}{\partial n_N} - P_2(N) g_2(N) \frac{\partial F_2(M, N)}{\partial n_N} \right) d\sigma_N = \\ & = \varphi_{02}(M) - \varphi_{01}(M), \quad M \in \sigma \\ & K_1(M) \int_{\sigma} g_1(N) P_1(N) \frac{\partial^2 F_1(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N - K_2(M) \int_{\sigma} g_2(N) P_2(N) \frac{\partial^2 F_2(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N \\ & = K_2(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M} - K_1(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma \\ & \int_{\sigma} g_2(N) P_2(N) \frac{\partial F_1(M_c, N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \varphi_{02}(M_c) = C, \quad M_c \in \sigma_c \end{aligned} \quad (8)$$

Фундаментальные решения уравнения (1), входящие в ядра интегралов системы (8) имеют вид [1,3]:

$$F_1(M, N) = \frac{y_M y_N}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \omega_{MN} \ln \left(\frac{1 + \omega_{MN}}{\omega_{MN} - 1} \right) - 1 \right), N \in \sigma$$

$$\omega_{MN} = 1 + \frac{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}{2y_M y_N}$$

$$F_2(M, N) = -\ln r_{MN}, \quad r_{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2},$$

Квазипотенциалы $\varphi_{0v}(M)$ ($v=1,2$), равны следующим выражениям:

$$\varphi_{01}(M) = \frac{q}{2\pi} \frac{y_0}{y_M} \left(\frac{1}{2} \omega_{MM_0} \ln \left(\frac{1 + \omega_{MM_0}}{\omega_{MM_0} - 1} \right) - 1 \right),$$

$$\omega_{MM_0} = 1 + \frac{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2}{2y_M y_0},$$

$$\varphi_{02}(M) = -\frac{q}{2\pi} \ln r_{MM_0}, \quad r_{MM_0} = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2}.$$

Точка $M(x_0, y_0)$, место положения скважины.

2. Для численного решения системы (8), в которой второе интегральное уравнение содержит сильную сингулярность, воспользуемся двумя методами.

Для решения системы интегральных уравнений первым методом, перейдём от сильно сингулярного уравнения в системе (8) к слабо сингулярному уравнению Фредгольма первого рода. Для этого вместо квазипотенциала источника в фундаментальном решении $F_v(M, N)$ ($v=1,2$) введём квазипотенциал вихря, тогда уравнение примет вид:

$$\int_{\sigma} \left[\frac{\partial g_1(N)}{\partial \sigma_N} \frac{\partial \psi_1^{exp}(M, N)}{\partial \sigma_M} - \frac{\partial g_2(N)}{\partial \sigma_N} \frac{\partial \psi_2^{exp}(M, N)}{\partial \sigma_M} \right] d\sigma_N =$$

$$P_1(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M} - P_2(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M}, \quad M \in \sigma, \quad (9)$$

функция $\psi_v^{exp}(M, N)$ – функция тока нормированного вихря. Для численного решения системы (8), сильно сингулярное интегральное уравнение следует заменить слабо сингулярным интегральным уравнением (9)

Данный переход подробнее можно посмотреть в статье [4], данного сборника или [5]

Для решения системы (8) с сильно сингулярным интегральным уравнением вторым способом, рассмотрим поле градиента от потенциала двойного слоя (7), удовлетворяющему уравнению (1) по разомкнутой кривой σ^* с постоянной плотностью g :

$$\vec{V} = grad_M \Phi(M, N) = V_{X_M} \vec{i} + V_{Y_M} \vec{j}$$

Рассмотрим составляющую V_{X_M} этого поля:

$$V_{X_M} = g \int_{\sigma^*} \frac{\partial}{\partial x_M} P(N) \frac{\partial}{\partial n_N} F(M, N) d\sigma_N^*$$

Так как переменные x_M и x_N в функции $F_v(M, N)$ входят в виде разности, то $\frac{\partial}{\partial x_M} = -\frac{\partial}{\partial x_N}$, учитывая, что $\vec{n} = y'_{N\sigma} \vec{i} - x'_{N\sigma} \vec{j}$, перепишем V_{X_M}

$$\begin{aligned} V_{X_M} &= -g \int_{\sigma^*} \frac{\partial}{\partial x_N} P(N) \frac{\partial}{\partial n_N} F(M, N) d\sigma_N^* = \\ &= -g \int_{\sigma^*} \frac{\partial}{\partial x_N} P(N) \left(\frac{\partial}{\partial x_N} F(M, N) y'_\sigma - \frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) x'_\sigma \right) d\sigma_N^*. \end{aligned}$$

