Орловский государственный университет

**Харьковский национальный
университет им. В.Н. Каразина**

Институт вычислительной математики РАН

**Военно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н.Е. Жуковского**

ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНЫХ ШКОЛ-СЕМИНАРОВ «МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Выпуск 3

Орел • 2004

Печатается по решению организационного комитета Международных школ-семинаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

Труды Международных школ-семинаров **«Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»**. Выпуск 3. Орёл. ОГУ. 2004. – 81 с.

В сборнике представлены статьи участников Международных школ-семинаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школ-семинаров.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем в теории фильтрации, гидродинамике, теплопроводности и других областях механики и физики, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, численных методов и других методов математической физики.

Компьютерная вёрстка Федяев Ю.С.

Сборник трудов Международных школ-семинаров «МДОЗМФ» издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-96433).

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ НАКЛОННОЙ СКВАЖИНЫ, РАБОТАЮЩЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ[1]

А.А. Аксюхин
Орловский государственный университет, aksjuhin@au.ru

Как правило, водо- и нефтеносные пласты грунта не являются однородными. Их проницаемость непрерывно меняется от точки к точке или скачком на границах стыковки пород с различными проницаемостями. Трёхмерные фильтрационные течения к скважинам в таких слоях наименее изучены, а расчёт их дебита представляет большой практический интерес.

Построена математическая модель трёхмерного фильтрационного течения к несовершенной наклонной эксплуатационной скважине, работающей в кусочно-неоднородной по проницаемости среде. Проведён численный расчёт картины течения к такой скважине.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим стационарную напорную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости к наклонной несовершенной (по форме вскрытия пласта) скважине. Область D течения жидкости ограничена гладкой замкнутой поверхностью питания σ_Π класса Ляпунова и непроницаемой плоскостью σ_0. Причём, область D разбивается замкнутой поверхностью σ того же класса, что и σ_Π, на две области: внешнюю D_1 и внутреннюю D_2, среды в которых, в отличие от работ [1-3], характеризуются отличающимися друг от друга переменными коэффициентами проницаемостей $K_1(M)=k_1 z_M^2$ и $K_2(M)=k_2$ соответственно ($k_\nu = \text{const}_\nu$, $\nu = 1, 2$). Здесь $M(x, y, z)$ – точка области D. Поверхности σ_Π и σ не касаются и не пересекаются.

Течение жидкости в областях D_ν, $\nu = 1{,}2$ описывают искомые квазипотенциалы скоростей $\varphi_\nu(M)$, которые всюду в области $D \setminus \Sigma$, за исключением фильтра скважины, удовлетворяют записанному в безразмерных величинах уравнению:

$$\nabla\left[K_\nu(M)\nabla\varphi_\nu(M)\right]=0,\ M\in D\setminus\Sigma, \qquad (1.1)$$

где $\Sigma=\sigma\bigcup\sigma_\Pi\bigcup\sigma_0\bigcup\sigma_C$, где σ_C – поверхность фильтра скважины, и условиям сопряжения на границе σ [1]:

$$K_1(M)\left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+ = K_2(M)\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^-,\ \varphi_1^+(M)=\varphi_2^-(M),\ M\in\sigma. \qquad (1.2)$$

Здесь n_M — внешняя нормаль к поверхности σ, а индексы «+» и «–» означают предельные значения соответствующих функций при приближении к σ извне и изнутри соответственно.

На сингулярной плоскости σ_0 функция $\varphi_1(M)$ удовлетворяет условию

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-96433).

$$K_1(M)\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M}=0, \; M \in \sigma_0. \tag{1.3}$$

Наклонная скважина целиком расположена в области D_2, и поверхность её фильтра σ_C не имеют общих точек с поверхностями σ и σ_0. Фильтр скважины будем моделировать круговым цилиндром L_C длины L и радиусом R_C.

Согласно [4], поверхность постоянного давления на фильтре скважины можно считать узкими эллипсоидами σ_C с фокусами в точках, совпадающими с центрами основания цилиндра. При этом полуоси эллипсоида будут близки к R_C и $L/2$, а объёмы цилиндра L_C и эллипсоида σ_C будут незначительно отличаться друг от друга.

Работу скважины можно моделировать линейным стоком длины L, расположенным на оси цилиндра L_C, с расходом Π жидкости в единицу времени. Величину $q=\Pi/L$ будем называть *дебитом скважины*, приходящимся на единицу длины фильтра. Эту величину необходимо отыскать.

Давления жидкости на поверхностях питания σ_Π и фильтре скважины σ считаются известными и задаются соотношениями:

$$\varphi_1^-(M)=0, \; M \in \sigma_\Pi. \tag{1.4}$$

$$\varphi_2(M_C)=C, \; M_C \in \sigma_C. \tag{1.5}$$

Здесь, в силу малости размеров фильтра скважин по сравнению с размерами областей D_ν, $\nu=1,2$, считается, что $C=\text{const}$ – среднее значение давления на фильтре скважины, а точка M_C является средней точкой поверхности фильтра σ_C, $\varphi_1^-(M)$ – предельное значение квазипотенциала при подходе к границе σ_Π изнутри.

Декартову систему координат x,y,z выберем так, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью σ_0, а ось Oz была направлена в область D (см. рис. 1.).

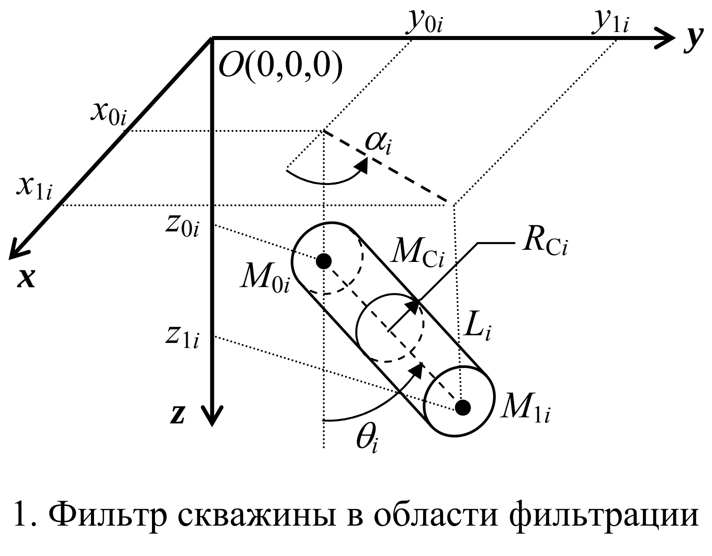


Рис. 1. Фильтр скважины в области фильтрации

Пусть один из концов фильтра скважины (например, ближайший к плоскости σ_0) расположен точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тогда координаты второго конца фильтра $M_1(x_1, y_1, z_1)$ вычисляются по формулам:

$$x_1 = x_0 + L\sin\theta\cdot\cos\alpha;\ y_1 = y_0 + L\sin\theta\cdot\sin\alpha;\ z_1 = z_0 + L\cos\theta, \quad (1.6)$$

где θ и α – углы сферической системы координат, связанной с выбранными декартовыми координатами, показанные на рис. 1.

Известно также, что в отсутствии границ σ и σ_{Π}, течение в области $D = D_1 \bigcup D_2$ описывает квазипотенциал $\varphi_1^*(M)$, если проницаемость среды изменяется по закону $K_1(M)$, или – $\varphi_2^*(M)$, если среда имеет проницаемость $K_2(M)$. Функции $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu = 1{,}2$ являются решениями уравнений (1.1), удовлетворяют условию (1.3) и содержат искомый дебит скважины q:

$$\varphi_\nu^*(M) = q\tilde{\varphi}_\nu^*(M),\ \nu = 1, 2, \quad (1.7)$$

где $\tilde{\varphi}_\nu^*(M)$ – заданные функции координат.

2. Сведение задачи о дебите системы наклонных скважин к системе интегральных уравнений.

Поиск решения задачи (1.1)-(1.5), (1.7) будем проводить в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \varphi_\nu^*(M) + \Phi_\nu(M),\ M \in D_\nu \setminus \Sigma,\ \nu = 1{,}2, \quad (2.1)$$

где $\Phi_\nu(M)$ – квазипотенциалы возмущения, обусловленные наличием границ σ и σ_{Π}.

Как показано в работе [5], квазипотенциалы $\Phi_\nu(M)$, $\nu = 1{,}2$ можно моделировать квазипотенциалами простого слоя, распределёнными с плотностями g_ν и f, $\nu = 1{,}2$ по поверхностям σ и σ_{Π}. В частности:

$$\Phi_1(M) = \int_\sigma g_1(N)K_1(N)F_1(M,N)d\sigma_N + \int_{\sigma_\Pi} f(T)K_1(T)F_1(M,T)d\sigma_{\Pi T},\ M \in D_1 \setminus \Sigma, \quad (2.2)$$

$$\Phi_2(M) = \int_\sigma g_2(N)K_2(N)F_2(M,N)d\sigma_N,\ M \in D_2 \setminus \Sigma,\ N \in \sigma,\ T \in \sigma_\Pi. \quad (2.3)$$

где $F_\nu(M,N)$ и $F_1(M,T)$ – фундаментальные решения уравнения (1.1), в областях D_ν с проницаемостями $K_\nu(M)$, $\nu = 1{,}2$. Функции $F_\nu(M,N)$ и $F_1(M,T)$, $\nu = 1{,}2$ удовлетворяют условию (1.3).

Следуя [6], функции (2.2) и (2.3) и их нормальные к поверхностям σ и σ_Π производные непрерывно продолжим на эти границы. Предельные значения этих выражений, по аналогии с [6], будут иметь вид:

$$\Phi_{1,2}^{\pm}(M) = \Phi_{1,2}(M),\ \left(\frac{\partial\Phi_{1,2}(M)}{\partial n_M}\right)^{\pm} = \frac{\partial\Phi_{1,2}(M)}{\partial n_M} \mp \frac{g_{1,2}(M)}{2},\ M \in \sigma, \quad (2.4)$$

$$\Phi_1^-(M) = \Phi_1(M),\ \ M \in \sigma_\Pi, \quad (2.5)$$

где $\Phi_{1,2}(M)$ определяются формулами (2.2).

Так как область фильтрации ограничена поверхностями σ_{Π}, σ и не содержит бесконечно-удаленную точку, то дополнительные условия на функции $\Phi_{1,2}(M)$ не накладываются.

При подстановке функций (2.1) в граничные условия (1.2)-(1.5), с учётом формул (2.2)-(2.5), получим системы интегральных уравнений:

$$\iint_{\sigma}\left[g_1(N)K_1(M)K_1(N)\frac{\partial F_1(M,N)}{\partial n_M}-g_2(N)K_2(M)K_2(N)\frac{\partial F_2(M,N)}{\partial n_M}\right]d\sigma_N+$$
$$+\iint_{\sigma_{\Pi}} f(T)K_1(M)K_1(T)\frac{\partial F_1(M,T)}{\partial n_M}d\sigma_{\Pi T}-\frac{1}{2}\left[K_1(M)g_1(M)+K_2(M)g_2(M)\right]=$$
$$=K_2(M)\frac{\partial\varphi_2^*(M)}{\partial n_M}-K_1(M)\frac{\partial\varphi_1^*(M)}{\partial n_M},\ M\in\sigma;$$

$$\iint_{\sigma}\left[g_1(N)K_1(N)F_1(M,N)-g_2(N)K_2(N)F_2(M,N)\right]d\sigma_N+ \tag{2.6}$$
$$+\iint_{\sigma_{\Pi}} f(T)K_1(T)F_1(M,T)d\sigma_{\Pi T}=\varphi_2^*(M)-\varphi_1^*(M),\ \ M\in\sigma;$$

$$\iint_{\sigma} g_1(N)K_1(N)F_1(M,N)d\sigma_N+\iint_{\sigma_{\Pi}} f(T)K_1(T)F_1(M,T)d\sigma_{\Pi T}+\varphi_1^*(M)=0,$$
$$M\in\sigma_{\Pi},\ \ \nu=1,2;$$
$$\iint_{\sigma} g_2(N)K_2(N)F_2(M_C,N)d\sigma_N+\varphi_2^*(M_C)=C,\ \ M_C\in\sigma_C.$$

Анализ полученных интегральных уравнений и соотношения проведён в работе [5].

3. Фундаментальные решения основного уравнения и квазипотенциалы линейного стока.

Следуя работе [5], запишем фундаментальные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию (1.3).

Для среды с законом проницаемости $K_1(M)=k_1 z_M^2$, где $k_1=\mathrm{const}$ фундаментальное решение уравнения (1.1) имеет вид [7]:

$$F_2(M,N)=\frac{1}{4\pi\, k_2\, z_M z_{\mathrm{N}}}\cdot\left(\frac{1}{r_{MN}}-\frac{1}{\tilde{r}_{MN}}\right), \tag{3.1}$$

где $r_{MN}=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2+(z_M-z_N)^2}$,

$$\tilde{r}_{MN}=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2+(z_M+z_N)^2}.$$

Обозначим за ℓ отрезок, вдоль которого распределены точечные стоки (его концы M_0 и M_1 показаны на рис. 1). Тогда квазипотенциал линейного стока ℓ длины L приведённой мощности q в произвольной точке M полубесконечного неоднородного слоя ($z>0$) с коэффициентом проницаемости $K_2(M)=k_2 z_M^2$ определяется формулой:

$$\varphi_1^*(M)=q\int\limits_{\ell} F_1(M,N)d\ell_N\,. \tag{3.2}$$

Конечный результат интегрирования функции (3.1) в формуле (3.2) достаточно громоздкий и здесь опущен.

Для слоя с проницаемостью $K_2=k_2=\text{const}$ фундаментальное решение уравнения (1.1), описывающее точечный пространственный сток единичной мощности, расположенный в точке N при наличии непроницаемой плоскости $z=0$, имеет вид:

$$F_2(M,N)=\frac{1}{4\pi\, k_2}\cdot\left(\frac{1}{r_{MN}}\pm\frac{1}{\tilde{r}_{MN}}\right), \tag{3.3}$$

Квазипотенциал линейного стока длины L, приведённой мощности q в произвольной точке M слоя $z>0$ с постоянной проницаемостью k_2, можно найти по формуле:

$$\varphi_2^*(M)=q\int\limits_{\ell} F_2(M,N)d\ell_N\,. \tag{3.4}$$

4. Численное решение задачи о дебите наклонной скважины.

Зададим поверхности σ и σ_Π в параметрическом виде: $\vec{r}_N=\vec{r}_N(u_N,v_N)$, $\vec{r}_T=\vec{r}_T(\delta_T,\varepsilon_T)$, где u_N, v_N и δ_T, ε_T — параметры, $N\in\sigma$, $T\in\sigma_\Pi$. Заменим непрерывные на поверхностях σ и σ_Π функции $g_\nu(u_N,v_N)$, $\nu=1,2$ и $f(\delta_T,\varepsilon_T)$ совокупностью их значений в дискретных точках этих поверхностей и перейдём от интегральных выражений (2.6) к системе алгебраических уравнений. Для этого разобьём поверхности σ и σ_Π равномерно по параметрам u_N, v_N и δ_T, ε_T на n_1 и n_2 точек соответственно. Интегралы в выражениях (2.6) заменим суммами по квадратурным формулам прямоугольников. Получим для всех точек разбиения поверхностей систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n_1}\left[g_1(u_k,v_k)\Omega_1(u_m,v_m,u_k,v_k)-g_2(u_k,v_k)\Omega_2(u_m,v_m,u_k,v_k)\right]\Delta u_k\cdot\Delta v_k+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_2} f(\delta_i,\varepsilon_i)\Omega_1(u_m,v_m,\delta_i,\varepsilon_i)\Delta\delta_i\cdot\Delta\varepsilon_i-$$

$$-\frac{1}{2}\left[K_1(u_m,v_m)g_1(u_m,v_m)+K_2(u_m,v_m)g_2(u_m,v_m)\right]=$$

$$=K_2(u_m,v_m)\frac{\partial\varphi_2^*(u_m,v_m)}{\partial n(u_m,v_m)}-K_1(u_m,v_m)\frac{\partial\varphi_1^*(u_m,v_m)}{\partial n(u_m,v_m)},\ m=1,2,\ldots,n_1;$$

$$\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n_1}\left[g_1(u_k,v_k)\omega_1(u_m,v_m,u_k,v_k)-g_2(u_k,v_k)\omega_2(u_m,v_m,u_k,v_k)\right]\Delta u_k\cdot\Delta v_k+ \quad (4.1)$$

$$+\sum_{i=1}^{n_2} f(\delta_i,\varepsilon_i)\omega_1(u_m,v_m,\delta_i,\varepsilon_i)\Delta\delta_i\cdot\Delta\varepsilon_i=\varphi_2^*(u_m,v_m)-\varphi_1^*(u_m,v_m),\ m=1,2,...,n_1;$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} g_1(u_k,v_k)\omega_1\left(u_k,v_k,\delta_j,\varepsilon_j\right)\Delta u_k\Delta v_k+\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n_2} f(\delta_i,\varepsilon_i)\omega_1\left(\delta_j,\varepsilon_j,\delta_i,\varepsilon_i\right)\Delta\delta_i\cdot\Delta\varepsilon_i+$$

$$+\varphi_1^*\left(\delta_j,\varepsilon_j\right)=0,\quad j=1,2,...,n_2;$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} g_1(u_k,v_k)\omega_1(u_k,v_k,M_c)\Delta u_k\Delta v_k+\varphi_2^*(M_C)=1.$$

Здесь для краткости записи введены обозначения:

$$\Omega_\nu(u_m,v_m,u_k,v_k)=K_\nu(u_m,v_m)K_\nu(u_k,v_k)\frac{\partial F_\nu(u_m,v_m,u_k,v_k)}{\partial n(u_m,v_m)},\ \nu=1,2;$$

$$\Omega_1(u_m,v_m,\delta_i,\varepsilon_i)=K_1(u_m,v_m)K_1(\delta_i,\varepsilon_i)\frac{\partial F_1(u_m,v_m,\delta_i,\varepsilon_i)}{\partial n(u_m,v_m)};$$

$$\omega_\nu(u_m,v_m,u_k,v_k)=K_\nu(u_k,v_k)F_\nu(u_m,v_m,u_k,v_k),\ \nu=1,2;$$

$$\omega_1\left(u_k,v_k,\delta_j,\varepsilon_j\right)=K_1(u_k,v_k)F_1\left(u_k,v_k,\delta_j,\varepsilon_j\right);$$

$$\omega_1\left(u_m,v_m,\delta_j,\varepsilon_j\right)=K_1(\delta_i,\varepsilon_i)F_1\left(u_m,v_m,\delta_j,\varepsilon_j\right);$$

$$\omega_1\left(\delta_j,\varepsilon_j,\delta_i,\varepsilon_i\right)=K_1(\delta_i,\varepsilon_i)F_1\left(\delta_j,\varepsilon_j,\delta_i,\varepsilon_i\right);$$

$$\Delta u_k\approx du_N,\ \Delta v_k\approx dv_N,\ \Delta\delta_i\approx d\delta_T,\ \ \Delta\varepsilon_i\approx d\varepsilon_T.$$

Записанная система (4.1) состоит из $2n_1+n_2+1$ уравнений, решив которые найдём искомый дебит q и плотности g_{1k}, g_{2k}, $k=1,...,n_1$, f_i, $i=1,...,n_2$.

Скорости течения жидкости к скважине рассчитываются по формуле:

$$\vec{V}_\nu(M)=K_\nu(M)\nabla\varphi_\nu(M),\ M\in D_\nu,\ \nu=1,2. \quad (4.2)$$

Поле скоростей течения, рассчитанное по формулам (4.2) в случае эллиптической границы σ и полуэллиптической поверхности σ_Π, показано в плоскости xOz на рис. 2.

Отметим, что для численного решения пространственных задач фильтрации жидкости необходимо проводить разбиение граничных поверхностей как можно большим количеством точек. Но рост числа точек требует увеличения количества времени счёта и мощности компьютера. Так, например, для получения картины течения, представленной на рис. 2, была составлена компьютерная программа в среде Delphi, которая позволила решить 7301 алгебраическое уравнение прямым методом и найти дебит за 3 часа 1 минуту (характеристики компьютера: CPU Intel Pentium 3, 1 GHz, RAM 512 Mb, Windows XP).

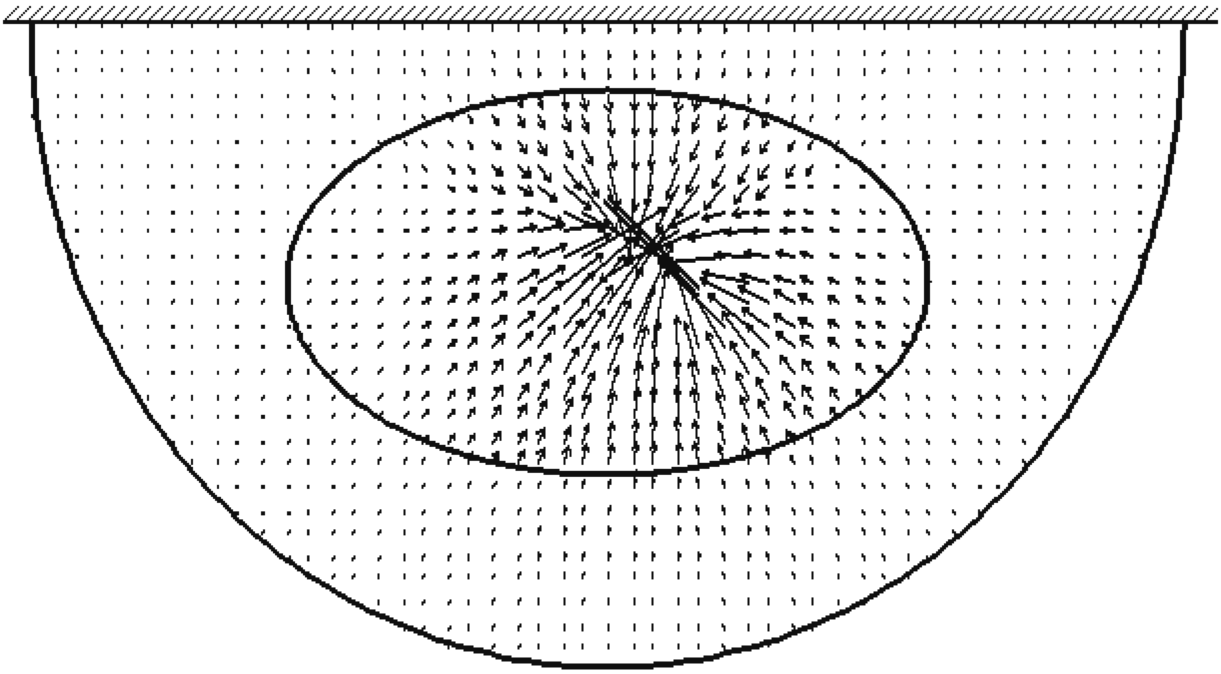


Рис. 2. Картина поля скоростей течения к скважине

Литература

1. Аксюхин А.А., Пивень В.Ф. Решение трёхмерной задачи о дебите скважины в кусочно-однородной среде методом дискретных особенностей // Труды IX Международного симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орёл. Орловский госуниверситет. 2000. С. 19-27.
2. Аксюхин А.А. Определение дебита наклонных скважин методом дискретных особенностей // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ-2001». Украина. Херсон. 2001. С. 11-17.
3. Аксюхин А.А. Исследование трёхмерной фильтрации жидкости к несовершенным скважинам в неоднородных средах методом дискретных особенностей // Труды XI Международного симпозиума «МДОЗМФ-2003». Украина. Херсон-Харьков. 2003. С. 9-13.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
5. Аксюхин А.А. Сведение трёхмерной задачи о дебите системы наклонных скважин, работающих в кусочно-неоднородной среде, к системе интегральных уравнений // Труды V Всерос. конф. «Качество пед. образования. Сельский учитель». Т. 1. Орел. ГОУ ВПО «ОГУ». 2004. С. 224-234.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.
7. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Кандидатская диссертация. Орел. Орловский госуниверситет. 2000. 153 с.

УДК 532.546

ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ К СКВАЖИНЕ[1]

И.В. Буравлёв

Орловский госуниверситет, Россия, Орел, ул. Комсомольская, д. 95

Ставится задача о движении трех жидкостей в однородной среде. Задача сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений. Эта система решается численно. В качестве примера приведены результаты решения задачи о движении двух подвижных границ к скважине.

На практике часто возникают задачи о совместном движении нескольких жидкостей различных плотностей и вязкостей. Например, возможен такой случай, когда над тяжелой жидкостью находится слой более легкой жидкости, а над ней находится воздух. В этом случае необходимо рассмотреть движение двух границ: тяжелая жидкость - легкая жидкость и легкая жидкость – воздух. Кроме того, можно рассмотреть движение неоднородной жидкости (меняющей свою плотность непрерывным образом от больших значений внизу до малых вверху) заменяя ее тонкими слоями жидкостей постоянной плотности.

Рассмотрим постановку задачи. На вертикальной плоскости сечения слоя выберем декартовы оси координат (x, y). Поле силы тяжести полагаем однородным. Границы раздела жидкостей $\Gamma_t = \bigcup\limits_i \Gamma_t^{(i)}$ (здесь и далее $i = 1{,}2$) движутся под действием силы тяжести и водозабора. Полагаем, что подвижные границы Γ_t в начальный момент времени $t = 0$ известны.

Движение жидкостей описывается системой уравнений, записанных здесь в безразмерном виде [1]:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{K}{\mu}\nabla(\rho\vec{e}_g \cdot \vec{r}_M - p), \tag{1}$$

$$\nabla\vec{\mathrm{v}} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\vec{e}_g$ - орт силы тяжести и $M \in D \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t)$ (D - область течения).

На подвижных границах Γ_t выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости (полагаем, что подвижные границы не пересекаются):

$$\begin{gathered}\mu_k \mathrm{v}_\tau^+(M,t) - \mu_l \mathrm{v}_\tau^-(M,t) = (\rho_l - \rho_k)\frac{\partial y_M}{\partial \tau_M}, \\ \mathrm{v}_n^+(M,t) = \mathrm{v}_n^-(M,t),\ M \in \Gamma_t^{(i)}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь нормаль направлена из области содержащей жидкость с индексом k (индексы $l, k = 1{,}2{,}3$).

Поле скорости будем искать в виде $\vec{\mathrm{v}}(M,t) = \vec{\mathrm{v}}_0(M,t) + \vec{\mathrm{v}}_*(M,t)$, где $\vec{\mathrm{v}}_0(M,t)$ - скорость течения, невозмущенного наличием границ Γ_t течения.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-96433).

В рассматриваемом случае $\vec{v}_0(M,t)$ описывает поле скоростей стока моделирующего водозабор.

Граничное условие (3) теперь можно переписать для скорости возмущения:

$$
\begin{gathered}
v_{*n}^{+}(M,t) = v_{*n}^{-}(M,t), \\
(1-\lambda_\mu^{(i)}) v_{*\tau}^{+}(M,t) - (1+\lambda_\mu^{(i)}) v_{*\tau}^{-}(M,t) = 2\lambda_\mu^{(i)} v_{0\tau}(M,t) + 2\alpha^{(i)} \frac{\partial y_M}{\partial \tau_M}, M \in \Gamma_t^{(i)}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Здесь $\lambda_\mu^{(i)} = \dfrac{\mu_l - \mu_k}{\mu_l + \mu_k}$, $\alpha^{(i)} = \dfrac{\rho_k - \rho_l}{\mu_l + \mu_k}$.

Скорость возмущения на бесконечности должна исчезать:

$$\vec{v}_*(M,t) \to 0 \text{, при } r \to \infty,$$

где r - расстояние от точки $M \notin \Gamma_t$ до границ раздела.

В начальный момент времени $t=0$ положение границ Γ_t определяется уравнением:

$$\vec{r}_M^{(i)} = \vec{r}_0^{(i)}(\theta), \ \theta \text{ - параметр.} \tag{5}$$

Движение границы описывается уравнением:

$$\frac{d\vec{r}_M^{(i)}}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \frac{1}{2}\left[\vec{v}_*^{+}(M,t) + \vec{v}_*^{-}(M,t)\right], \ M \in \Gamma_t^{(i)}. \tag{6}$$

Далее, следуя статье [2], скорость возмущения будем искать в виде

$$\vec{v}_*(M,t) = \sum_i \int_{\Gamma_t^{(i)}} f^{(i)}(N,t) \vec{v}_B(M,N) dl_N, \quad M \notin \Gamma_t, \tag{7}$$

здесь $\vec{v}_B(M,N)$ - скорость нормированного вихря (интенсивностью -1), деленная на проницаемость $K(N)$.

Подставляя это представление в граничное условие (4) получим систему интегральных уравнений Фредгольма

$$
\begin{gathered}
f^{(j)}(M,t) - 2\lambda_\mu^{(j)} \sum_i \int_{\Gamma_t^{(i)}} f^{(i)}(N,t) \vec{v}_B(M,N) \cdot \vec{\tau}_M dl_N = \\
= 2\left[\lambda_\mu^{(j)} \vec{v}_0(M,t) + \alpha^{(j)} \vec{e}_g\right] \cdot \vec{\tau}_M, \ M \in \Gamma_t^j \ (j=1,2),
\end{gathered} \tag{8}
$$

относительно функций $f^{(j)}(N,t)$. При этом граничное условие для нормальной составляющей скорости выполняется автоматически.

Далее, подставляя предельные значения скорости вихревого слоя в дифференциальное уравнение движения границы, получим:

$$\frac{d\vec{r}_M^{(j)}}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \sum_i \int_{\Gamma_t^{(i)}} f^{(i)}(N,t) \vec{v}_B(M,N) dl_N, \ M \in \Gamma_t^{(j)}. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) можно найти значение функций $f^{(j)}$:

$$f^{(j)}(M,t) = 2[\lambda_\mu^{(j)} \frac{dr_M^{(j)}}{dt} + \alpha^{(j)} \vec{e}_g] \cdot \vec{\tau}_M.$$

Подставляя это значение в уравнение (8) получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно $r_M^{(j)}$:

$$\frac{d\vec{r}_M^{(j)}}{dt} = \vec{\mathrm{v}}_0(M,t) + \sum_i \int_{\Gamma_t^{(i)}} [2\lambda_\mu^{(i)} \frac{dr_N^{(i)}}{dt} + 2\alpha^{(i)} \vec{e}_g] \cdot \vec{\tau}_N \vec{\mathrm{v}}_B(M,N) dl_N \ , \ M \in \Gamma_t^{(j)} .$$

Таким образом, для исследования эволюции подвижных границ необходимо решить данную систему уравнений.

Ниже приведены результаты расчетов движения двух границ раздела жидкостей в однородной среде. В первоначальный момент времени границы задаются уравнениями $y=1$ и $y=2$. За единицу времени выбрано время попадания ближайшей границы в скважину в случае «разноцветных» жидкостей (с одинаковыми вязкостями и плотностями). Дренажная скважина, моделируемая стоком, находится в начале координат. Свойства жидкостей таковы, что параметры задачи имеют следующие значения: для первой границы $\lambda_\mu = 0.6$ и $\alpha = 0.4$; для второй - $\lambda_\mu = 1$ и $\alpha = 1$. Под действием скважины происходит понижение уровня грунтовых вод.

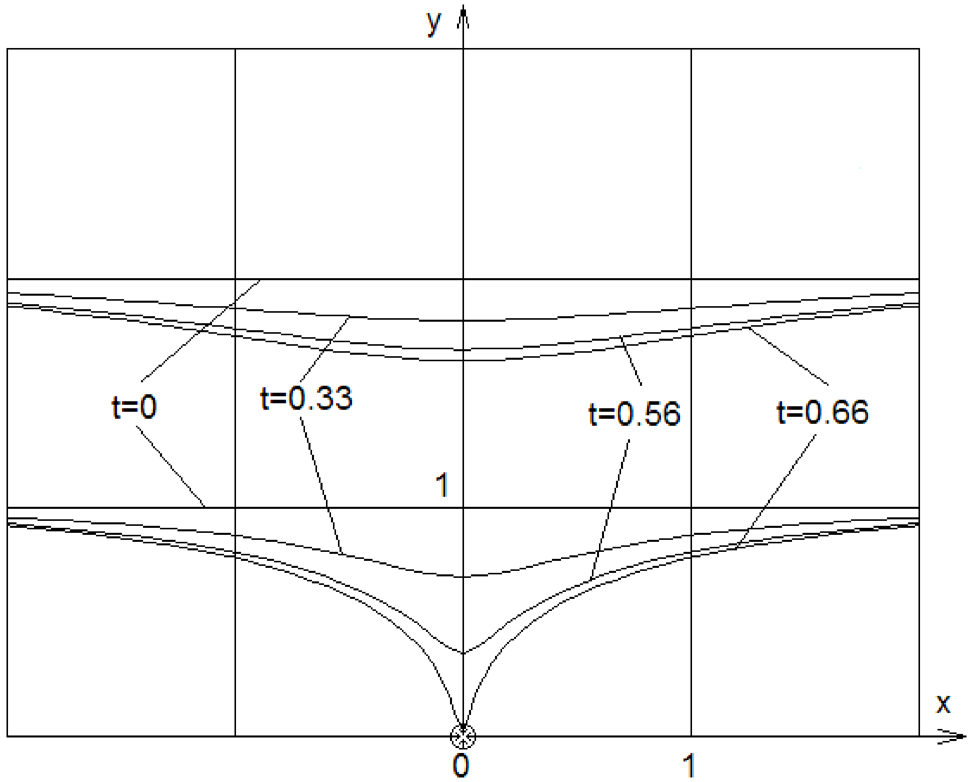


Рис. Понижение уровня грунтовых вод под действием скважины

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. – Москва: Высшая школа, 1972. – 368 с.
2. Пивень В.Ф. Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном слое при наличии массовой силы. // Труды XI Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Харьков-Херсон. – 2003. С. 203-208.

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ В ВИДЕ РАВНОБЕДРЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Е.И. Васильева, А.Я. Шпилевой
Россия, Калининград, Калининградский государственный университет
theory@albertina.ru

Для исследования фильтрационных течений в области, ограниченной прямоугольным равнобедренным треугольником используется метод изображения особых точек. Определены комплексные потенциалы фильтрационных течений с различными граничными условиями. В случае точечного источника решения выражены через сигма-функцию Вейерштрасса.

1. В условиях закона Дарси используется аналитическая функция $W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$, называемая комплексным потенциалом. При наличии в области фильтрационного потока прямолинейной границы раздела удобно использовать теорему о прямой. В данной работе будут использованы три варианта теоремы о прямой [1, 2]:

а) Пусть среда разделена прямой x=0 на области с коэффициентами проницаемости $k_1(x>0)$ и $k_2(x<0)$ (рис. 1) Если особые точки аналитической функции $f(z)$ находятся в области $(x>0)$, то комплексные потенциалы течения будут иметь вид:

$$W_1(z)=f(z)-\lambda\bar{f}(-z);W_2(z)=(1+\lambda)f(z);\lambda=\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1} \tag{1}$$

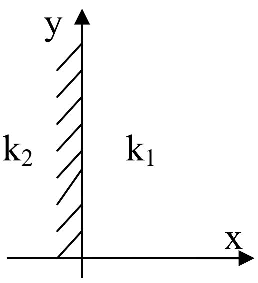


Рис. 1.

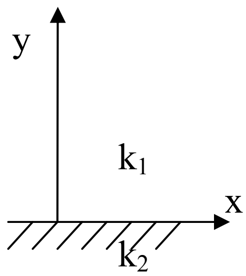


Рис. 2.

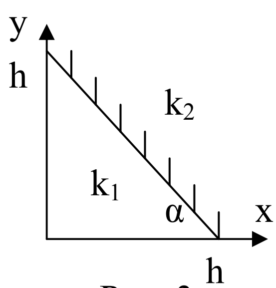


Рис. 3.

Прямолинейные границы раздела сред

б) Если границей раздела областей $y>0(k_1)$ и $y<0(k_2)$ является ось x и особые точки функции $f(z)$ находится в области $y>0$ (рис. 2), то комплексные потенциалы течения будут иметь вид:

$$W_1(z)=f(z)-\lambda\bar{f}(z);W_2(z)=(1+\lambda)f(z) \tag{2}$$

в) Пусть границей раздела областей (k_1) и (k_2) является прямая, указанная на рис. 3 и особые точки функции $f(z)$ находятся в области (k_1), тогда

$$W_1(z)=f(z)-\lambda\bar{f}(z-h)e^{2i\alpha}+h);W_2(z)=(1+\lambda)f(z) \tag{3}$$

(В данной задаче $\alpha=\pi/4$)

2. Пусть границами области фильтрации являются стороны равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 4 – 7).

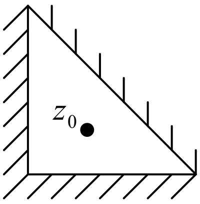


Рис. 4.

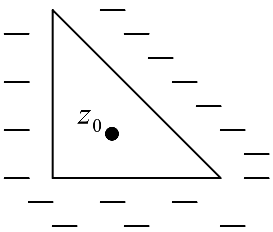


Рис. 5.

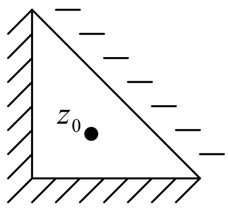


Рис. 6.

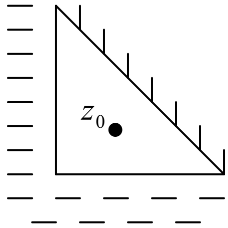


Рис. 7.

Треугольные области фильтрации

Полагаем, что граничные условия могут быть различными. Если соседняя область непроницаема, то $k_2 = 0(\lambda = -1)$; если соседняя область представляет собой свободную жидкость, $k_2 = \infty(\lambda = 1)$. Возможно сочетание разных границ (рис. 6, 7).