Из того, что функции $F_v(M, N)$ являются решением уравнения (1), и симметричные относительно точек M и N следует:

$$\begin{aligned} V_{X_M} &= -g \int_{\sigma^*} \frac{\partial}{\partial x_N} P(N) \left(\frac{\partial}{\partial x_N} F(M, N) y'_\sigma - \frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) x'_\sigma \right) d\sigma_N^* = \\ &= -g \int_{\sigma^*} \left(-\frac{\partial}{\partial y_N} P(N) \frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) y'_\sigma - \frac{\partial}{\partial x_N} P(N) \frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) x'_\sigma \right) d\sigma_N^* = \\ &= g \int_{\sigma^*} d \left(P(N) \frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) \right) d\sigma_N^* = g \left(P(N) \frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) \right) \Big|_A^B, \end{aligned}$$

где A и B точки концов кривой σ^* .

Для составляющей V_{Y_M} аналогичными рассуждениями получаем

$$V_{Y_M} = -g \left(P(N) \frac{\partial}{\partial x_N} F(M, N) \right) \Big|_A^B$$

Тогда

$$\vec{V}\vec{n} = V_{X_M} n_{X_M} + V_{Y_M} n_{Y_M} = gP(N) \left(\frac{\partial}{\partial y_N} F(M, N) n_{X_M} - \frac{\partial}{\partial x_N} F(M, N) n_{Y_M} \right) \Big|_A^B$$

Таким образом, если разбить контур сопряжения σ , по параметру τ , длины дуги кривой на n равных частей с шагом h , то выше приведённые рассуждения справедливы для участков кривых $\sigma_{N_K N_{K+1}}$ заключённых между точками N_K и N_{K+1} . А интегралы, стоящие в сильно сингулярном интегральном уравнении можно записать по квадратурным формулам прямоугольников, считая функцию g на участках $\sigma_{N_K N_{K+1}}$ постоянной (в силу теоремы о среднем) Данному разбиению сопоставим два семейства точек. Семейство $E_1 = \{\tau_k, k=1..n\}$ и $E_2 = \{\tau_m, m=1..n\}$ таких, что $\tau_m = \tau_k + \frac{h}{2}$.

Вычислив интегралы в интегральном уравнении, получим систему алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{k=1}^n g_{1k} [\Omega_1(\tau_m, \tau_{k+1}) - \Omega_1(\tau_m, \tau_k)] - \sum_{k=1}^n g_{2k} [\Omega_2(\tau_m, \tau_{k+1}) - \Omega_2(\tau_m, \tau_k)] + \gamma =$$

$$= P_{1m} \frac{\partial \varphi_{01}(\tau_m)}{\partial n_M} - P_{2m} \frac{\partial \varphi_{02}(\tau_m)}{\partial n_M}, \quad m=1,2,\dots,n \quad (10)$$

где $\Omega_1(\tau_m, \tau_k) = P_1(N) \left(\frac{\partial}{\partial y_N} F_1(M, N) n_{X_M} - \frac{\partial}{\partial x_N} F_1(M, N) n_{Y_M} \right),$

$$N \in \sigma, M \in \sigma$$

$$\Omega_2(\tau_m, \tau_k) = P_2(N) \left(\frac{\partial}{\partial y_N} F_2(M, N) n_{X_M} - \frac{\partial}{\partial x_N} F_2(M, N) n_{Y_M} \right),$$

$$N \in \sigma, M \in \sigma$$

γ – регуляризирующий параметр[2].

Ввод параметра γ добавляет в систему уравнений (8) дополнительное условие, необходимое для выделения единственного решения [2]:

$$\int_{\sigma} (g_1(N) + g_2(N)) d\sigma_N = 0,$$

ему соответствует алгебраическое уравнение:

$$\sum_{k=1}^n (g_1(\tau_k) + g_2(\tau_k)) h_k = 0. \quad (11)$$

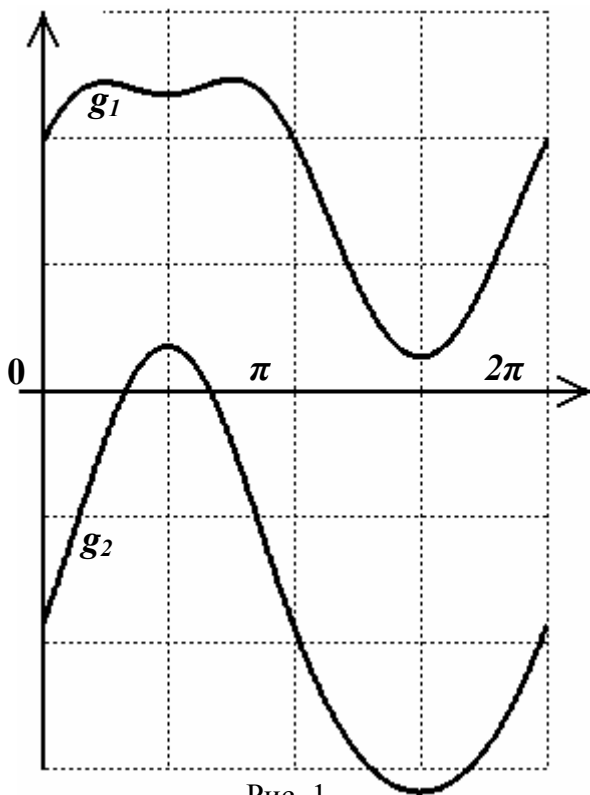


Рис. 1.