Пусть область фильтрации окружена непроницаемыми стенками (рис. 4). В этом случае в теоремах (1) – (3) следует положить $\lambda = -1$.

Применяя последовательно три варианта теоремы о прямой [3, 4], получаем комплексный потенциал течения в заданной области (рис. 4).

$$
\begin{aligned}
W(z) = & \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty}\sum \bar{f}[-z + 2nh + 2khi] + \\
& + \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} \sum f[z + 2nh + 2khi] + \sum_{n.k=-\infty}^{+\infty}\sum \bar{f}[z + 2nh + 2khi] + \\
& + \sum_{n.k=-\infty}^{+\infty}\sum f[-z + 2nh + 2khi] + \sum_{n.k=-\infty}^{+\infty}\sum \bar{f}[(z + (2n+1)h)i + (2k+1)h] + \\
& + \sum_{n.k=-\infty}^{+\infty}\sum f[(z + (2n+1)h)i + (2k+1)h] + \\
& + \sum_{n.k=-\infty}^{+\infty}\sum \bar{f}[-(z + (2n+1)h)i + (2k+1)h] + \\
& + \sum_{n.k=-\infty}^{+\infty}\sum f[-(z + (2n+1)h)i + (2k+1)h]
\end{aligned} \tag{4}
$$

Пусть область фильтрации окружена свободной жидкостью. В этом случае в теоремах (1) – (3) $\lambda = 1$, а комплексный потенциал имеет вид (4), где перед слагаемыми, имеющими сопряжение, ставится знак минус.

Аналогично можно определить комплексный потенциал течения для двух других случаев (рис. 6, 7).

3. Пусть $f(z) = -\frac{h}{2\pi}\ln(z - z_0)$ (5), т.е. в точке z_0 находится скважина (сток), а область фильтрации окружена свободной жидкостью (рис. 5). Записывая выражения (4), взятые для данного случая, для фильтрации (5) и преобразовывая полученные ряды, имеем:

$$W(z) = \frac{h}{2\pi}\ln\frac{\sigma(z-\bar{z}_0)\sigma(z+\bar{z}_0)\sigma(z-\bar{z}'_0)\sigma(z+\bar{z}'_0)}{\sigma(z-z_0)\sigma(z+z_0)\sigma(z-z'_0)\sigma(z+z'_0)}, \qquad (6)$$

где $z_1 = h + (h + \bar{z}_0)i$, $\delta(z)$ - сигма-функция Вейерштрасса.

Аналогичные результаты могут быть получены для случаев, изображенных на рис. 6, 7.

4. Полученные результаты могут быть использованы для решения практических задач не только в теории фильтрации, а так же в теории электричества, магнетизма, теплопроводности.

Литература

1. Голубева О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрацион-ные течения.// Изв. АНСССР, МЖГ,1996.№1.
2. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я., Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах.// Калининградский государственный университет. – Калининград. 2001.
3. Шпилевой А.Я. Метод изображения особых точек в задачах исследования фильтрационных течений в кусочно-однородных средах.// Труды IX Международного симпозиума «МДОЗМФ – 2000.» - Орел: Издательство Орловского госуниверситета. 2000.
4. Шпилевой А.Я. О последовательном применении теоремы об окружности // Проблемы теоретической гидродинамики// Тула. Тульский пединститут. 1977.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

М.Д. Верещагин, А.В. Юров

Калининградский государственный университет

Россия, г. Калининград, ул. Невского, 14, 236041.

e-mail: theory@albertina.ru , ver_mishel@mail.ru

Получено преобразование Мутара в трех измерениях, связывающее два скалярных гамильтониана. Для этого используется метод искусственного введения в задачу магнитного поля. Получено условие, накладываемое на магнитное поле, при котором это преобразование становится возможным. Рассмотрены различные частные случаи.

В математической физике огромную роль играют преобразования, позволяющие по одним решениям уравнения построить другие, так как подавляющее большинство уравнений, имеющих непосредственный физический смысл, не решаются в общем виде, и физикам известны лишь некоторые их решения. Преобразование Мутара является одним из таких преобразований. Оно находит широкое применение в теории интегрируемых двухмерных нелинейных систем уравнений в частных производных, в частности, для уравнения Шредингера (к сожалению, только с нулевым собственным значением). Однако, в отличие от одного и двух измерений, в трех – мы сталкиваемся с определенными сложностями на пути вывода этого преобразования. Ниже описана методика, позволяющая обобщить преобразования Мутара для уравнения Шредингера на три измерения.

Сначала выведем преобразование Мутара в двух измерениях, а затем попробуем обобщить его на большее количество измерений.

Рассмотрим гамильтониан в двух измерениях с произвольным потенциалом:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + U(x, y) \ .$$

Пусть $\varphi = \varphi(x, y)$ и $\psi = \psi(x, y)$ - различные решения уравнения Шредингера с данным гамильтонианом с нулевым собственным значением, то есть:

$$H\varphi = H\psi = 0 \ .$$

Тогда, используя функцию φ, как пробную, можно факторизовать исходный гамильтониан:

$$H = q_m^+ q_m \ , \tag{1}$$

где:

$$q_m = \partial_m - \partial_m \ln\varphi \ , \tag{2}$$

$$q_m^+ = -\partial_m - \partial_m \ln\varphi \ . \tag{3}$$

Здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование (m=1,2).

Определим теперь, так называемый «одетый», гамильтониан:

$$\widetilde{H} = q_m q_m^+ = -\Delta_{(2)} + \widetilde{U} \ , \tag{4}$$

где

$$\widetilde{U} = U - 2\partial_m^2 \ln\varphi \ . \tag{5}$$

Пусть $\widetilde{\psi}$ – решение уравнения Шредингера с «одетым» гамильтонианом, то есть:

$$\widetilde{H}\widetilde{\psi} = q_m q_m^+ \widetilde{\psi} = 0 \ . \tag{6}$$

С другой стороны, как легко убедиться, справедливо следующее соотношение:

$$\varepsilon_{mk} q_m q_k = 0 \Rightarrow \varepsilon_{mk} q_m q_k \psi = 0 \ . \tag{7}$$

Так как правые части (6) и (7) равны, то, очевидно, равны и левые, а стало быть:

$$q_m q_m^+ \widetilde{\psi} = \varepsilon_{mk} q_m q_k \psi \Rightarrow q_m (q_m^+ \widetilde{\psi} - \varepsilon_{mk} q_k \psi) = 0 \ . \tag{8}$$

Один из возможных способов удовлетворить условию (8) есть равенство нулю выражения в скобках, которое, учитывая явный вид операторов q_m и q_m^+, можно переписать в следующем виде:

$$\partial_m(\tilde{\psi}\phi) = \varepsilon_{km}(\varphi\partial_k\psi - \psi\partial_k\varphi) \ . \tag{9}$$

Формула (9) позволяет нам найти $\tilde{\psi}$. Однако в левой части этой формулы стоит градиент, а поэтому двумерный аналог ротора правой части должен обращаться в ноль,

$$\left(\varepsilon_{km}\partial_l - \varepsilon_{kl}\partial_m\right)\left[\varphi q_k\psi\right] = 0 \ . \tag{10}$$

что, как легко убедиться, выполнено, а потому формула (9) действительно может быть использована для нахождения $\tilde{\psi}$.

Попробуем обобщить данный метод на три измерения. До формулы (6) все будет аналогично, разве что индексы станут «пробегать» на одно значение больше. Теперь заметим, что вместо тождества (7) теперь будет выполняться следующее соотношение:

$$\varepsilon_{mkl}q_m q_k q_l^+ = 0 \Rightarrow \varepsilon_{mkl}q_m q_k q_l^+ = 0 \ . \tag{11}$$

Тогда вместо (8) мы получим:

$$q_m q_m^+\tilde{\psi} = \varepsilon_{mkl}q_m q_k q_l^+\psi \Rightarrow q_m(q_m^+\tilde{\psi} - \varepsilon_{mkl}q_k q_l^+\psi) = 0 \ . \tag{12}$$

И аналогично (10) будем иметь следующее необходимое условие равенства нулю ротора:

$$\left(\varepsilon_{lkm}\partial_s - \varepsilon_{skm}\partial_l\right)\left[\varphi q_k q_m^+\psi\right] = 0 \ . \tag{13}$$

Однако условие (13) не является тождеством.

Таким образом, непосредственным обобщением не получается получить преобразование Мутара в трех измерениях.

Попробуем немного видоизменить метод. А именно, добавим в рассматриваемую нами задачу магнитное поле. С точки зрения математики делается это путем «удлинения» производных, то есть:

$$\partial_m \to \partial_m = \partial_m - ie\kappa_m \ .$$

В дальнейшем будем полагать e=**1.** Здесь $\vec{\kappa}$ - векторный потенциал. Учитывая, что из уравнений Максвелла

$$div\vec{B} = 0$$

и, введя для удобства функцию

$$\chi = -\ln\varphi \ ,$$

получим, что теперь гамильтонианы будут факторизованы другими операторами, имеющими следующий вид:

$$q_m = \partial_m + i\kappa_m + \partial_m\chi \ , \tag{14}$$

$$q_m^+ = -\partial_m - i\kappa_m + \partial_m\chi \ . \tag{15}$$

Однако теперь тождество (11) будет справедливо не всегда, а только для магнитных полей типа Ааронова-Бома (вектор магнитной индукции равен нулю), так как:

$$\varepsilon_{mkl}q_m q_k q_l^+ = i\left(\vec{B}, -\vec{\nabla} - i\vec{\kappa} + grad\chi\right) . \tag{16}$$

С учетом этого условие (12) теперь будет выполнено. По аналогии с тем, как мы делали это в двух измерениях, будем искать решение в виде:

$$\tilde{\psi} = \frac{f}{\varphi} = e^{\chi} f \ .$$

В результате получим:

$$\tilde{\psi} = \frac{e^{-p}}{\varphi}\left(2\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\vec{\nabla}(e^{p}\psi), \vec{\nabla}\varphi, d\vec{r} \right) + A \right) . \tag{17}$$

Здесь $A = const$, а $\vec{\kappa} = -i\vec{\nabla}p$ (мы действительно имеем право так представить $\vec{\kappa}$, так как рассматриваем поля типа Ааронова-Бома). Однако на магнитное поле накладывается следующее условие:

$$rot\left[\vec{\nabla}(e^{p}\psi) \times \vec{\nabla}\varphi\right] = \vec{0} \ . \tag{18}$$

В общем случае, уравнение (18) решить не удается, однако в некоторых частных случаях его можно удовлетворить, а, следовательно, найти такое магнитное поле, которое позволит осуществить преобразование Мутара в 3х измерениях.

Отметим некоторые частные случаи:

1. Если попробовать убрать из уже конечных уравнений магнитное поле, то после некоторых математических выкладок несложно показать, что:

   $$\tilde{\psi} = \frac{C}{\varphi} \ .$$

   Здесь $C = const$, а, значит, мы получили хорошо всем известное решение уравнения Шредингера с «одетым» гамильтонианом.
2. Если положить $\varphi = \psi$, то в отличие от классического преобразования Мутара, которое может быть проведено только при различных решениях, в нашем случае оно осуществимо и, мы получим тот же ответ, что и в предыдущем случае.
3. Наконец, если удовлетворить условие (18) следующим образом:

   $$e^{p}\psi = f(\varphi) \ ,$$

   то после некоторых математических преобразований, получим:

   $$\tilde{\psi} = A\frac{\rho^2}{\varphi} \ ,$$

   где $A = const$, а ρ удовлетворяет следующему уравнению (которое может быть всегда решено в полярных координатах):

   $$\Delta\rho = \left(\vec{\nabla}\ln\frac{1}{\varphi^2}, \vec{\nabla}\rho \right) .$$
4. Можно удовлетворить уравнение (18) и не полагая равным нулю выражение под ротором. Например:

   $$e^{p}\psi = C_0 \exp(\alpha x + \beta y + \delta z) \ .$$

Здесь $C_0, \alpha, \beta, \delta = const$. Однако, в этом случае ответ получается слишком громоздким и, мы не видим смысла его здесь приводить.

Таким образом, преобразование Мутара может быть осуществлено этим методом, если подобрать соответствующее магнитное поле, удовлетворяющее (18), что как минимум в некоторых случаях может быть сделано.

УДК 536.2; 519.34

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ДВОЙСТВЕННЫХ МЕТОДОВ

В.И. Дорофеева

Россия, Орел, Орловский государственный университет

В работе демонстрируются возможности двойственного вариационного метода для получения апостериорных оценок решения краевых задач для уравнения Пуассона при отсутствии источников тепла, пропорциональных температуре. Работа содержит несколько численных примеров, демонстрирующих преимущества метода.

Рассмотрим решение краевых задач стационарной теплопроводности при отсутствии источников тепла, пропорциональных температуре. В работе [1] излагается теоретическое обоснование и методика построения двойственных функционалов для большинства краевых задач математической физики. Получаемые подобным образом функционалы дают возможность получать апостериорные оценки приближенных решений, часто более применимые на практике.

Пусть ограниченная область $\Omega \subset R^n$ принадлежит классу $C^{0,1}$. Рассмотрим для простоты однородную смешанную задачу.

$$\begin{cases} -divA\nabla u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} = < A\nabla u, \nu > = 0, & x \in \partial\Omega_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + \sigma u = 0, & x \in \partial\Omega_3 \end{cases} \tag{1}$$

где $f \in L^2(\Omega)$, $< u, v >$-скалярное произведение в R^n, $\sigma \geq const > 0$, матрица A положительно определена и симметрична с коэффициентами из класса $L^\infty(\Omega)$, границу $\partial\Omega$ будем предполагать состоящей из трех непересекающихся участков: $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}_1 \cup \partial\overline{\Omega}_2 \cup \partial\overline{\Omega}_3$, $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$. Будем также считать, что по крайней мере $\partial\Omega_1$ или $\partial\Omega_3$ не пусто, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ - единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

В известном методе ортогональных проекций при построении двойственных функционалов заранее полагают $div\xi = -f$, что мало пригодно при численной реализации. Это значительно тормозило применение идей теории двойственности при решении краевых задач. Если же при построении двойственного функционала воспользоваться интегральным тождеством

$$\Phi = \Phi(u\alpha, u) = \int \{u < \alpha, \nabla u > + udiv(u\alpha)\} d\Omega \equiv 0,$$

имеющим место для любых вектор-функций α, таких что выражение

$$\delta = c + div\alpha - < \alpha, \alpha > \geq const > 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

мы приходим к качественно новым результатам, а J^{-} сохраняет свой вид. Этот метод (введение функционального α-параметра) во многих случаях допускает эффективные обобщения.

Двойственная задача тогда имеет вид:

$$J^{-} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \left\{ < A^{-1}v, v > + \frac{1}{\delta}\left(f + divv - < v, A^{-1}\alpha >\right)^2 \right\} d\Omega \to \sup$$

$$v \in V = \left\{ v \in W_n^{1,2}(\Omega) : < v, \nu > = 0 \text{ п.в. на } \partial\Omega_i, \ i = 2,3 \right\}$$

$$\alpha \in C_n^1(\overline{\Omega}), \ \delta = c + div\alpha - < A^{-1}\alpha, \alpha > \geq 0,$$

$$< \alpha, \nu > = 0 \text{ на } \partial\Omega_2, \ < \alpha, \nu > = \sigma \text{ п.в. на } \partial\Omega_3.$$

Приведем несколько примеров решения подобных задач для различных областей и различных краевых условий. При решении задач полагалось $\alpha = k(x, y)^T$, где $k = const < \dfrac{2}{R^2}$, R – радиус круга, содержащего Ω.

Пример 1. Рассмотрим решение задачи о распределении температуры, описываемое уравнением

$$-\Delta u = f, (x, y) \in \Omega \tag{2}$$

Пусть на $\partial\Omega$ заданы граничные условия первого рода, а область Ω представляет собой круг радиуса $R = 1$ с центром в начале координат, причем известно точное решение $u_T = 0{,}02(1 - x^2 - y^2)$, $f = 0{,}08$, $k = 0{,}285$.

В табл. 1 даны значения функционалов J^+ и J^-, которые определялись по приближенным решениям прямой и двойственной задач. При $N_{уз} = 121$ точность решения имеет порядок 10^{-4}.

Таблица 1

Функционал	$N_{уз}$ – количество узлов, $N_{эл}$ – количество элементов			
	$N_{уз} = 25$ $N_{эл} = 32$	49 72	81 128	121 200
J^+	-0,002 180	-0,002 287	-0,002 332	-0,002 355
J^-	-0,002 567	-0,002 559	-0,002 544	-0,002 495

В табл. 2 представлены u_T и $u_{прибл}$ решения прямой задачи, частные производные u_T и приближенные решения двойственной задачи по сечению y=0,00.

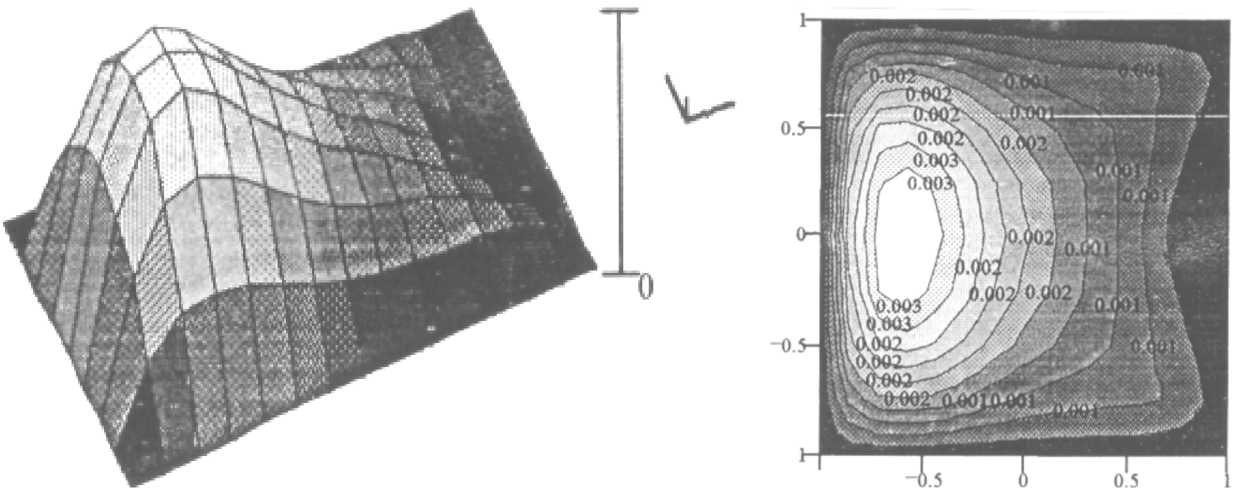
Таблица 2

	x=-1,00	-0,8	-0,6	-0,4
u_T	0,000 000	0,007 200	0,012 800	0,016 800
$u_{прибл}$	0,000 000	0,006 708	0,012 408	0,016 644
u_{Tx}	0,040 000	0,032 000	0,024 000	0,016 000
u_{Dx}	0,040 576	0,031 881	0,022 254	0,013 180
u_{Ty}	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
u_{Dy}	0,000 000	0,000 000	0,000 001	0,000 001

Пример 2. Задача решается в прежней постановке, только в области $\Omega = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$, правая часть $f = 0{,}1(\cos(x+1)\sin x^2 + x^3 y^2)$, k=0,73. В табл. 3 приведены значения функционалов J^+ и J^-. При увеличении числа элементов разбиения достигается достаточно большая точность. В частности, при $N_{уз}$ = 153, $N_{эл}$ = 256 порядок точности 10^{-4}.

Таблица 3

Функционал	$N_{уз}$ – количество узлов, $N_{эл}$ – количество элементов				
	$N_{уз}$ = 45 $N_{эл}$ = 64	66 100	91 144	120 196	153 256
J^+	-0,000 068	-0,000 075	-0,000 077	-0,000 080	-0.000 081
J^-	-0,000 292	-0,000 214	-0,000 195	-0,000 152	-0,000 158



а) б)

Рис. 1. Приближенное решение задачи 2 при $N_{уз}$ = 153, $N_{эл}$ = 256

На рис. 1. а), б) показаны поверхность решения и линии уровня приближенного решения задачи при $N_{уз} = 153$, $N_{эл} = 256$ (а) поверхность решения, б) линии уровня решения).

Пример 3. Для двухсвязной области Ω, представляющей собой круг радиуса $R = 1$ с вырезанным в нем ромбом (см. рис. 2) рассмотрим решение смешанной задачи (2) для уравнения Пуассона с граничными условиями 1-го и 2-го рода и правой частью

$$f = (x - 0{,}56)e^{y-1} - xy\cos(x + y),\ k = 0{,}53.$$

Табл. 4 демонстрирует точность полученного приближенного решения по значениям функционалов J^+ и J^- на приближенных решениях прямой и двойственной задач соответственно. Она оценивается числами порядка 10^{-4}.

Таблица 4

Функционал	$N_{уз}$ – количество узлов, $N_{эл}$ – количество элементов		
	$N_{уз} = 48$ $N_{эл} = 72$	80 128	120 200
J^+ J^-	-0,031 694 -0,037 530	-0,034 805 -0,037 240	-0,036 415 -0,036 816

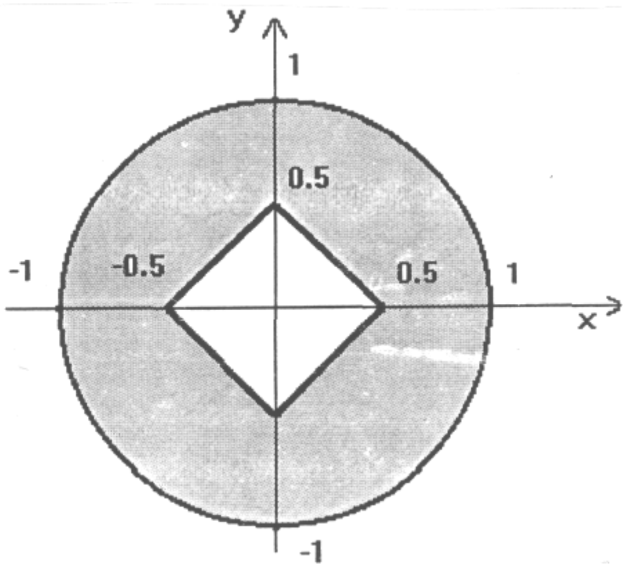


Рис. 2. Область Ω для решения задачи 3

Литература

1. Калиниченко В.И., Кощий А.Ф., Ропавка А.И. Численные решения задач теплопроводности. Харьков: Изд.-во при Харьк. ун-те., 1987.– 112 с.
2. Калиниченко В.И., Рвачев В.Л., Ропавка А.И. Двойственные методы в задачах нестационарной теплопроводности. – Харьков: Инт-т пробл. Маш-ния АН УССР, 1981.– 20 с.

УДК 532

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.А. Зайцев, В.В. Фомченков

Кал ГУ, Россия, Калининград, ул. А. Невского 14,

НОУ «ОНУТЦ ОАО «Газпром», Россия, Калининград, ул. Галицкого 20,

e-mail: V.Fomchenkov@onutc.ru, fomval@mail.ru

Формулируется теорема о представлении функции Грина задачи Дирихле через конформное отображение односвязной области на верхнюю полуплоскость. Приведены примеры для конкретных областей. В частности, получены выражения функций Грина внутренних и внешних задач Дирихле в случае, когда границами служат квадрики: парабола, гипербола, эллипс.

Хорошо известно, что многие задачи электростатики, магнитостатики и гидродинамики сводятся к задаче Дирихле [1] – [4]. Поэтому построение функции Грина [5] – [6] этой задачи является актуальным. Её строят различными способами, в том числе методом разделения переменных и отражений [5], [6]. С другой стороны, известна [7] – [9] связь функции Грина двумерной задачи Дирихле с конформными отображениями, и даже приводятся выражения для нее через отображение на внутренность круга [9]. Однако проще выразить ее через отображение на полуплоскость. Для практических нужд это более целесообразно, поскольку накоплен большой материал, касающийся этих отображений [8], [9]. Мы приводим эту теорему и иллюстрируем ее рядом примеров.

Теорема. Пусть функция $w(z)$ конформно отображает ограниченную односвязную область $D \in \mathrm{C}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Тогда для функции Грина двумерной задачи Дирихле в области D справедливо представление

$$g(z,z_0) = -(2\pi)^{-1} \ln|\Phi(z,z_0)|, \tag{1}$$

где

$$\Phi(z,z_0) = \left(w(z) - w(z_0)\right) / \left(w(z) - \overline{w(z_0)}\right). \tag{2}$$

Доказательство теоремы является простым следствием фактов, приводимых в любом учебнике по теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим конкретные примеры. В них будем указывать область D, для которой строится функция Грина, и выражения для функций $w(z)$, осуществляющих конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость, и $\Phi(z,z_0)$, определенную равенством (2). В случае многозначных функций рассматриваются их регулярные ветви, выделенные стандартным способом.

1. D есть круг $|z| < r$ (рис. 1), $\Phi(z,z_0) = r(z\text{-}z_0)/(r^2\text{-}\overline{z_0}z)$ (удален несущественный множитель $(r - \overline{z_0})/(r - z_0)$, модуль которого равен 1).

2. D есть сектор $0 < \arg z < \alpha$ (рис. 2), $w = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\Phi(z, z_0) = \dfrac{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - \bar{z}_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}$.

3. D есть полоса $0 < \operatorname{Im} z < d$ (рис. 3), $w = \exp(\pi z / d)$, $\Phi(z, z_0) = \exp(\pi z / d) - \exp(\pi z_0 / d) \big/ \exp(\pi z / d) - \exp(\pi \overline{z_0} / d)$.

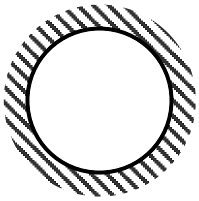


Рис. 1.

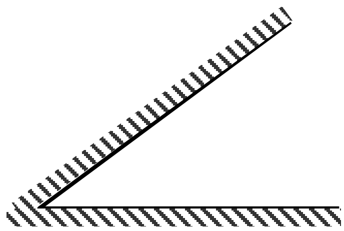


Рис. 2.

Рис. 3.

Области в виде круга, сектора и полосы

4. D есть полуплоскость с разрезом по отрезку [0, ih], (h>0) (рис. 4), $w(z) = \sqrt{z^2 + h^2}$, $\Phi(z, z_0) = \sqrt{z^2 + h^2} - \sqrt{z_0^2 + h^2} \Big/ \sqrt{z^2 + h^2} - \sqrt{\bar{z}_0^2 + h^2}$.

Заключительные шесть примеров посвящены построению функций Грина внутренних и внешних задач Дирихле в случае, когда границами раздела служат квадрики: парабола, гипербола, эллипс.

5. D есть внутренность параболы $y^2 = 2p(x + p/2)$ (рис. 5), $w = i \operatorname{ch}\left(\pi \sqrt{z} / \sqrt{2p}\right)$, $\Phi(z, z_0) = \dfrac{\operatorname{ch}\left(\pi \sqrt{z} / \sqrt{2p}\right) - \operatorname{ch}\left(\pi \sqrt{z_0} / \sqrt{2p}\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi \sqrt{z} / \sqrt{2p}\right) + \operatorname{ch}\left(\pi \sqrt{z_0} / \sqrt{2p}\right)}$.

6. D есть внешность параболы $y^2 = 2p(x + p/2)$, $p > 0$ (рис. 6), $w = \sqrt{z} - i\sqrt{p/2}$, $\Phi(z, z_0) = \dfrac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{z} - \sqrt{\overline{z_0}} - i\sqrt{2p}}$.

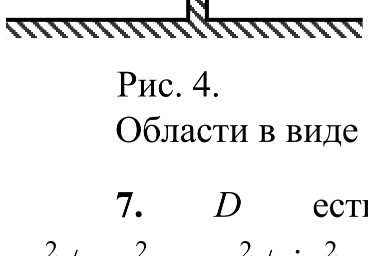


Рис. 4.

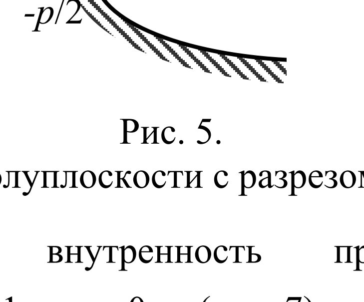


Рис. 5.

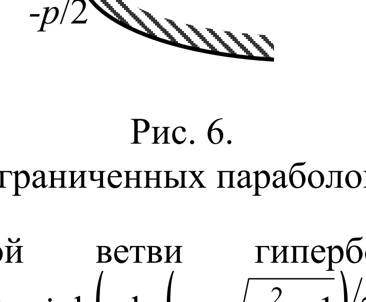


Рис. 6.

Области в виде полуплоскости с разрезом, ограниченных параболой

7. D есть внутренность правой ветви гиперболы $x^2 / \cos^2 \alpha + y^2 / \sin^2 \alpha = 1$, $x > 0$, (рис. 7) $w(z) = i \operatorname{ch}\left(\pi \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \big/ 2\alpha\right)$,

$$\Phi(z, z_0) = \frac{\operatorname{ch}\left(\pi \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \big/ 2\alpha\right) - \operatorname{ch}\left(\pi \ln\left(z_0 + \sqrt{{z_0}^2 - 1}\right) \Big/ 2\alpha\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \big/ 2\alpha\right) - \operatorname{ch}\left(\pi \ln\left(\overline{z_0} + \sqrt{\overline{z_0}^2 - 1}\right) \Big/ 2\alpha\right)}.$$

8. D есть внешность гиперболы $x^2/\cos^2\alpha + y^2/\cos^2\alpha = 1$, $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 8), $w = \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\pi/(\pi - 2\alpha)} \exp\left(-2i\pi\alpha/(\pi - 2\alpha)\right)$,

$$\Phi(z, z_0) = \frac{\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\pi/(\pi-2\alpha)} - \left(z_0 - \sqrt{z_0^{\,2} - 1}\right)^{\pi/(\pi-2\alpha)}}{\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^{\pi/(\pi-2\alpha)} - \left(\overline{z_0} + \sqrt{\overline{z_0}^{\,2} - 1}\right)^{\pi/(\pi-2\alpha)} \exp\left(-2i\pi\alpha/(\pi - 2\alpha)\right)}.$$

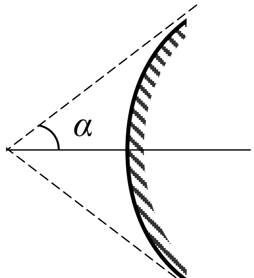


Рис. 7.

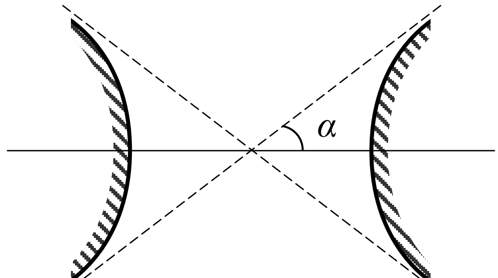


Рис. 8.

Области, ограниченные гиперболами

9. D есть внешность эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$ (рис. 9),

$$w(z) = -i\,\frac{\sqrt{z^2 - c^2} - b}{z - a}, \quad \Phi(z, z_0) = \frac{\dfrac{\sqrt{z^2 - c^2} - b}{z - a} - \dfrac{\sqrt{z_0^{\,2} - c^2} - b}{z_0 - a}}{\dfrac{\sqrt{z^2 - c^2} - b}{z - a} + \dfrac{\sqrt{\overline{z_0}^{\,2} - c^2} - b}{\overline{z_0} - a}}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b},$$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

10. Если эллипс вырождается в двойной отрезок, соединяющий точки $z = c$ и $z = -c$ (рис. 10), то $b = 0$, $c = a$ и предыдущие формулы принимают такой вид:

$$w(z) = i\sqrt{\frac{z + c}{z - c}}, \quad \Phi(\mathrm{z}, \mathrm{z}_0) = \frac{\sqrt{\dfrac{z + c}{z - c}} - \sqrt{\dfrac{z_0 + c}{z_0 - c}}}{\sqrt{\dfrac{z + c}{z - c}} + \sqrt{\dfrac{\overline{z_0} + c}{\overline{z_0} - c}}}.$$

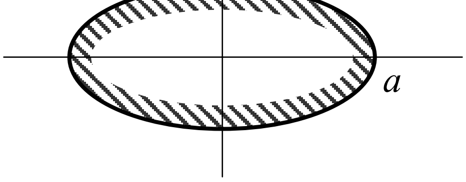


Рис. 9.

Рис. 10.

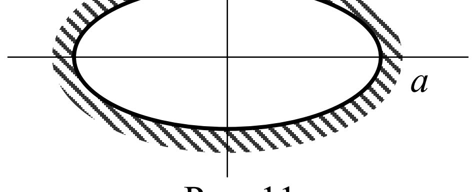


Рис. 11.

Области, ограниченные эллипсами

11. Для нахождения функции Грина в случае, когда область D есть внутренность эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $a>b>0$ (рис. 11), дополним физический лист z до бесконечнолистной римановой поверхности и конформно отобразим ее на плоскость w с помощью отображения

$$z=c\,\mathrm{ch}\,w,\qquad w=s+i\psi,\qquad -\infty<s<+\infty,\qquad 0\le\psi<2\pi.$$

Тогда объединение всех экземпляров эллипса отобразится в полосу $-d<\mathrm{Re}\,w<d$, $d=\ln r_0$, $r_0=(a+b)/c$. Образы источников выстраиваются в две периодические цепочки с координатами $\pm w_0+2\pi ni$, $n\in\mathrm{Z}$. Для их логарифмического потенциала будем иметь (с точностью до аддитивного слагаемого) $\varphi=(2\pi)^{-1}\ln|\varPhi(w,w_0)|$, где

$$\varPhi(w,w_0)=2^{-1}(\mathrm{ch}\,w-\mathrm{ch}\,w_0)=\mathrm{sh}\left(2^{-1}(w-w_0)\right)\mathrm{sh}\left(2^{-1}(w+w_0)\right).$$

Учет граничных условий с помощью симметрий превращает эту функцию в бесконечное сходящееся произведение

$$\varPhi(w,w_0)=\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{r_0^{-2\,\mathrm{sign}\,n}\,\mathrm{sh}\left(2^{-1}(w-w_0-4nd)\right)\mathrm{sh}\left(2^{-1}(w+w_0+4nd)\right)}{\mathrm{sh}\left(2^{-1}\left(w-\overline{w}_0-2(2n+1)d\right)\right)\mathrm{sh}\left(2^{-1}\left(w+\overline{w}_0+2(2n+1)d\right)\right)}.\qquad(3)$$

Возвращаясь к переменной z, получим

$$\varPhi(z,z_0)=\prod_{n=-\infty}^{+\infty}r_0^{-2\,\mathrm{sign}\,n}\,\frac{z-z_n}{z-z_n^+},$$

где $z_n=c\,\mathrm{ch}(w_0+4nd)$, $\quad z_n^+=c\,\mathrm{ch}\left(\overline{w}_0+2(2n+1)d\right)$, $\quad n\in\mathrm{Z}$.

z_n, z_n^+ - будут координатами мнимых источников, расположенных за пределами эллипса на одной из ветвей одной гиперболы, софокусной с эллипсом (правой, если $\mathrm{Re}\,z_0>0$, и левой, если $\mathrm{Re}\,z_0<0$).

От представления (3) для функции $\varPhi(w,w_0)$ можно перейти к представлению через тета-функцию:

$$\varPhi(w,w_0)=\frac{\theta_1\left(\dfrac{i(w-w_0)}{2\pi},\dfrac{2id}{\pi}\right)\theta_1\left(\dfrac{i(w+w_0)}{2\pi},\dfrac{2id}{\pi}\right)}{\theta_1\left(\dfrac{i\left(w-\overline{w}_0-2d\right)}{2\pi},\dfrac{2id}{\pi}\right)\theta_1\left(\dfrac{i\left(w+\overline{w}_0+2d\right)}{2\pi},\dfrac{2id}{\pi}\right)}.$$

Подобным образом можно найти функции Грина задачи Дирихле и во многих других случаях.

Литература

1. Милн-Томсон Л.Н. Теоретическая гидродинамика. – М., 1964.
2. Голубева О.В., Радыгин В.М. Применение функций комплексной переменной в задачах физики и техники. – М. 1983. 160 с.
3. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. – Орел: Изд-во ОГПИ, 1994. 148 с.

4. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах: Учеб. пособие. – Калининград: Изд-во КГУ, 2001 – 126 с.
5. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 400 с.
6. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике, М.: Изд. МГУ, 1993. 352 с.
7. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.

УДК 532.546

ВЛИЯНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОЧАГОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНО-ДОПУСТИМЫЙ ДЕБИТ ВОДОЗАБОРА[1]

А.А. Квасов
Орловский государственный университет

Ставится двумерная задача о работе водозабора без загрязнения. В основу положено неоднородное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рада. Решение ищется методом дискретных особенностей. Проведено исследование влияния расположения двух очагов загрязнения на предельно-допустимый дебит водозабора.

1. Проводимые исследования связаны с проблемой добычи чистой (не загрязнённой) воды в слое грунта, содержащем хранилища промышленных отходов. Следуя [1], при изучении двумерных фильтрационных течений в тонких кусочно-неоднородных слоях, содержащих очаги загрязнения, примем следующие положения: фильтрация двумерная, установившаяся и происходит в неоднородном изотропном недеформируемом слое; течение описывается линейным законом Дарси; жидкость несжимаема, обладает одинаковой во всей области фильтрации вязкостью; проводимость слоя $P = KH > 0$ (K — коэффициент проницаемости слоя, H — его толщина) с течением времени не изменяется. Основанием слоя является горизонтальная подошва, в плоскости которой выбрана прямоугольная система координат xOy. Течение рассматривается в комплексной плоскости $z = x + i\,y$. Проводимость P моделируется непрерывно дифференцируемой (хотя бы один раз) функцией вещественных координат x, y или комплексно сопряжённых координат z, $\bar{z}$. В дальнейшем для краткости записи будем писать $P = P(z)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-96433).