Зависимость функций g_1 и g_2 от точек границы сопряжения.

Данное условие становится более понятным, если вспомнить, что функции $g_v(N)$, ($v=1,2$) являются периодическими функциями координат границы σ . На рис.1 представлен вид функций g_1 и g_2 в зависимости от параметра длины контура, для коэффициентов $k_1=1$ и $k_2=1$ в выражениях для проницаемостей $K_1=k_1 y^{-2}$, $K_2=k_2$. Для других значений коэффициентов k_1 и k_2 функции g_1 и g_2 также являются периодическими.

Первое интегральное уравнение и интегральное соотношение в системе (8) вычислим методом прямоугольников с использованием одного семейства точек E_l . В этом случае, особенности (плотности g_v) будут распределены по тем же точкам кривой σ , как и при записывании алгебраических уравнений для сильно сингулярного интегрального уравнения.

$$\frac{g_{1m} + g_{2m}}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n_1} [g_{1k} \Omega_1(\tau_m, \tau_k) - g_{2k} \Omega_2(\tau_m, \tau_k)] h = \varphi_{02}(\tau_m) - \varphi_{01}(\tau_m),$$

$$m=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} g_{2k} \Omega_2(M_c, \tau_k) h + \varphi_{02}(M_c) = C, M_c \in \sigma_c$$

где $\Omega_1(\tau_m, \tau_k) h \approx P_1(N) \frac{\partial F_1(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, N \in \sigma, M \in \sigma$

$$\Omega_2(\tau_m, \tau_k) h \approx P_2(N) \frac{\partial F_2(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, N \in \sigma, M \in \sigma$$

$$g_{vk} = g_v(\tau_k), v=1, 2, k=1, \dots, n,$$

Таким образом, для численного решения задачи о дебите скважины необходимо решать систему из алгебраических уравнений (10) - (12), где количество неизвестных равно $2n+2$, а именно $g_{vk}, v, k=1, 2, k=1..n, q$ и γ .

3. Для сравнения результатов решения задачи, изложенными способами, построим зависимости $\eta_j = \frac{\Pi_j}{\Pi_0} - 1, j=1, 2$ от величины y

(рис. 2.), характеризующей положение скважины в месте с областью D_2 . y – кратчайшее расстояние от границы σ до контура питания σ_{II} . Π_0 – полный расход скважины, вычисленный для области с законом проводимости аналогичному в области D_1 , в которой нет границы сопряжения σ . Π_1 – полный расход, найденный при численном решении системы алгебраических уравнений полученной с использованием функции тока