Пусть область фильтрации D состоит из чистой области D_1 и загрязнения — хранилища промышленных отходов, моделируемого двумя областями D_2 и D_3 не имеющими общих точек. Области D_2 и D_3 сопрягаются с D_1 соответственно по кривым Γ_1 и Γ_2. Пусть фильтрационное течение обусловлено поступательным потоком и работой водозабора. Водозабор представляет собой совершенную скважину суммарного дебита Π. Работу водозабора моделируем точечным стоком мощности $q = \Pi/P(z_0)$, расположенным в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$, $z_0 \in D_1$. В рамках одножидкостной модели считаем, что, протекая через области D_2 и D_3, жидкость загрязняется. Водозабор будет работать без загрязнения, если в его область захвата [1, 3] не попадает загрязнённая жидкость. Область захвата водозабора ограничена нейтральной линией тока, проходящей через критическую точку течения z_*.

Таким образом, для определения максимально возможной мощности эксплуатационной скважины, работающей без загрязнения (предельно-допустимого дебита q_*), следуя предложенной в [2] схеме численного эксперимента, необходимо решить задачу сопряжения на границах Γ_1, Γ_2; найти положение критической точки; построить область захвата водозабора и проанализировать полученный результат.

2. Для описания фильтрационного течения введём комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(z) + i\frac{\psi(z)}{P(z)}, \tag{2.1}$$

который удовлетворяет следующему из закона Дарси и уравнения неразрывности уравнению вида:

$$\frac{\partial W(\mathrm{z})}{\partial \overline{\mathrm{z}}} + A(\mathrm{z})\left[W(\mathrm{z}) - \overline{W}(\mathrm{z})\right] = 0, \quad z \in D, \;\; D = D_1 \cup D_2 \cup D_3, \tag{2.2}$$

где $\mathrm{A(z)} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \ln\sqrt{P(\mathrm{z})}$, $2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$.

Грунт в областях D_1, D_2 и D_3 характеризуем непрерывными коэффициентами проницаемости K_1, K_2 и K_3. Считаем, что скачёк проницаемости на границах сопряжения Γ_1 и Γ_2 имеет вид: $K_\nu(z) = k_\nu K(z)$ ($\nu = 1, 2, 3$; k_1, k_2 и k_3 — $const$). Полагаем, что толщина слоя H непрерывна во всей области фильтрации D. Тогда проводимость слоя в областях D_ν характеризуем функциями $P_\nu(z) = k_\nu P(z)$, $\nu = 1, 2, 3$. Течение в областях D_ν опишем комплексными потенциалами

$$W_\nu(\mathrm{z}) = k_\nu \varphi_\nu(\mathrm{z}) + i\frac{\psi_\nu(\mathrm{z})}{P(\mathrm{z})}, \quad \mathrm{z} \in D_\nu, \;\; \nu = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Границы сопряжения Γ_1 и Γ_2 моделируем кривыми класса Ляпунова [5]. Пусть они заданы параметрическими уравнениями:

$$z_m = z_m(l_m) \quad (x_m = x_m(l_m),\, y_m = y_m(l_m)), \text{ где } l_m \text{ — параметры}, \; m = 1, 2. \tag{2.4}$$

Комплексные потенциалы (2.3) в областях D_ν ($\nu = 1, 2, 3$) удовлетворяют уравнению (2.2), а на границах сопряжения — граничным условиям (непрерывности давления и расхода жидкости), которые в комплексной форме принимают вид [4]:

$$(1-\lambda_m)W_1^{+}(\mathrm{z}) = W_{m+1}^{-}(\mathrm{z}) + \lambda_m \overline{W}^{-}_{m+1}(\mathrm{z}), \quad \mathrm{z} \in \Gamma_m, \quad m = 1, 2, \tag{2.5}$$

где $\lambda_m = (k_1 - k_{m+1})/(k_1 + k_{m+1})$, $\lambda_m \in [-1, 1)$, «+» и «–» обозначены предельные значения соответствующих функций при подходе к Γ из области D_1 и D_{m+1}.

Область фильтрации может быть ограничена сингулярной линией L_0 на которой проводимость $P(z)$ обращается в ноль либо в бесконечность. Граничное условие на L_0 имеет вид [3]:

$$P(\mathrm{z})\frac{\partial \varphi_\nu(\mathrm{z})}{\partial n} = 0, \text{ либо } \varphi_\nu(z) = const,\; \nu = 1 \text{ и (или) } 2 \text{ и (или) } 3,\; \mathrm{z} \in L_0, \tag{2.6}$$

Задача об определении комплексных потенциалов W_ν, удовлетворяющих в областях D_ν уравнению (2.2) и условиям (2.5), (2.6), называется задачей сопряжения.

3. Пусть в отсутствии границ Γ_1 и Γ_2 ($k_1 = k_2 = k_3 = 1$) течение описывается комплексным потенциалом $W_0(z)$ вида (2.1). Полагая, что его действительная часть $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию (2.6), $W_0(z)$ представим в виде:

$$W_0(z) = \mathcal{G}(z) + q\mathcal{F}(z, z_0), \tag{3.1}$$

где функция $\mathcal{G}(z)$ описывает поступательный поток со скоростью u, $\mathcal{F}(z, z_0)$ — функция, описывающая течение к стоку единичной мощности, расположенному в точке z_0, и имеющая в этой точке особенность логарифмического типа.

При наличии в области фильтрации границ смены неоднородностей Γ_1 и Γ_2 течение возмущается. Учитывая течение, описываемое комплексным потенциалом (3.1), комплексные потенциалы (2.3) представим в виде [3]

$$W_\nu(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad \mathrm{z} \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{3.2}$$

где $W_*(z)$ — комплексный потенциал возмущений, вызванных наличием границ Γ_1, Γ_2. $W_*(z)$ ищем в виде потенциала двойного слоя непрерывно распределённого с плотностью $g_m(z)$ ($g_m(z)$ — вещественная функция) на границах Γ_m, $m = 1, 2$:

$$W_*(z)=\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_j} g_j(\zeta)P(\zeta)\frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}dl_\zeta\,,\qquad z\in D_\nu\ (\nu=1;2,3),$$

$$W_*^{\pm}(z)=\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_j} g_j(\zeta)P(\zeta)\frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}dl_\zeta \pm\frac{g_m(z)}{2},\ z\in\Gamma_m\ (m=1,2), \tag{3.3}$$

где $F_1(z, \zeta)$ — первое фундаментальное решение уравнения (2.1). Следуя [3, 4], задачу сопряжения сводим к решению системы интегральных уравнений:

$$g_m(z)-2\lambda_m\sum_{j=1}^{2}\int_{L_j} g_j(\zeta)P(\zeta)\frac{\partial \Phi_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}dl=2\lambda_m\varphi_0(z)\,,\ z\in\Gamma_m,\ m=1,2 \tag{3.4}$$

где $\varphi_0(z)$ — действительная часть комплексного потенциала (3.1), $\Phi_1(z, \zeta) = \mathbf{Re}F_1(z, \zeta)$. Решив систему (3.4) методом дискретных особенностей [5, 4, 3], найдём функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$, а следовательно, учитывая формулы (3.1) – (3.3), и комплексные потенциалы W_ν, описывающие течение в областях D_ν ($\nu = 1, 2, 3$).

Следуя [3], координату критической точки z_* находим из уравнения:

$$\frac{\partial\varphi_0(z)}{\partial z}-\frac{i}{P(z)}\sum_{j=1}^{2}\int_{L_j}\frac{\partial g_j(\zeta)}{\partial l_\zeta}\frac{\partial\Psi_2(z,\zeta)}{\partial z}dl=0\,, \tag{3.5}$$

где $\Psi_2(z,\zeta)=P(z)\,\mathbf{Im}F_2(z, \zeta)$, $F_2(z, \zeta)$ — второе фундаментальное решение уравнения (2.1). Построив линию тока

$$\psi_0(z)+\sum_{j=1}^{2}\int_{L_j}\frac{\partial g_j(\zeta)}{\partial l_\zeta}\Psi_2(z,\zeta)dl=\psi_0(z_*)+\sum_{j=1}^{2}\int_{L_j}\frac{\partial g_j(\zeta)}{\partial l_\zeta}\Psi_2(z_*,\zeta)dl\,, \tag{3.6}$$

проходящую через найденную точку z_*, имеем область захвата водозабора, работающего с дебитом q. Следуя предложенной в [2] схеме численного эксперимента, находим предельно-допустимый дебит.

Численный эксперимент позволяет исследовать зависимость дебита водозабора q_* от его удалённости от очага загрязнения, проницаемости загрязнённых областей, их формы и расположения. Полученные сведения могут быть использованы при проектировании и строительстве хранилищ промышленных отходов.

4. Для слоя постоянной проводимости проведём исследование влияния расположения очагов загрязнения на предельно-допустимый дебит водозабора. Моделируем области D_2 и D_3 окружностями одинакового радиуса a. Исследования показали, что предельно-допустимый дебит водозабора больше, если центры очагов загрязнения расположены на линии, перпендикулярной вектору скорости поступательного потока грунтовых вод, проходящего через точку z_0. При этом, с удалением очагов загрязнения друг от друга, величина q_* растёт. Это можно объяснить тем, что при указанном изменении положения очагов загрязнения, критическая точка течения располагается дальше от эксплуатационной скважины. Если очаги загрязнения располагаются по направлению потока друг за другом, то, как следует из таблицы 1, q_* максимален, если наиболее удалённый от водозабора очаг загрязнения имеет большую проницаемость (меньший параметр λ).

Таблица 1. Влияние параметра λ на q_*

$x_0 = 1{,}5$; $y_0 = 0$; $b_L = x_0 - a = 1$ $x_{C1} = 0$; $y_{C1} = 0$; $\lambda_1 = 0{,}5$ $x_{C2} = -1{,}5$; $y_{C1} = 0$	q_*	1,027	1,015	1	0,973	0,958
	λ_2	-0,9	-0,5	0	0,5	0,9

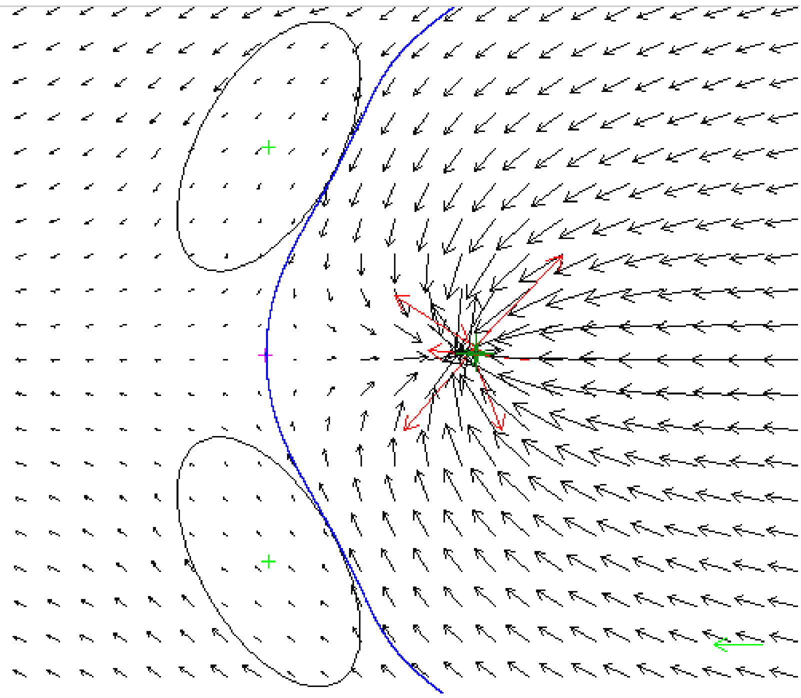


Рис. 1. Фильтрационное течение

Таблица 2. Влияние угла θ на q_*

$x_0 = 1{,}5$; $y_0 = 0$; $a_1 = a_2 = 1$	q_*	1,325	1,531	1,657	1,567	1,345	1,225
$x_{C1} = 0$; $y_{C1} = 1{,}5$; $b_1 = b_2 = 0{,}5$	θ_1	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6
$x_{C2} = 0$; $y_{C2} = -1{,}5$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$	θ_2	0	-π/6	-π/3	-π/2	-2π/3	-5π/6

Проведены исследования, если очаги загрязнения моделировать равными эллипсами. Так, в таблице 2 проиллюстрирована зависимость предельно-допустимого дебита водозабора от ориентации очагов загрязнения (θ_m — угол между большой полуосью $m^{\underline{\text{го}}}$ эллипса и осью абсцисс, проходящей через точку z_0 и направленной против вектора скорости поступательного потока, $m = 1, 2$). Видно, что с увеличением углов предельно-допустимый дебит увеличивается, достигает максимального значения, а потом уменьшается. На рис. 1 проиллюстрировано фильтрационное течение, соответствующее наибольшему значению q_*.

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк. 1972. 368 с.
2. Квасов А.А., Пивень В.Ф. О работе водозабора без загрязнения. // VIII Четаевская Международная конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». Тезисы докладов. Казань. Изд.-во Казанского гос. техн. ун.-та. 2002. С. 263.
3. Квасов А.А., Пивень В.Ф. Исследование двумерного шлейфа загрязнения в неоднородном слое // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирования. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления" №509. 2003. С. 139-144.
4. Квасов А.А. Задача об исследовании шлейфов вымываемых загрязнений при работе системы скважин. // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Выпуск 2. Орёл. ОГУ. 2003. С. 32-37.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. «Янус». 1995. 520 с.

УДК 621.362.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАДИТЕЛЯ

О.И. Марков

Орловский государственный университет

Предложен метод компьютерного моделирования нагрузочных характеристик термоэлектрического охладителя. Использовано дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности с зависящими от температуры кинетическими коэффициентами.

Термоэлектрические преобразователи энергии благодаря своей надежности, компактности, отсутствию движущихся частей стали незаменимыми при использовании в космических аппаратах. Миниатюрные термоэлектрические охладители используются для охлаждения и термостатирования элементов оптоэлектроники и электронной техники. Важнейшей при этом является проблема согласования термоэлектрического охладителя и охлаждаемого объекта. В практических расчетах различных термоэлектрических устройств наибольшее распространение получил метод средних в интервале температур параметров [1]. Формулы и основные соотношения метода средних параметров остаются по виду такими же, как и в случае постоянных параметров, но коэффициенты термоэдс, электро- и теплопроводности заменяются средне интегральными в заданном интервале температур.

Большинство термоэлектрических микрохолодильников эксплуатируются в режиме максимальной холодопроизводительности. Соответствующие режимы для ветвей термоэлементов холодильных модулей при заданных параметрах термоэлектрического материала определяются только разностью температур на модуле. При заданной разности температур для выбранной геометрии ветви определяется оптимальный ток, соответствующий максимуму холодопроизводительности. В термоэлектрических охлаждающих устройствах обычно задается температура охлаждаемого объекта температура окружающей среды, в которую осуществляется сброс тепла. Поэтому задача оптимизации режима работы модуля, т.к. величина перепада зависит от двух параметров тока через модуль и мощность.

Такой подход не гарантирует необходимой точности расчета термоэлектрического модуля. Поэтому весьма большое значение приобретает численное моделирование нагрузочных характеристик охладителя. Поскольку характеристики каскадных устройств в значительной мере определяются параметрами ветвей термоэлементов, разработку и исследование каскадных микроохладителей целесообразно начинать с подбора материалов по каскадам и исследования температурных зависимостей основных характеристик термоэлементов (максимального перепада температур, максимальной холодопроизводительности, оптимальных токов и т.д.). В данной работе предлагается новый подход к расчету термоэлектрического модуля, основанного на решении граничной задачи стационарной теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(\chi\cdot\frac{dT}{dx}\right)+\frac{y^2}{\sigma}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{e}}\cdot y\cdot\frac{dT}{dx}=0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\chi\cdot\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=\alpha\cdot y\cdot T\big|_{x=0}-q_0,\, T\big|_{x=1}=T_1 \tag{2}$$

где для удобства решения задачи нами [3] был введен параметр $y=J\cdot {}^{l}\!/_{S}$.

Воспользуемся для описания термоэлектрических свойств теллурида висмута классической статистикой. Кинетические коэффициенты для невырожденного случая имеют вид

$$\sigma=\mathrm{e}\cdot n\cdot u, \chi=\chi_p+2\cdot\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{e}}\right)^2\cdot T\cdot\sigma, \alpha=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{e}}\cdot\left(2+\ln\frac{2(2\pi\mathrm{mk}T)^{3/2}}{n\mathrm{h}^3}\right)$$

Известно, что путем соответствующего легирования можно для каждого интервала температур, а, следовательно, и для каждого каскада, изменять в определенных пределах свойства выбранных материалов. При температуре горячего спая равной комнатной для p - ветви выбирались следующие параметры: эффективная масса дырок $\mathrm{m}_h^*=0.7\cdot\mathrm{m}_0$ [2], концентрация $n=0.945\cdot10^{25}$ м$^{-3}$, подвижность дырок const T^{-2}, решеточная теплопроводность $\chi_p=const/T^{0.7}$. Для n-ветви: эффективная масса электронов $\mathrm{m}_e^*=0.45\cdot\mathrm{m}_0$ [2],концентрация $n=0.485\cdot10^{25}$ м$^{-3}$, подвижность дырок const $T^{-1.7}$, решеточная теплопроводность $\chi_p=const/T^{0.4}$. Подбор этих констант позволил качественно и в значительной степени количественно правильно описать температурные зависимости коэффициентов электро- и теплопроводности, дифференциальной термоэдс параметра термоэлектрической добротности Z (рис. 1).

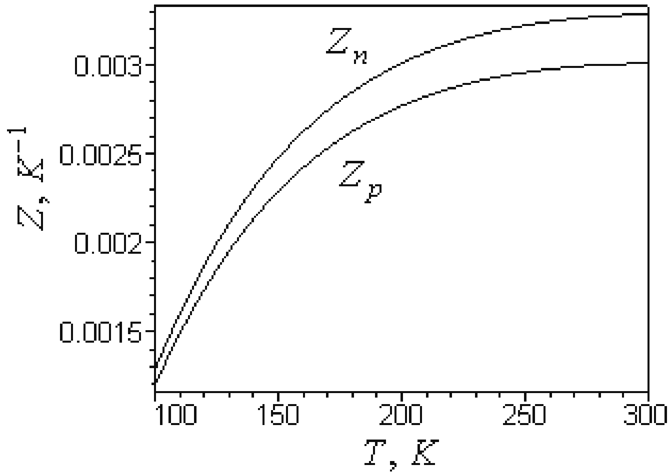


Рис. 1. Зависимость термоэлектрической добротности Z от температуры T

Для описания теплофизических свойств модуля были использованы приведенные величины, определяемые по формуле

$$q = \frac{q_n \dfrac{S_n}{l_n} + q_p \dfrac{S_p}{l_p}}{\dfrac{S_n}{l_n} + \dfrac{S_p}{l_p}} = \frac{\dfrac{q_n}{Y_n} + \dfrac{q_p}{Y_p}}{\dfrac{1}{Y_n} + \dfrac{1}{Y_p}} \tag{3}$$

Расчет проводился в режиме максимальной холодопроизводительности. Оптимизация проводилась по удельному току [3]. Результаты расчета приведенной холодопроизводительности термоэлектрического модуля представлен в виде зависимости $q_0(T_1)$ и $q_0(\Delta T)$. Оба графика можно объединить в один 3-мерный (рис. 2).

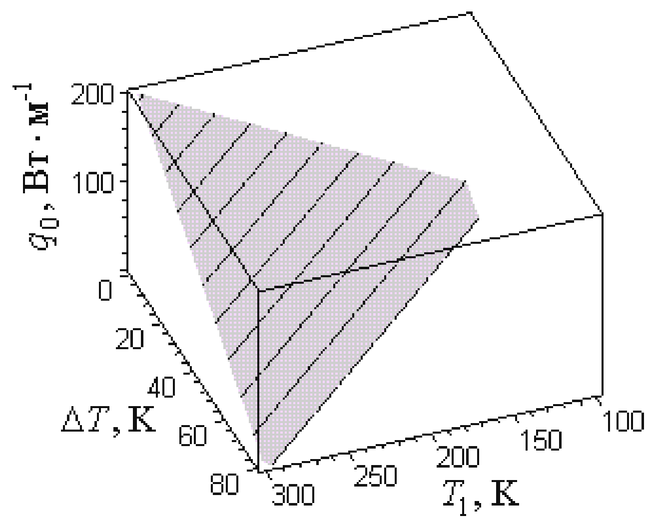


Рис. 2. Зависимости q_0 от T_1 и ΔT

На горячем конце ветви модуля выполняется следующее уравнение теплового баланса

$$q_1 = \alpha \cdot y \cdot T\Big|_{x=1} - \chi \cdot \frac{dT}{dx}\Big|_{x=1} \tag{4}$$

Зависимость удельной теплопроизводительности от температуры горячего конца ветви и от перепада температур представлены на рис. 3.

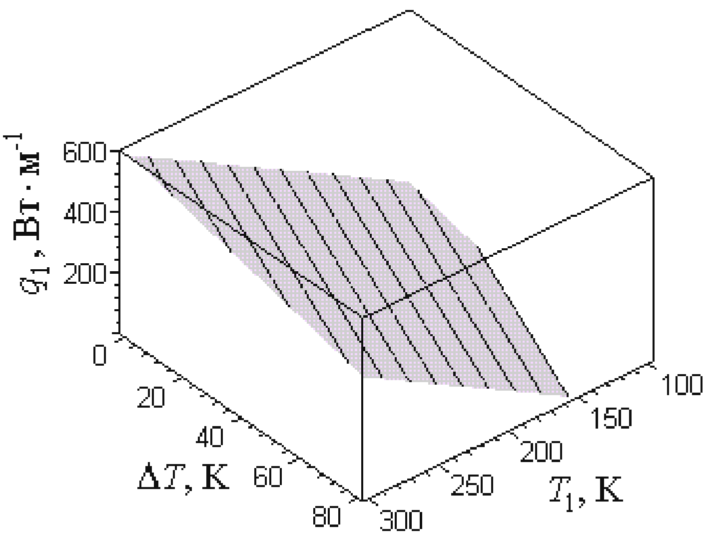


Рис. 3. Зависимости q_1 от T_1 и ΔT

Предлагается следующая методика расчета модуля термоэлектрического охладителя. Очевидно, что нужно исходить из заданной холодопроизводительности Q_x и величины поддерживаемой температуры T_x. Зная величину Q_x и термическое сопротивление теплоперехода, легко определить величину перепада температуры на теплопереходе. По графику для удельной холодопроизводительности можно определить значение удельной холодопроизводительности при данном перепаде температуры и данном значении температуры горячего конца термоэлемента. По графикам для удельных токов (здесь не приведенных) определяются оптимальные удельные токи ветвей. Сечения и длины ветвей определяются параметрами источника питания. По графику для удельной теплопроизводительности определяют оптимальное значение тепловыделения и перепад температуры на горячем радиаторе.

Литература

1. Бурштейн А.И. Физические основы расчета полупроводниковых термоэлектрических устройств. М.: Физматгиз, 1962.
2. Гольцман Б.М., Кудинов В.А., Смирнов И.А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе Bi_2Te_3. М.: Наука, 1972, 320 с.
3. Марков О.И. Влияние линейно распределенной концентрации носителей на режимы работы ветви термоэлемента. ИФЖ., 2003, т. 76, №6, С. 185-187.

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О ПОДНЯТИИ КОНУСА ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ К ЛИНЕЙНОЙ СКВАЖИНЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ[1]

Д.Н. Никольский, Т.А. Никольская
Орловский государственный университет

Решается осесимметричная задача об эволюции водонефтяного контакта контура нефти к линейной скважине. Нефть и вода моделируются жидкостями различной вязкости и плотности. Исследовано влияние вязкостей и плотностей воды и нефти на время заводнения скважины.

Постановка задачи.

В бесконечном однородном и изотропном грунте имеется несовершенная скважина с фильтром длиной L. Скважина расположена вертикально. В начальный момент времени $t=0$ поверхность раздела воды и нефти представляет собой горизонтальную плоскость. Нефть моделируем жидкостью вязкости μ_2 и плотности ρ_2, а воду жидкостью вязкости μ_1 и плотности ρ_1.

Полагаем что вытеснение “поршневое”. Поставленная задача обладает осевой симметрией. Поэтому достаточно рассмотреть фильтрацию в одной из плоскостей, содержащей ось симметрии. Выберем декартову систему координат так, что ось Ox будет представлять собой ось симметрии. Концы фильтра скважины будут иметь координаты $(0,0)$ и $(L,0)$. Исследование эволюции поверхности раздела жидкостей сводится к исследованию эволюции контура нефтеносности Γ_t в одной из плоскостей, содержащей ось симметрии.

Пусть в областях D_1 и D_2, содержащих воду и нефть, соответственно, течение описывается потенциалами φ_1 и φ_2.

Согласно [1] потенциалы удовлетворяют уравнению эллиптического типа:

$$\frac{\partial}{\partial x_M}\left(y_M\frac{\partial\varphi_\nu(M,t)}{\partial x_M}\right)+\frac{\partial}{\partial y_M}\left(y_M\frac{\partial\varphi_\nu(M,t)}{\partial y_M}\right)=0 \qquad (1)$$

$$\nu=1,2\,,\quad M(x,y)\notin\Gamma_t$$

На контуре нефтеносности Γ_t выполняются условия непрерывного давления и расхода жидкости [2].

$$\varphi_1^+(M,t)-\varphi_2^-(M,t)=(\rho_1-\rho_2)x_M\,,$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial\varphi_1(M,t)}{\partial n_M}\right)^+=\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial\varphi_2(M,t)}{\partial n_M}\right)^-,\ \ M\in\Gamma_t \qquad (2)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-96433).

Считаем, что в любой момент времени контур нефтеносности Γ_t определяется параметрическим уравнением:

$$\vec{r} = \vec{r}(t,\varsigma), \tag{3}$$

где ς – параметр.

Дифференциальное уравнение границы Γ_t имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{(\ \nabla\varphi_1(M,t)\ )^+ + (\ \nabla\varphi_2(M,t)\ )^-}{2}\ ,\ \ M \in \Gamma_t \tag{4}$$

Начальное условие для дифференциального уравнения (4) представляет собой параметрическое уравнение контура нефтеносности Γ_0 (3) при $t = 0$:

$$\vec{r} = \vec{r}(0,\varsigma) = \vec{r}_0(\varsigma), \qquad \varsigma - \text{параметр} \tag{5}$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции, потенциалы φ_1 и φ_2 представим в виде:

$$\varphi_\nu(M,t) = \mu_\nu[\varphi_0(M,t) + \varphi_*(M,t)], \quad M \in \Gamma_t \tag{6}$$

где $\varphi_0(M,t)$— потенциал невозмущённого течения, моделирующий работу линейного стока, в отсутствии контура Γ_t.

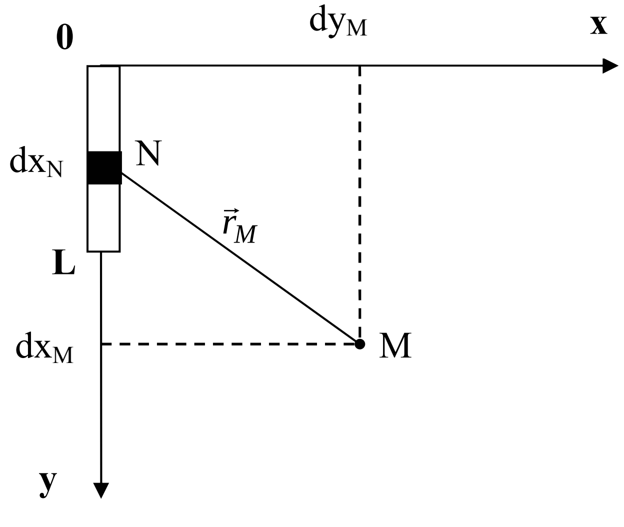


Рис. 1. Расчет потенциала φ_0

Потенциал линейной скважины $\varphi_0(M,t)$ найдём как сумму потенциалов пространственных стоков, мощности q, распределённых вдоль оси скважины (рис. 1):

$$\varphi_0(M,t) = \frac{q}{4\pi}\int_0^L \frac{dx_N}{\sqrt{(x_M - x_N)^2 + y_M^2}}.$$

Вычисляя, интеграл в последнем выражении получим:

$$\varphi_0(M,t)=\frac{q}{4\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(L-x_M)^2+y_M{}^2}+L-x_M}{\sqrt{x_M^2+y_M^2}-x_M}\right). \tag{7}$$

Потенциал возмущения будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi_*(M,t)=\int\limits_L g(N,t)y_N\frac{\partial\Phi_1(M,N)}{\partial n_N}\partial l_N \quad M(x,y)\notin\Gamma_t. \tag{8}$$

С учётом (6), (8) уравнения $(1)-(4)$ примут вид:

$$g(M,t)-2\lambda\int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)y_N\frac{\partial\Phi_1(M,N)}{\partial n_N}dl_N=2\lambda\varphi_0(M,t)+2\alpha\, x_M, \qquad M\in\Gamma_t \tag{9}$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt}=\nabla\varphi_0(M,t)+\int\limits_{\Gamma_t}\frac{\partial g(N,t)}{\partial l_N}\frac{1}{y_M}\left[\frac{\partial\Psi_2(M,N)}{\partial y_M}\vec{i}-\frac{\partial\Psi_2(M,N)}{\partial x_M}\vec{j}\right]dl_N, \quad M\in\Gamma_t \tag{10}$$

где

$$\lambda=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}, \qquad \alpha=\frac{2(\rho_1-\rho_2)}{\mu_2+\mu_1},$$

$$\Phi_1(M,N)=\frac{1}{2\pi\sqrt{y_M,y_N}}\int\limits_0^\pi\frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega-2\cos\varphi}},$$

$$\Psi_2(M,N)=-\frac{\sqrt{y_M,y_N}}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2\omega-2\cos\varphi}},$$

$$\omega=\frac{(x_M-x_N)^2+y_M{}^2+y_N{}^2}{2y_M y_N}$$

Численная схема решения системы интегральных и дифференциальных уравнений.

Решим систему (9), (10) численно, методом дискретных особенностей $[4]$. Для этого подвижную границу Γ_t в каждый момент времени $t_j, j=0,1,2,...,$ представим системой точек $\left(x_m^i, y_m^j\right)$, $m=0,1,2,...,n$ разбивающих этот контур на равные отрезки. Заменим в (9) è (10) интегралы суммами по формуле прямоугольников, а дифференциалы их разностными аналогами, в результате получим:

$$g_m^i-2\lambda\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^n g_k^i y_k^j\left(-\frac{\partial\Phi_1\left(x_m^j,y_m^j x_k^j,y_k^j\right)}{\partial x_k^j}\Delta y_k^j+\frac{\partial\Phi_1\left(x_m^j,y_m^j x_k^j,y_k^j\right)}{\partial y_k^j}\Delta x_k^j\right)= \tag{11}$$
$$=2\lambda\varphi_0\left(x_m^j,y_m^j\right)+2\alpha\, x_m^j,\ m=1,2,\ldots,n,\ j=0,1,\ldots,$$

$$\frac{\Delta\vec{r}_M^{\,j}}{\Delta t^j}=\frac{\partial\varphi_0\left(x_m^j,y_m^jx_k^j,y_k^j\right)}{\partial x_m^j}\vec{i}+\frac{\partial\varphi_0\left(x_m^j,y_m^jx_k^j,y_k^j\right)}{\partial x_m^j}\vec{j}+$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}\frac{1}{y_m}\left[\frac{\partial\Psi_2\left(x_m^j,y_m^jx_k^j,y_k^j\right)}{\partial y_m}\vec{i}-\frac{\partial\Psi_2\left(x_m^j,y_m^jx_k^j,y_k^j\right)}{\partial x_m}\vec{j}\right]\Delta g_k^j \tag{12}$$

$$\Delta x_k^j=\frac{x_{k+1}^j-x_{k-1}^j}{2},\quad \Delta y_k^j=\frac{y_{k+1}^j-y_{k-1}^j}{2},\ \Delta g_k^j=\frac{g_{k+1}^j-g_{k-1}^j}{2},$$
$$\Delta\vec{r}_m^{\,j}=\left(x_m^{j+1}-x_m^j\right)\vec{i}+\left(y_m^{j+1}-y_m^j\right)\vec{j},\ \Delta t^0 \text{ - задаётся [3].}$$

Таким образом, решение задачи об эволюции контура нефтеносности Γ_t сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (11) для некоторого положения системы точек (x_m^j,y_m^j) $m=0,1,2,...,n$ определяемого индексом j, и нахождением следующего положения системы точек (x_m^{j+1},y_m^{j+1}) $m=0,1,2,...,n$ из выражений (12). Начальное положение системы точек (x_m^0,y_m^0) $m=0,1,2,...,n$ определяется уравнением (5)

В качестве характерной длины выберем кратчайшее расстояние d от контура Γ_0 до скважины. Длина фильтра скважины $L=\frac{d}{2}$. За характерное время T_0 примем время заводнения скважины при $\lambda=0$, $\alpha=0$ (одножидкостная система)

$$T_0=\frac{2\pi d^2\left(3L+2d\right)}{3Ld}=-\frac{14\pi}{3q}.$$

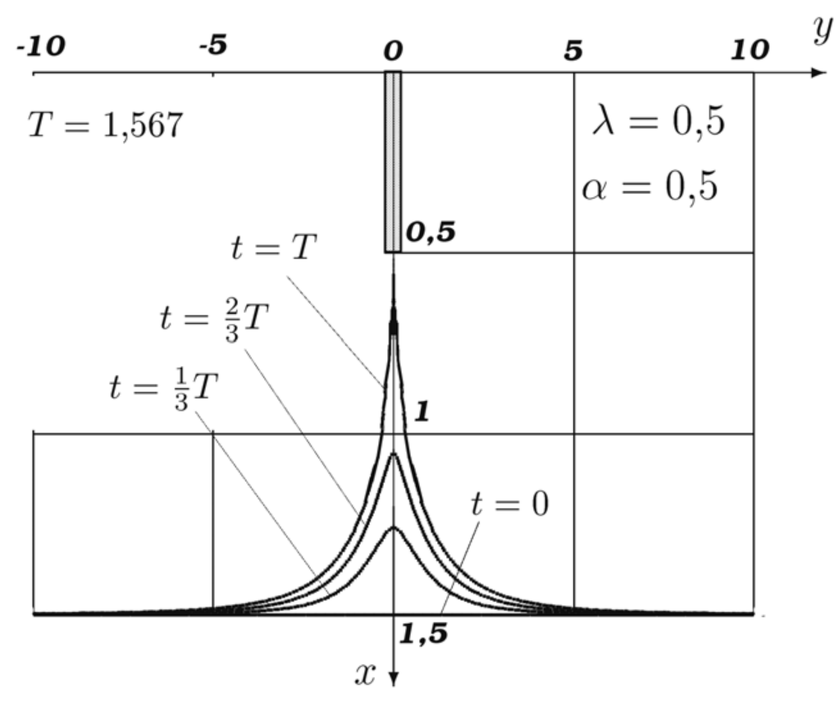


Рис. 2. Эволюция контура нефтеносности к скважине

На рис. 2 построены последовательные положения контура нефтеносности Γ_t при его продвижении к скважине при $\lambda = 0{,}5$ и $\alpha = 0{,}5$. На рисунке приводится время T — время по истечению которого контур нефтеносности достигнет скважины.

В табл. 1 и табл. 2 приведено время Т для различных значений λ и α. Расчеты проведены при числе точек разбиения границы Γ_t $n = 111$.

Табл.1. Влияние λ при $\alpha = 0.5$

λ	$-0{,}5$	0	0,5
Т	2,454	2,114	1,567

Табл.2. Влияние α при $\lambda = 0.5$

α	0,5	0	0,5
Т	0,475	0,723	1,567

Из табл. 1 видим, что с ростом λ при фиксированном α время Т уменьшается. Этот результат согласуется с [3]. Из табл. 2 видно, что с уменьшением α при фиксированном λ время Т увеличивается. Последнее можно объяснить таким образом: с уменьшением α при фиксированных вязкостях μ_1 и μ_2 происходит сгущение линий тока вблизи скважины, а значит увеличение скорости движения границы Γ_t. Поэтому граница Γ_t с уменьшением α быстрее прорывается к скважине.

Литература

1. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел. 1994. 147 с.
2. Пивень В.Ф. Задача об эволюции границы раздела жидкостей различной плотности и вязкости в неоднородной среде// МДОЗМФ–2002. Вып.1 С.69-74.
3. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости: Дис … канд. физ.-мат. наук. Орел, 2001. 191 с.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.
5. Пивень В.Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей// ПММ. 1997.Т.61. Вып. 4. С. 595-605.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.

УДК 532.546

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ[1]

В.Ф. Пивень

Орловский госуниверситет, Россия, Орел, ул. Комсомольская, 95

Вводится понятие фундаментальных решений уравнений трехмерных (двумерных) физических процессов, которые протекают в неоднородных средах, содержащих сингулярные поверхности (линии). Получены фундаментальные решения в конкретных случаях сред.

1. Фундаментальные решения уравнений двумерных процессов.