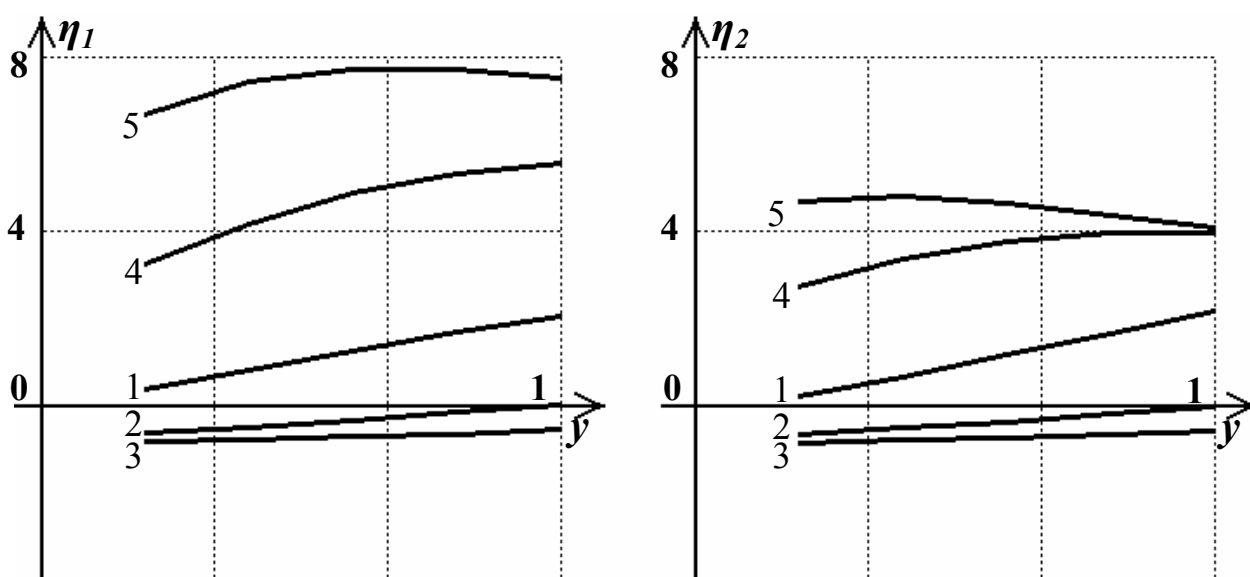


Рис. 2.

Зависимости мощности скважины от характеристик грунта и её положения, полученные двумя способами решения основной системы интегральных уравнений.

вихря, Π_2 – результат, полученный при решении системы выделением полного дифференциала. Данная зависимость показывает, влияние включения (область D_2) на характеристики работы скважины.

Характерным размером в задаче выберем размер области D_2 , который будет определяться величиной диаметра d окружности σ . Первоначальное расстояние от центра скважины до границы питания σ_{II} выберем равным характерному размеру.

Построенные кривые (рис. 2.) соответствуют различным коэффициентам k_1 и k_2 в выражениях для проницаемостей K_1, K_2 , (1 - $k_1=1, k_2=1$, 2 - $k_1=1, k_2=1/4$, 3 - $k_1=1, k_2=1/10$, 4 - $k_1=1/4, k_2=1$, 5 - $k_1=1/10, k_2=1$).

Из анализа полученных зависимостей видим, что расхождение результатов растёт с уменьшением коэффициента k_1 для функции K_1 , что можно объяснить нарушением неразрывности течения, т. е. нарушением

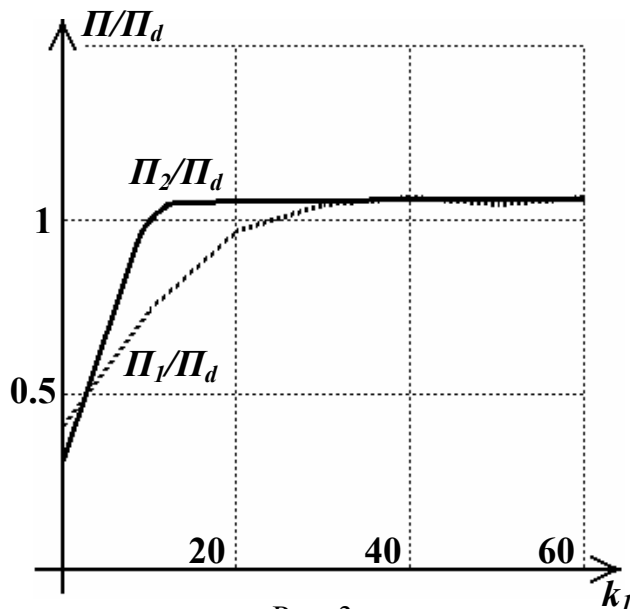


Рис. 3.

Предельный переход к задаче о дебите скважины с круговым контуром питания.

основного уравнения (1). При увеличении коэффициента k_1 решения $\eta_j, j=1,2$ уже не сильно отличаются друг от друга (менее 5% при $k_1=1, k_2=1$). Данная тенденция сохраняется и при дальнейшем увеличении k_1 . Особенно отметим предельный переход, при увеличении коэффициента k_1 величины Π_1 и Π_2 стремятся к значению мощности Π_d , рассчитанного по формуле Дюпюи для кругового контура питания того же размера, что и область D_2 , различие составляет около 5% (рис.3.).

На графике приведены две зависимости, пунктиром представлена зависимость полученная при решении основной системы интегральных уравнений методом с применением функции тока вихря, сплошной линией – зависимость полученная при решении системы с выделением полного дифференциала.

Круговое включение однородного грунта в области нахождения скважины сказывается на её работе (значении Π) различным образом. Если проницаемость K_2 внутренней области D_2 увеличивается по сравнению с проницаемостью K_1 внешней области D_1 то влияние включения растёт (значение Π отличается от его значения в отсутствии включения на величину большую 40%), с увеличением проницаемости K_1 внешней области полный расход скважины не сильно (менее 10%) отличается от его значения в отсутствии включения (рис. 2).

В заключении отметим, что ни один из рассмотренных методов не имеет преимуществ перед другим, так как оба требуют приблизительно одинаковых вычислительных ресурсов.