1.1. Двумерные стационарные физические процессы (фильтрация, теплопроводность, электропроводность и т.д.) в неоднородных тонких слоях среды описывают квазипотенциал $\varphi(M)$ и функция тока $\psi(M)$, которые как функции декартовых координат точки $M=(x,y)$ плоского основания слоя удовлетворяют в области D (за исключением особых точек функций $\varphi(M)$ и $\psi(M)$) уравнениям эллиптического типа [1]

$$\nabla\cdot[P(M)\nabla\varphi(M)]=0, \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot[\frac{1}{P(M)}\nabla\psi(M)]=0. \tag{1.2}$$

Здесь $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ – двумерный оператор Гамильтона, $P(M)=K(M)H(M)$ – проводимость слоя, дважды непрерывно дифференцируемая в области D функция ($K(M)$ – коэффициент, характеризующий свойства среды, $H(M)$ – толщина слоя, $P(M)>0$).

На сингулярной линии L_{01}, где проводимость слоя $P(M)=\infty$ (коэффициент $K(M)=\infty$, толщина $H(M)$ - конечна), выполняются для $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ условия

$$\varphi(M)=\text{const}, \quad M\in L_{01}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{P(M)}\frac{\partial\psi(M)}{\partial n_M}=0, \quad M\in L_{01}. \tag{1.4}$$

На сингулярной линии L_{02}, где проводимость слоя $P(M)=0$ ($K(M)=0$ или/и $H(M)=0$), имеют место для $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ условия

$$P(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}=0,\ M\in L_{02}, \tag{1.5}$$

$$\psi(M)=\text{const},\ M\in L_{02}. \tag{1.6}$$

В условиях (1.3) - (1.6) $\vec{n}_M$ – орт нормали к линиям L_{01}, L_{02} и не нарушая общности суждений можно выбирать $\text{const}=0$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-96433).

Сингулярная линия $L_0 = L_{01} \bigcup L_{02}$ может служить границей области D, где происходит процесс. В этом случае функции $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ кроме уравнений (1.1) и (1.2) должны удовлетворять условиям (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6).

1.2. Для исследования граничных задач практики принципиальное значение имеют фундаментальные решения уравнений (1.1) и (1.2). При этом следует различать случаи, когда область процесса D не ограничена и ограничена сингулярной линией L_0 ($L_0 = L_{01} \bigcup L_{02}$).

Фундаментальными решениями уравнений (1.1) и (1.2) в области D, неограниченной сингулярной линией L_0, назовем функции $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$, которые удовлетворяют условиям:

1. Всюду в области D по координатам точки $M = (x, y)$ за исключением точки-параметра $M_0 = (x_0, y_0)$ ($M, M_0 \in D$) функции $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют уравнениям (1.1) и (1.2).

2. Функции $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ имеют в точке M_0 сингулярности (особенности) логарифмического типа, а именно, в малой окрестности этой точки они имеют вид

$$\Phi(M, M_0) \sim \frac{1}{2\pi P(M_0)} \ln \frac{1}{R_{M_0 M}}, \quad \Psi(M, M_0) \sim -\frac{P(M_0)}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{M_0 M}}, \quad (1.7)$$

где $R_{M_0 M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ – расстояние между точками M_0 и M.

В том случае, когда область D ограничена (полностью либо частично) сингулярной линией L_0, то функции $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ назовем фундаментальными решениями в области $\overline{D}$ ($\overline{D} = D \bigcup L_0$), если они в области D удовлетворяют указанным условиям 1 и 2, а на линии L_0 условиям (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6).

Так как условия (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6) имеют при $\mathrm{const} = 0$ вид однородных условий первого (условие Дирихле) и второго (условие Неймана) рода, то фундаментальные решения $\Phi(M, M_0)$, $\Psi(M, M_0)$ можно рассматривать как функции Грина соответствующих первой и второй краевых задач для уравнений (1.1), (1.2). Как известно [2], функции Грина обладают свойством симметрии. Это означает, что фундаментальные решения $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ симметричны относительно взаимных перестановок в них координат точек M и M_0: $\Phi(M, M_0) = \Phi(M_0, M)$ и $\Psi(M, M_0) = \Psi(M_0, M)$.

Решения $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ имеют ясный гидродинамический смысл в теории фильтрации. А именно, $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ представляют собой соответственно квазипотенциал скорости течения к стоку полного расхода $\Pi = -1$ и функцию тока вихря с циркуляцией $\Gamma = -1$.

Сток (вихрь) расположен в точке M_0. Квазипотенциал φ источника (стока) расхода $\Pi > 0$ ($\Pi < 0$) и функция тока ψ вихря с циркуляцией $\Gamma > 0$ против часовой стрелки ($\Gamma < 0$ по часовой стрелке) связаны с $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ равенствами

$$\varphi = -\Pi\Phi(M, M_0),\ \psi = -\Gamma\Psi(M, M_0).$$

1.2. Чтобы отыскать фундаментальные решения $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ в случае слоев с проводимостями $P(M)$, моделируемых классами функций, введем приведенные фундаментальные решения $U(M, M_0)$ и $V(M, M_0)$, которые взаимосвязаны с $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ равенствами

$$\Phi(M, M_0) = \frac{U(M, M_0)}{\sqrt{P(M)}},\ \Psi(M, M_0) = \sqrt{P(M)}V(M, M_0). \qquad (1.8)$$

Относительно $U(M, M_0)$ и $V(M, M_0)$ уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\Delta U(M, M_0) - A(M)U(M, M_0) = 0 \qquad (A(M) = \frac{\Delta\sqrt{P(M)}}{\sqrt{P(M)}}), \qquad (1.9)$$

$$\Delta V(M, M_0) - B(M)V(M, M_0) = 0 \qquad (B(M) = \frac{\Delta 1/\sqrt{P(M)}}{1/\sqrt{P(M)}}), \qquad (1.10)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа по координатам точки M ($\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$).

Структура уравнения (1.9) (или (1.10)) такова, что его решение $U(M, M_0)$ (или $V(M, M_0)$) можно отыскивать для класса слоев с проводимостями $P(M)$, для которых одинаков коэффициент $A(M)$ (или $B(M)$).

1.4. Укажем фундаментальные решения $\Phi(M, M_0)$ и $\Psi(M, M_0)$ в конкретных случаях классов проводимостей $P(M)$ слоев. Пусть проводимости $P(M)$ слоев таковы, что $\sqrt{P(M)}$ можно моделировать гармонической функцией ($\Delta\sqrt{P(M)} = 0$). Тогда решением уравнения (1.9) с коэффициентом $A(M) = 0$ является

$$U(M, M_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{P(M_0)}}\ln\frac{1}{R}.$$

Здесь и далее R – расстояние между точками M_0 и M ($R \equiv R_{M_0 M}$). Для слоев такой проводимости согласно (1.8) имеем фундаментальное решение $\Phi(M, M_0)$ для области D, не ограниченной сингулярной линией L_0:

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{P(M)P(M_0)}}\ln\frac{1}{R}. \qquad (1.11)$$

Решение (1.11) – функция Грина в круге радиуса $R = 1$ с центром в точке M_0 и условием $\Phi(M, M_0)\big|_{R=1} = 0$.

Когда область D ограничена сингулярной линией L_0, то $\Phi(M, M_0)$ должно удовлетворять условиям (1.3), (1.5). Поэтому $\Phi(M, M_0)$ имеет вид

$$\Phi(M, M_0) = \frac{\ln 1/R + g(M, M_0)}{2\pi\sqrt{P(M)P(M_0)}}. \tag{1.12}$$

Здесь $g(M, M_0)$ – гармоническая симметричная ($g(M, M_0) = g(M_0, M)$) функция, вид которой определяется проводимостью $P(M)$ слоя и соответствующими ей условиями (1.3), (1.5). В частности, если слой проводимости $P(M) = y^2$, имеющий сингулярную ($P(M) = 0$) линию L_{02}: $y = 0$, то решение (1.12) примет вид

$$\Phi_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi y y_0} \ln \frac{R_*}{R}. \tag{1.13}$$

Здесь и далее R_* – расстояние между точками $M_* = (x_0, -y_0)$ и $M = (x, y)$ ($R_* = R_{M_*M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$).

Решение (1.13) удовлетворяет согласно (1.5) на сингулярной линии L_{02}: $y = 0$ условию $\lim\limits_{y \to 0} \left[y^2 \dfrac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial y} \right] = 0$.

Пусть теперь проводимость слоя $P(M)$ такова, что $\sqrt{P(M)}$ моделируется метагармонической функцией, то есть $\sqrt{P(M)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sqrt{P(M)} - \mu^2\sqrt{P(M)} = 0 \ (\mu^2 = \text{const} > 0). \tag{1.14}$$

Тогда, следуя [2], имеем решением уравнения (1.9) с коэффициентом $A = \mu^2$:

$$U(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi\sqrt{P(M_0)}}$$

и, следовательно, согласно (1.8) имеем фундаментальное решение в случае неограниченной области D:

$$\Phi(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi\sqrt{P(M)P(M_0)}}. \tag{1.15}$$

Здесь $K_0(\mu R)$ – функция Макдональда нулевого порядка аргумента μR, которая связана согласно [3] с функцией Бесселя

$$I_0(\mu R) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{\mu R}{2} \right)^{2m}$$

равенством

$$K_0(\mu R) = -I_0(\mu R)\ln\frac{\mu R}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\mu R}{2}\right)^{2m}\frac{\psi(m+1)}{(m!)^2},$$

$\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m}$, γ – постоянная Эйлера-Маскерони.

Если область D ограничена сингулярной линией L_0, то имеем

$$\Phi(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R) + h(M, M_0)}{2\pi\sqrt{P(M)P(M_0)}}, \tag{1.16}$$

где $h(M, M_0)$ – метагармоническая по координатам точки M функция, которая симметрична ($h(M, M_0) = h(M_0, M)$) в силу симметрии $\Phi(M, M_0)$.

В частности, когда проводимость слоя $P(M)$ зависит только от одного переменного, например, y, то общим решением уравнения (1.14) будет

$$P(M) = (ae^{\mu y} + be^{-\mu y})^2, \tag{1.17}$$

где a, b – произвольные постоянные. Если a, b одного знака, то на основании (1.15), (1.17) имеем

$$\Phi(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi(ae^{\mu y} + be^{-\mu y})(ae^{\mu y_0} + be^{-\mu y_0})}.$$

В частности, отсюда при $a = b = 1/2$ имеем фундаментальное решение в случае слоя проводимости $P(M) = \mathrm{ch}^2 \mu y$.

Если a и b противоположного знака, то слой проводимости (1.17) имеет сингулярную ($P(M) = 0$) линию L_{02}: $y = d$ ($d = \frac{1}{2\mu}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$). Полагая $a = -b = 1/2$, имеем слой проводимости $P(M) = \mathrm{sh}^2 \mu y$ с линией L_{02}: $y = 0$, для которого согласно (1.16) имеем

$$\Phi(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R) - K_0(\mu R_*)}{2\pi \mathrm{sh}\mu y \mathrm{sh}\mu y_0}.$$

Это решение согласно (1.5) удовлетворяет на сингулярной линии L_{02}: $y = 0$ условию $\lim\limits_{y \to 0}\left[\mathrm{sh}^2 \mu y \frac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial y}\right] = 0$.

Когда постоянные $a = 1$, $b = 0$, то для слоя проводимости $P(M) = e^{2\mu y}$ коэффициенты A и B в уравнениях (1.9) и (1.10) равны: $A = B = \mu^2$. В этом случае эти уравнения имеют решения

$$U(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi e^{\mu y_0}},\ V(M, M_0) = -\frac{e^{\mu y_0}K_0(\mu R)}{2\pi}.$$

Тогда согласно (1.8) находим фундаментальные решения

$$\Phi(M, M_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi e^{\mu(y+y_0)}},\ \Psi(M, M_0) = -\frac{e^{\mu(y+y_0)}K_0(\mu R)}{2\pi}.$$

Пусть проводимость слоя изменяется по степенному закону

$$P(M) = y^s \ (s = \text{const}).$$

Для этого слоя прямая $y = 0$ является сингулярной линией L_{01} ($P(M) = \infty$) при $s < 0$ или L_{02} ($P(M) = 0$) при $s > 0$. В этом случае уравнения (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\Delta U(M, M_0) - \frac{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - 1\right)}{y^2} U(M, M_0) = 0, \tag{1.18}$$

$$\Delta V(M, M_0) - \frac{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{y^2} V(M, M_0) = 0. \tag{1.19}$$

Видно, что уравнения (1.18) и (1.19) математически идентичны. Они переходят друг в друга при замене s на $-s$. Поэтому достаточно найти, например, решение $U(M, M_0)$ уравнения (1.18). Тогда решение $V(M, M_0)$ уравнения (1.19) получим из решения $U(M, M_0)$ путем замены в $U(M, M_0)$ s на $-s$.

Уравнения (1.18), (1.19) приводятся (см. [4]) к уравнению Лежандра, решениями которого являются функции Лежандра первого $P_\nu(\omega)$ и второго $Q_\nu(\omega)$ рода степени $\nu = \frac{s}{2} - 1$ аргумента $\omega = 1 + \frac{R^2}{2yy_0}$. Для этих функций согласно [3] имеем

$$Q_\nu(\omega) = \frac{P_\nu(\omega)}{2}\left[\ln\frac{\omega + 1}{\omega - 1} - 2\gamma - 2\psi(\nu + 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma(-\nu + l)\Gamma(\nu + l + 1) \frac{\sigma(l)}{(l!)^2} \left(\frac{1 - \omega}{2}\right)^l \right],$$

$\sigma(l) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{l}$, $\psi(\nu + 1)$ – логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(\nu + 1)$, γ – постоянная Эйлера-Макерони.

Так как $P_\nu(1) = 1$, то $Q_\nu(\omega)$ имеет в точке M_0 ($R = 0$, $\omega = 1$) сингулярность логарифмического типа. Поэтому уравнение (1.18) при $s > 0$ имеет решение

$$U(M, M_0) = \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi y_0^{s/2}}.$$

Заменяя в этом решении s на $-s$ и учитывая равенство $Q_{-\frac{s}{2}-1}(\omega) = Q_{\frac{s}{2}}(\omega)$, находим при $s > 0$ решение уравнения (1.19):

$$V(M, M_0) = -\frac{y_0^{s/2} Q_{s/2}(\omega)}{2\pi}.$$

Тогда согласно (1.8) имеем при $s>0$ фундаментальные решения

$$\Phi(M,M_0)=\frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi(yy_0)^{s/2}}, \tag{1.20}$$

$$\Psi(M,M_0)=-\frac{(yy_0)^{s/2}Q_{\frac{s}{2}}(\omega)}{2\pi}. \tag{1.21}$$

Учтем, что на основании [3] при $y\to 0$ $(\omega\to\frac{R^2}{2yy_0}\to\infty)$

$$Q_\nu(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\left(\frac{yy_0}{R^2}\right)^{\nu+1}. \tag{1.22}$$

Тогда убедимся, что решения (1.20) и (1.21) удовлетворяют согласно (1.5) и (1.6) (где $\mathrm{const}=0$) на сингулярной линии L_{02}: $y=0$ условиям

$$\lim_{y\to 0}\left[y^s\frac{\partial\Phi(M,M_0)}{\partial y}\right]=0 \text{ и } \lim_{y\to 0}\Psi(M,M_0)=0.$$

Заменяя в (1.20) и (1.21) s на $-|s|$ и учитывая равенство $Q_{-\nu-1}(\omega)=Q_\nu(\omega)$ $(\nu=\frac{|s|}{2},\nu=\frac{|s|}{2}-1)$, имеем при $s<0$ фундаментальные решения

$$\Phi(M,M_0)=\frac{(yy_0)^{\frac{|s|}{2}}Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)}{2\pi}, \tag{1.23}$$

$$\Psi(M,M_0)=-\frac{Q_{\frac{|s|}{2}-1}(\omega)}{2\pi(yy_0)^{\frac{|s|}{2}}}. \tag{1.24}$$

Учитывая (1.22), убеждаемся, что решения (1.23) и (1.24) удовлетворяют в соответствии с (1.3) (где $\mathrm{const}=0$) и (1.4) на сингулярной линии L_{01}: $y=0$ условиям

$$\lim_{y\to 0}\Phi(M,M_0)=0 \text{ и } \lim_{y\to 0}\left[y^{|s|}\frac{\partial\Psi(M,M_0)}{\partial y}\right]=0.$$

Отметим, что (1.20), (1.21) и (1.23), (1.24) – фундаментальные решения во всей полуплоскости $y>0$, а значит в любой области D этой полуплоскости.

1.5. Анализ полученных фундаментальных решений $\Phi(M,M_0)$ и $\Psi(M,M_0)$ показывает, что их можно представить в области D (неограниченной или ограниченной сингулярной линией L_0) следующим образом

$$\Phi(M,M_0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{P(M)P(M_0)}}\left[f_1(M,M_0)\ln\frac{1}{R_{M_0M}}+g_1(M,M_0)\right],$$

$$\Psi(M,M_0)=-\frac{\sqrt{P(M)P(M_0)}}{2\pi}\left[f_2(M,M_0)\ln\frac{1}{R_{M_0M}}+g_2(M,M_0)\right].$$

Здесь $f_k(M,M_0)$, $g_k(M,M_0)$, $(k=1,2)$ - функции, дважды непрерывно дифференцируемые по координатам точки M в окрестности точки M_0 ($M,M_0\in D$), причем $f_k(M_0,M_0)=1$, $k=1,2$. В точке M_0 эти решения имеют сингулярности логарифмического типа и в малой окрестности этой точки имеют вид (1.7).

2. Фундаментальные решения уравнений трехмерных процессов.

2.1. Трехмерный стационарный физический процесс в среде, характеризуемый коэффициентом $K(M)>0$, описывается квазипотенциалом $\varphi(M)$, который как функция точки $M=(x,y,z)$ удовлетворяет в области D (за исключением особых точек $\varphi(M)$) уравнению [5]:

$$\nabla\cdot[K(M)\nabla\varphi(M)]=0, \tag{2.1}$$

где ∇ – трехмерный оператор Гамильтона ($\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$). Полагаем, что $K(M)$ – дважды непрерывно дифференцируемая в области D функция. На сингулярных поверхностях σ_{01} и σ_{02} коэффициент $K(M)$ принимает соответствующие значения: $K(M)=\infty$ и $K(M)=0$. На этих поверхностях для $\varphi(M)$ имеют место условия

$$\varphi(M)=\mathrm{const},\ \ M\in\sigma_{01}, \tag{2.2}$$

$$K(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}=0,\ M\in\sigma_{02}, \tag{2.3}$$

где $\vec{n}_M$ – орт нормали к поверхности σ_{02}.

Сингулярная поверхность $\sigma_0=\sigma_{01}\cup\sigma_{02}$ может служить границей области D. В этом случае квазипотенциал $\varphi(M)$ кроме уравнения (2.1) должен удовлетворять также условиям (2.2), (2.3).