На рис. 4 построено поле скоростей фильтрации жидкости к скважине с параметрами $k_1=1$, $k_2=\frac{1}{4}$. Полученная картина течений отвечает физическому смыслу и является правдоподобной.

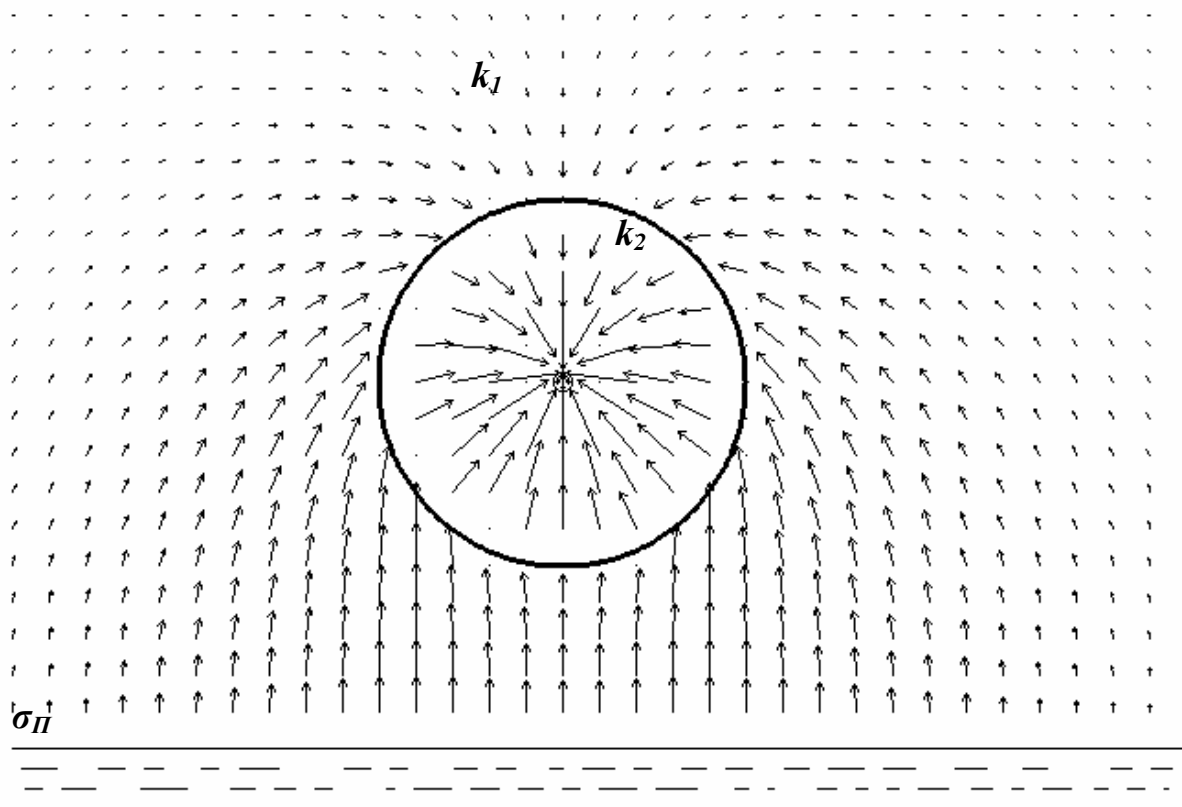


Рис. 4.

Поле скоростей течения жидкости к скважине в рассматриваемой задаче.

Литература

1. Аксютин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта // Кандидат. дисс. Орёл. ОГУ. 2000. 153 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва. ТОО «Янус». 1995. 520 с.
3. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости // Кандидат. дисс. Орёл. ОГУ. 2002. 191 с.
4. Пивень В.Ф. «Интегральные уравнения задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородном слое» // См. настоящий сборник.
5. Скрыбин Г.В. Определение дебита скважины в кусочно неоднородных слоях, проводимость которых изменяется по степенному закону. // Тр. XI Международного симп. «МДОЗМФ-2003». Харьков-Херсон. 2003. с. 250-255.

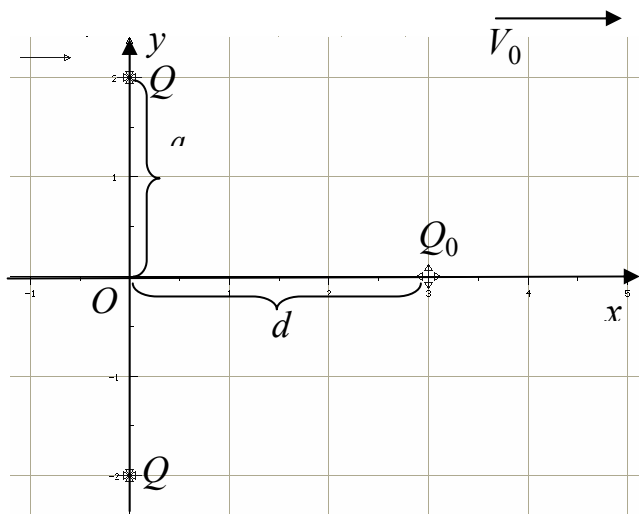
ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СЛОЖНОГО ВОДОЗАБОРА В ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ С ИСТОЧНИКОМ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Д.Е. Шестерин

Орловский государственный университет

Рассматривается плоскопараллельная задача о продвижении границы раздела «разноцветных» жидкостей. Исследуется зависимость времени загрязнения водозабора от положения источника загрязнения.

Рассмотрим задачу о продвижении границы раздела «разноцветных» жидкостей (обладающих одинаковыми физическими и механическими свойствами) в однородной среде.



На оси абсцисс на равном расстоянии a от начала координат располагаются две совершенные эксплуатационные скважины с дебитом Q (водозабор). На оси ординат на расстоянии d от начала координат располагается совершенная нагнетательная скважина с дебитом Q_0 (источник загрязнения). Также присутствует поступательный поток со

скоростью V_0 , направленной против положительного направления оси Ox .

Требуется построить картину течения, найти его критические точки и проследить распространение «загрязнения» с течением времени.

Движение жидкости в пористой среде описывается законом Дарси (1) и уравнением неразрывности (2):

$$\vec{V} = k\nabla\left(-\frac{p + \rho gz}{\mu}\right) = k\nabla\phi, \text{ где } \phi = -\frac{p + \rho gz}{\mu} \quad (1)$$

Уравнение неразрывности в плоскопараллельном случае, при постоянных ρ и σ имеет вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Запишем функцию тока сложного течения.

Функция тока поступательного потока имеет вид:

$$\psi_1 = V_0 y \quad (3)$$

Функции тока эксплуатационных скважин (скважин водозабора) имеют следующий вид:

$$\psi_2 = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{x}\right) \quad \psi_3 = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y+a}{x}\right) \quad (4)$$

Нагнетательная скважина (источник загрязнения):

$$\psi_4 = \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-d}\right) \quad (5)$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции и формулами (3), (4), (5) получим:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = \\ &= V_0 y - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{x}\right) - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y+a}{x}\right) + \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-d}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем это выражение в безразмерных величинах. Для этого введем безразмерную функцию тока $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{V_0 a}$, безразмерный дебит $\tilde{Q} = \frac{Q}{2\pi V_0 a}$,

безразмерные координаты $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\tilde{y} = \frac{y}{a}$, безразмерный дебит источника

загрязнения $\tilde{Q}_0 = \frac{Q_0}{2\pi V_0 a}$, и безразмерный параметр $\tilde{d} = \frac{d}{a}$. Тогда выражение

(6) примет вид:

$$\tilde{\psi} = \tilde{y} - \tilde{Q} \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}}\right) - \tilde{Q} \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}}\right) + \tilde{Q}_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{d}}\right) \quad (7)$$

Дифференцируя выражение (7) найдем составляющие скорости течения:

$$\tilde{V}_x = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} = 1 - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{x} + \frac{(\tilde{y}-1)^2}{\tilde{x}}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{x} + \frac{(\tilde{y}+1)^2}{\tilde{x}}} + \frac{\tilde{Q}_0}{(\tilde{x}-\tilde{d}) + \frac{\tilde{y}^2}{(\tilde{x}-\tilde{d})}} \quad (8)$$

$$\tilde{V}_y = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\tilde{Q}(\tilde{y}-1)}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{Q}(\tilde{y}+1)}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2} + \frac{\tilde{Q}_0 \tilde{y}}{(\tilde{x}-\tilde{d})^2 + \tilde{y}^2} \quad (9)$$

Для нахождения координат критических точек этого течения следует приравнять составляющие скорости к нулю и решить уравнения (8) и (9) совместно. Однако, аналитическое решение такой системы оказывается сложным. Ее решения имеет смысл получать численно. Аналитические выражения для координат критических точек могут быть получены, если положить дебит источника загрязнения \tilde{Q}_0 равным нулю. В этом случае:

1. Если $\tilde{Q}^2 \geq 1$ имеем две особые точки, лежащие на оси абсцисс с координатами $\left(\tilde{Q} + \sqrt{\tilde{Q}^2 - 1}, 0\right)$ и $\left(\tilde{Q} - \sqrt{\tilde{Q}^2 - 1}, 0\right)$

2. Если $\tilde{Q}^2 < 1$ то имеем две особые точки, симметричные относительно оси абсцисс с координатами $\left(Q, \sqrt{-Q^2 + 1}\right)$ и $\left(Q, -\sqrt{-Q^2 + 1}\right)$.

В первом случае крайняя правая точка области захвата имеет координаты $\left(\tilde{Q} + \sqrt{\tilde{Q}^2 - 1}, 0\right)$. Это выражение может быть использовано для оценки «безопасного» расстояния от водозабора до источника загрязнения малого дебита по сравнению с дебитом водозабора (водозабор должен располагаться не ближе точки $\left(\tilde{Q} + \sqrt{\tilde{Q}^2 - 1}, 0\right)$. Во втором случае ось Ox не входит в область захвата скважин водозабора и загрязнение не попадает в скважины водозабора при любом положении источника загрязнения малого дебита на оси Ox .

Попытаемся построить в разные моменты времени положение точек границы загрязнения. В начальный момент времени положение точек границы области загрязнения будем считать известным. Движение точек границы загрязнения с течением времени описывается уравнением:

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (10)$$

Запишем это уравнение в безразмерных величинах: выберем характерный размер L^x , характерную скорость V^x , и характерное время T^x . Тогда:

$$m \frac{L^x d\left(\frac{\vec{r}}{L^x}\right)}{T^x d\left(\frac{t}{T^x}\right)} = \frac{\vec{V}}{V^x} V^x \quad (11)$$

Введем безразмерные координаты $\tilde{r} = \frac{\vec{r}}{L^x}$, $\tilde{t} = \frac{t}{T^x}$, $\tilde{V} = \frac{\vec{V}}{V^x}$ тогда (11)

примет вид:

$$\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \tilde{V} \frac{T^x V^x}{m L^x}$$

Видно, что, принимая $T^x = \frac{m L^x}{V^x}$ можно упростить это выражение.

Окончательно, уравнение (10) в безразмерных величинах имеет вид:

$$\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \tilde{V}$$

Или, если записать его в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{V}_x \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{V}_y \end{cases} \quad (12)$$

В начальный момент времени положение точек границы считается известным:

$$x = x(\theta, 0) = x_0(\theta), \quad y = y(\theta, 0) = y_0(\theta) \quad (13)$$

Где θ - параметр.

Для нахождения координат точек границы загрязнения следует решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (12) при начальных условиях (13).

Примем за характерную скорость – скорость поступательного потока, за характерный размер – кратчайшее расстояние от оси абсцисс до скважины водозабора, т.е. $V^x = V_0$, $L^x = a$. Тогда $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\tilde{y} = \frac{y}{a}$. Принимая $\tilde{Q} = \frac{Q}{2\pi V_0 a}$,

$\tilde{Q}_0 = \frac{Q_0}{2\pi V_0 a}$, $\tilde{d} = \frac{d}{a}$, $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{V_0 a}$. Функция тока сложного течения в

безразмерных величинах:

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{V_0 a} = \tilde{y} - \tilde{Q} \arctg\left(\frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}}\right) - \tilde{Q} \arctg\left(\frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}}\right) + \tilde{Q}_0 \arctg\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{d}}\right) \quad (14)$$

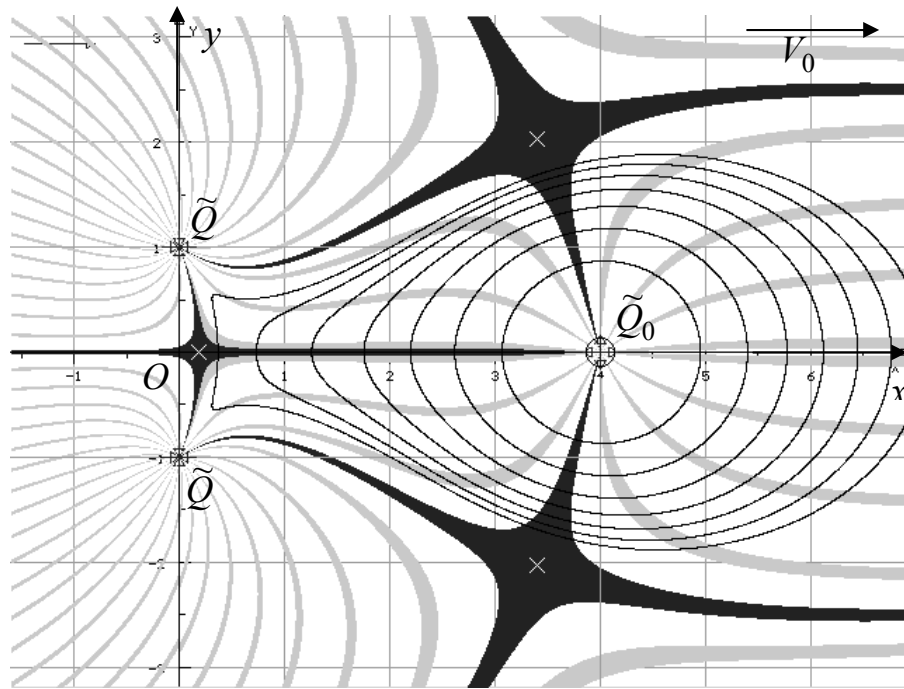
Подставляя в систему (12) выражения для скоростей: $\tilde{V}_x = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}$, $\tilde{V}_y = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}$,

где ψ задается выражением (14) окончательно получим:

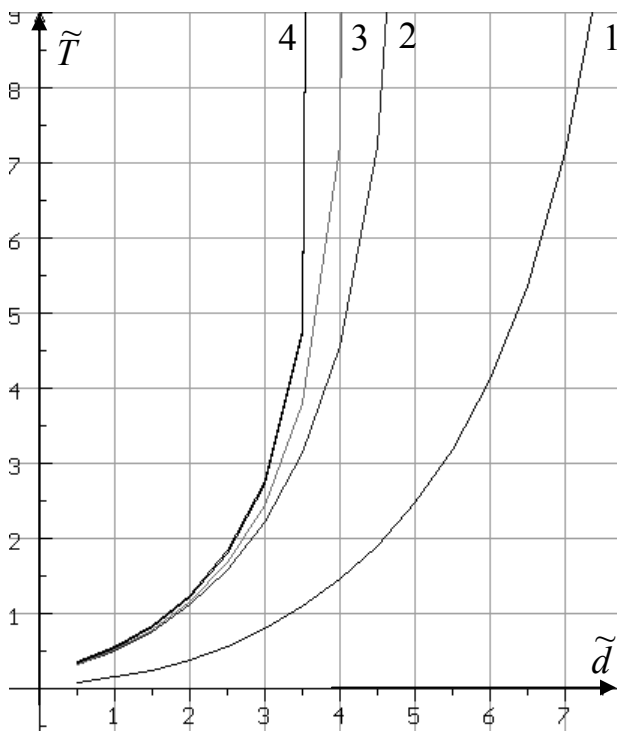
$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 1 - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{x} + \frac{(\tilde{y}-1)^2}{\tilde{x}}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{x} + \frac{(\tilde{y}+1)^2}{\tilde{x}}} + \frac{\tilde{Q}_0}{(\tilde{x}-\tilde{d}) + \frac{\tilde{y}^2}{(\tilde{x}-\tilde{d})}} \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = -\frac{\tilde{Q}(\tilde{y}-1)}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{Q}(\tilde{y}+1)}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2} + \frac{\tilde{Q}_0 \tilde{y}}{(\tilde{x}-\tilde{d})^2 + \tilde{y}^2} \end{cases} \quad (15)$$

Решение этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка позволяет проследить эволюцию границы загрязнения со временем.

В начальный момент точки границы загрязнения принимаются расположенными на контуре нагнетательной скважины $R_c = 0.1L^x = 0.1a$.



Границы загрязнения через одну пятую характерного времени
Случай попадания загрязнения в водозабор



Была также исследована зависимость времени достижения водозабора загрязнением от расстояния до источника загрязнения. На приведенных ниже графиках показана зависимость времени достижения загрязнением водозабора от расстояния до источника загрязнения, при различных значениях дебитов скважин водозабора и источника загрязнения. Дебит скважины водозабора выбран $\tilde{Q} = 2$, скорость поступательного потока $\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}$. Дебит источника загрязнения для кривой 1: $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}$; для кривой 2:

$$\tilde{Q}_0 = \frac{\tilde{Q}}{10}; \text{ для кривой 3: } \tilde{Q}_0 = \frac{\tilde{Q}}{100}; \text{ для кривой 4: } \tilde{Q}_0 = \frac{\tilde{Q}}{\infty}$$

Литература

1. Пивень В.Ф. «Функции комплексных переменных в динамических процессах» Орел, ОГУ, 1994 г.
2. Голубева О.В. «Курс механики сплошных сред» Москва, Высшая школа, 1971 г.

Научное издание

Т Р У Д Ы

Международных школ-семинаров
«Методы дискретных особенностей
в задачах математической физики»

Выпуск 2

Компьютерная верстка – Ю.С. Федяев

Подписано в печать 30.10.2003 г. Формат 60x84 1/6
Усл. печ. л. 5. Заказ № 3010 от 30.10.2003 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО ПФ «Картуш»
302020, г. Орел, ул. Матросова, 5. Тел. 43-35-08