2.2 Фундаментальным решением уравнения (2.1) в области D, неограниченной сингулярной поверхностью σ_0 ($\sigma_0=\sigma_{01}\cup\sigma_{02}$), назовем функцию $\Phi(M,M_0)$, которая удовлетворяет условиям:

1. Всюду в области D по координатам точки $M=(x,y,z)$, за исключением точки-параметра $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ ($M,M_0\in D$) функция $\Phi(M,M_0)$ удовлетворяет уравнению (2.1).

2. Функция $\Phi(M,M_0)$ имеет в точке M_0 сингулярность (особенность) $\frac{1}{R_{M_0M}}$ и в малой окрестности этой точки она имеет вид

$$\Phi(M,M_0) \sim \frac{1}{4\pi K(M_0)R_{M_0M}}, \tag{2.4}$$

где $R_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ – расстояние между точками M_0 и M.

В том случае, когда область D ограничена (полностью или частично) сингулярной поверхностью σ_0, то функцию $\Phi(M,M_0)$ назовем фундаментальным решением в области $\overline{D}$ ($\overline{D} = D \cup \sigma_0$), если она в области D удовлетворяет указанным условиям 1 и 2, а на поверхности σ_0 условиям (2.2), (2.3). В этом случае $\Phi(M,M_0)$ можно рассматривать как функцию Грина для уравнения (2.1) с однородными (при $\mathrm{const}=0$) условиями (2.2), (2.3). Поэтому решение $\Phi(M,M_0)$ будет обладать симметрией ($\Phi(M,M_0)=\Phi(M_0,M)$).

Фундаментальное решение $\Phi(M,M_0)$ имеет ясный гидродинамический смысл в теории фильтрации. А именно, $\Phi(M,M_0)$ – квазипотенциал точечного стока с полным расходом $\Pi = -1$, который расположен в точке M_0. Квазипотенциал φ источника (стока) полного расхода $\Pi > 0$ ($\Pi < 0$) связан с решением $\Phi(M,M_0)$ равенством $\varphi = -\Pi\Phi(M,M_0)$.

Чтобы отыскать фундаментальные решения $\Phi(M,M_0)$ для сред с коэффициентом $K(M)$, моделируемым классом функций, введем приведенные фундаментальные решения $U_1(M,M_0)$ в области D такое, что

$$\Phi(M,M_0) = \frac{U_1(M,M_0)}{\sqrt{K(M)}}. \tag{2.5}$$

Относительно $U_1(M,M_0)$ уравнение (2.1) принимает вид

$$\Delta U_1(M,M_0) - A_1(M)U_1(M,M_0) = 0 \quad \left(A_1(M) = \frac{\Delta\sqrt{K(M)}}{\sqrt{K(M)}} \right), \tag{2.6}$$

где Δ – трехмерный оператор Лапласа по координатам точки M ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$).

2.3. Укажем фундаментальные решения $\Phi(M,M_0)$ для случаев $K(M)$, моделируемых конкретными классами функций. Пусть коэффициент $K(M)$ таков, что $\sqrt{K(M)}$ – гармоническая функция ($\Delta\sqrt{K(M)}=0$). Тогда в уравнении (2.6) коэффициент $A_1(M)=0$ и его решение имеет вид

$$U_1(M,M_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{K(M_0)}R},$$

где $R = R_{M_0M}$. Тогда согласно (2.5) находим фундаментальное решение $\Phi(M,M_0)$ для области D, неограниченной сингулярной поверхностью σ_0:

$$\Phi(M,M_0)=\frac{1}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}R}.$$

Если область D ограничена сингулярной поверхностью σ_0, то

$$\Phi(M,M_0)=\frac{1}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}R}\left(\frac{1}{R}+\delta(M,M_0)\right). \qquad (2.7)$$

Здесь $\delta(M,M_0)$ – гармоническая симметричная ($\delta(M,M_0)=\delta(M_0,M)$) функция, которая определяется законом изменения коэффициента $K(M)$ и соответствующим ему условиям (2.2), (2.3). В частности, при $K(M)=z^2$ (поверхность σ_{02}: $z=0$ – сингулярная, $K(M)=0$) решение (2.7) принимает вид [5]

$$\Phi(M,M_0)=\frac{1}{4\pi zz_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_*}\right), \qquad (2.8)$$

где R_* – расстояние между точками $M_*=(x_0,y_0,-z_0)$ и $M=(x,y,z)$, $R_*=R_{M_*M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$.

Решение (2.7) в соответствии с (2.3) удовлетворяет на поверхности σ_{02}: $z=0$ условию $\lim\limits_{z\to 0}\left[z^2\,\frac{\partial\Phi(M,M_0)}{\partial z}\right]=0$.

Если $\sqrt{K(M)}$ моделируется метагармонической функцией, то есть удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sqrt{K(M)}-\mu^2\sqrt{K(M)}=0 \qquad (\mu^2=\text{const}>0),$$

то решение уравнения (2.6) при $A_1=\mu^2$ имеет вид

$$U_1(M,M_0)=\frac{e^{-\mu R}}{4\pi\sqrt{K(M_0)}R}.$$

Тогда согласно (2.5) находим фундаментальное решение для области D, неограниченной поверхностью σ_0:

$$\Phi(M,M_0)=\frac{e^{-\mu R}}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}R}. \qquad (2.9)$$

Если область D ограничена поверхностью σ_0, то

$$\Phi(M,M_0)=\frac{1}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}}\left[\frac{e^{-\mu R}}{R}+\gamma(M,M_0)\right]. \qquad (2.10)$$

Здесь $\gamma(M,M_0)$ – метагармоническая симметричная ($\gamma(M,M_0)=\gamma(M_0,M)$) функция, вид которой определяется законом изменения $K(M)$. В частности, если

$$K(M)=(ae^{\mu z}+be^{-\mu z})^2 \qquad (2.11)$$

(a, b – произвольные константы), то для a и b одинакового знака решение (2.9) примет вид [5]:

$$\Phi(M, M_0) = \frac{e^{-\mu R}}{4\pi(ae^{\mu z} + be^{-\mu z})(ae^{\mu z_0} + be^{-\mu z_0})R}.$$

Если a и b противоположного знака, то согласно (2.11) имеется сингулярная поверхность $\sigma_{02}:\ z = d$ ($d = \dfrac{1}{2\mu}\ln\left(-\dfrac{b}{a}\right)$), на которой $K(M) = 0$.

Полагая $a = -b = 1/2$, имеем согласно (2.10) в случае среды с коэффициентом $K(M) = \mathrm{sh}^2 \mu z$ и сингулярной поверхностью $\sigma_{02}:\ z = 0$ фундаментальное решение [5]:

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi\, \mathrm{sh}\, \mu z\, \mathrm{sh}\, \mu z_0}\left(\frac{e^{-\mu R}}{R} - \frac{e^{-\mu R_*}}{R_*}\right). \qquad (2.12)$$

Решение (2.12) в соответствии с (2.3) удовлетворяет на поверхности $\sigma_{02}:\ z = 0$ условию $\lim\limits_{z \to 0}\left[\mathrm{sh}^2 \mu z \dfrac{\partial \Phi(M, M_0)}{\partial z}\right] = 0$.

2.4. Анализ полученных фундаментальных решений $\Phi(M, M_0)$ уравнения (2.1) показывает, что их можно представить в области D (неограниченной или ограниченной сингулярной поверхностью σ_0) в виде

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{K(M)K(M_0)}}\left[\frac{\tilde{f}(M, M_0)}{R_{M_0 M}} + \tilde{g}(M, M_0)\right]$$

Здесь $\tilde{f}(M, M_0)$, $\tilde{g}(M, M_0)$ – функции, дважды непрерывно дифференцируемые по координатам точки M в окрестности точки M_0 ($M, M_0 \in D$), причем $\tilde{f}(M_0, M_0) = 1$. В точке M_0 эти решения обладают сингулярностью $1/R_{M_0 M}$ и в малой окрестности этой точки имеют вид (2.4).

Литература

1. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел. Изд-во Орловского пединститута. 1994. 148 с.
2. Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Киев: Наукова думка. 1973. 423 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука. 1973. 294 с., Т. 2. М: Наука. 1974. 295 с.
4. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных граничных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дис. Орел. 1998. 265 с.
5. Пивень В.Ф. Точечный источник в неоднородной пористой среде. // Некоторые модели сплошных сред и их приложения: Московское общество испытателей природы. М.: Наука. 1988. С. 48-54.

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ГРУНТА[1]

В.Ф. Пивень, Ю.С. Федяев
Орловский государственный университет

Ставится двумерная задача об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородных слоях грунта. Исследование этой задачи приводит к эволюционной задаче для системы интегральных и дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, которые решаются численно на основе методов дискретных особенностей.

1. Рассмотрим двумерную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости в неоднородном тонком слое проводимости

$$P(M) = K(M)H(M) \quad (P(M) > 0), \tag{1.1}$$

где M – точка в плоскости основания слоя, $K(M)$ – коэффициент проницаемости слоя, $H(M)$ – его толщина. Считаем, что основание слоя является горизонтальной плоскостью, на которой выберем декартову систему координат xOy. Проводимость $P(M)$ моделируется непрерывной с первыми частными производными функцией координат. Движение жидкости обусловлено работой совершенных нагнетательных и эксплуатационных скважин, которые моделируются источниками и стоками течения. Они являются особыми точками поля скоростей.

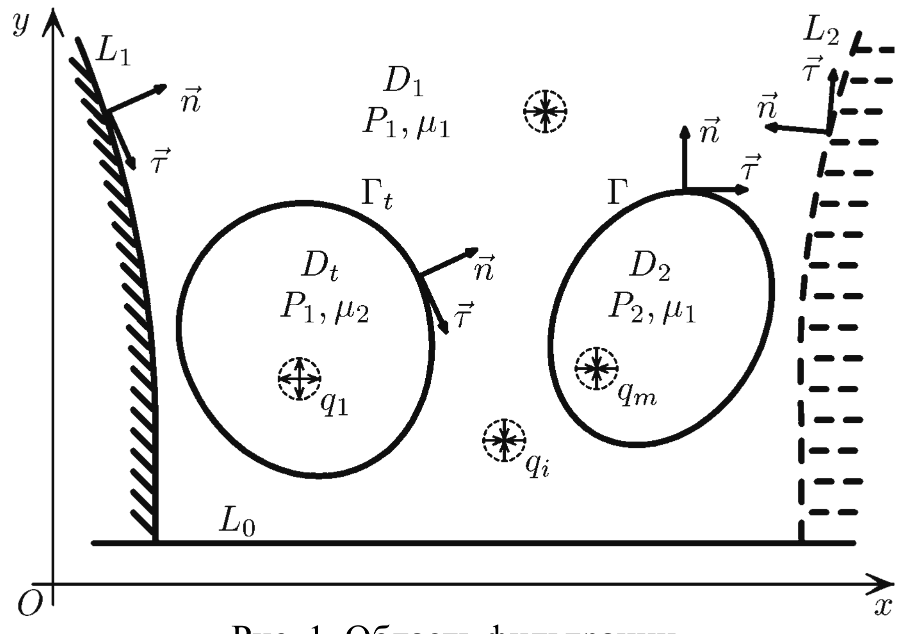


Рис. 1. Область фильтрации

Поле скоростей жидкости $\vec{v}(M,t)$ в каждый момент времени t всюду в области течения D (см. рис. 1), за исключением особых точек, удовлетворяет системе уравнений [1]:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-96433).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\upsilon_y(M,t)}{K(M)}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\upsilon_x(M,t)}{K(M)}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(H(M)\upsilon_x(M,t)\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(H(M)\upsilon_y(M,t)\big)=0, \quad M\in D. \qquad (1.2)$$

Пусть неподвижная гладкая граница Γ делит область фильтрации D на области D_1 и D_2, в которых слои характеризуются проводимостями P_1 и P_2 (см. рис. 1). Полагаем, что $P_\nu = k_\nu P(M)$, где k_ν – постоянные, $\nu = 1,2$. Скачок проводимости на границе Γ обусловлен изменением коэффициента проницаемости.

В области фильтрации D также присутствует изменяющаяся с течением времени область D_t, ограничена кривой Γ_t, в которой движется жидкость постоянной вязкости μ_2. Вне области D_t находится жидкость постоянной вязкости μ_1. Скважины в области D_t нагнетают (отбирают) жидкость вязкости μ_2, а вне этой области – жидкость вязкости μ_1. Граница Γ_t изменяется так, что её в любой момент времени можно моделировать простой (без самопересечений) кривой класса Ляпунова.

Полагаем, что положение области D_t (границы Γ_t) в начальный момент времени $t=0$ известно, которое обозначим D_0 (Γ_0). Параметрическое уравнение границы Γ_0 имеет вид (σ – параметр):

$$\text{при } t=0 \quad \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \quad M\in\Gamma_0. \qquad (1.3)$$

Область фильтрации может ограничивать непроницаемая граница L_1 и (или) эквипотенциальная граница L_2. На границе L_1 должно выполняться условие непроницаемости. В этом случае L_1 является линий тока и может моделировать границу тектонического сброса (линию сброса). На границе L_2 задано давление жидкости, которое в общем случае является функцией времени. Эту границу обычно называют контуром питания, и она моделирует границу пласта со свободной жидкостью (например, водоёмом).

В области течения D также может присутствовать сингулярная линия L_0. Если проводимость слоя на ней обращается в ноль, обозначим её L_{01}. Когда же проводимость слоя на сингулярной линии обращается в бесконечность, обозначим её L_{02}. Сингулярная линия $L_0 = L_{01}\cup L_{02}$ служит границей области фильтрации D. Таким образом, в общем случае под областью D понимается $D = D_1\cup D_2$. Обозначим $\overline{D} = D\cup C_0$, $C_0 = C\cup L_0$, где контур $C = \Gamma\cup\Gamma_t\cup L_1\cup L_2$ обходится по часовой стрелке. Источники (стоки) течения располагаются только в области D, на контуре C их нет.

Пусть известно невозмущённое поле скоростей $\vec{\upsilon}_0(M,t)$ течения «разноцветных» жидкостей ($\mu_1=\mu_2=1$) в неоднородной среде ($k_1=k_2=1$), когда отсутствуют границы L_1 и L_2. Это поле скоростей обусловлено работой скважин дебита q_i, расположенных в точках M_{0i}, $i=1,2,\ldots m$, которые моделируются источниками (стоками) мощности q_i, $i = 1,2,\ldots m$ в области фильтрации D. Тогда поле скоростей $\vec{\upsilon}_0(M,t)$ имеет вид:

$$\vec{\upsilon}_0(M,t) = \sum_{i=1}^{m} q_i(t)\vec{F}_i(M, M_{0i}), \quad M \in \overline{D}, \tag{1.4}$$

Функции $\vec{F}_i(M, M_{0i})$ имеют сингулярность типа $1\big/\left|\vec{r}_M - \vec{r}_{M_{0i}}\right|$ в точках нахождения особенностей M_{0i} и зависят от закона изменения проводимости слоя. Скорость $\vec{\upsilon}_0(M,t)$ всюду в области D, за исключением особых точек, удовлетворяет основным уравнениям (1.2) и граничному условию на сингулярной линии L_0 [1].

Учтём поле скоростей $\vec{\upsilon}_0(M,t)$ и представим искомое поле скоростей $\vec{\upsilon}(M,t)$ следующим образом:

$$\vec{\upsilon}(M,t) = \vec{\upsilon}_0(M,t) + \vec{V}(M,t), \quad M \in D, \tag{1.5}$$

где $\vec{V}(M,t)$ – скорость возмущения, обусловленного наличием границ C. Скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ должна удовлетворять основным уравнениям (1.2) и соответствующим условиям на границах Γ, Γ_t, L_1, L_2 и L_0 [1].

На границе Γ выполняются условия сопряжения для нормальной и касательной составляющих скорости возмущения

$$V_n^+(M,t) = V_n^-(M,t),$$

$$(1-\lambda_k)V_\tau^+(M,t) - (1+\lambda_k)V_\tau^-(M,t) = 2\lambda_k \upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma. \tag{1.6}$$

Здесь «+» («–») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе со стороны нормали $\vec{n}$ (или противоположной стороны). Нормаль направлена в область D_1, а вектор касательной $\vec{\tau}$ здесь и далее образует с вектором нормали $\vec{n}$ правовинтовую систему. Параметр $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_k \in (-1; 1)$.

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы по сравнению с силами гидродинамического давления. Тогда на подвижной границе Γ_t выполняются условия непрерывности расхода жидкости и давления, которые для скорости возмущения имеют вид:

$$V_n^+(M,t) = V_n^-(M,t),$$

$$(1-\lambda_k)V_\tau^+(M,t) - (1+\lambda_k)V_\tau^-(M,t) = 2\lambda_k \upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma. \tag{1.7}$$

Здесь параметр $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\lambda_\mu \in (-1; 1)$ и нормаль направлена из области D_t.

Если область фильтрации ограничивает кривая L_1, то на ней выполняется условие непроницаемости

$$V_n^+(M,t) = -\upsilon_{0n}(M,t), \quad M \in L_1. \tag{1.8}$$

На эквипотенциальной границе L_2 выполняется условие постоянства давления, то есть

$$V_\tau^+(M,t) = -\upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M \in L_2. \tag{1.9}$$

На сингулярной линии L_{01} выполняется условие отсутствия расхода жидкости

$$H(M)V_n(M,t) = 0, \quad M \in L_{01}, \tag{1.10}$$

а на сингулярной линии L_{02} выполняется условие постоянства давления

$$V_\tau(M,t) = 0, \quad M \in L_{02}. \tag{1.11}$$

Если область D содержит бесконечно удалённую точку, то скорость возмущения должна затухать на бесконечности

$$V(M,t) \to 0 \text{ при } \rho(M,C) \to \infty. \tag{1.12}$$

Здесь $\rho(M,C)$ – расстояние между точкой M и контуром C.

В начальный момент времени $t = 0$ положение подвижной границы определяется уравнением (1.3). Для нахождения положения границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$ запишем дифференциальное уравнение её движения. Учитывая связь физической скорости и скорости фильтрации, согласно [2] это уравнение имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{\upsilon}_0(M,t) + \frac{1}{2}\left[\vec{V}^+(M,t) + \vec{V}^-(M,t)\right], \quad M \in \Gamma_t. \tag{1.13}$$

Таким образом, нахождение поля скоростей $\vec{\upsilon}(M,t)$ и положения границы Γ_t в кусочно-неоднородном слое сводится к отысканию скорости возмущения $\vec{V}(M,t)$, удовлетворяющей уравнениям (1.2), условиям (1.6) – (1.12), и интегрировании дифференциального уравнения движения границы (1.13) при начальном условии (1.3).

2. Полагаем, что кривые Γ, Γ_t, L_1, L_2 в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. Будем искать скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ в виде потенциала вихревого слоя, распределённого с плотностью $g(N,t)$ на границе Γ, $f(N,t)$ на границе Γ_t, $h_1(N,t)$ на границе L_1 и $h_2(N,t)$ на границе L_2:

$$\vec{V}(M,t) = \int_\Gamma g(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N +$$
$$+ \int_{L_1} h_1(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N + \int_{L_2} h_2(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N, \quad M \in D. \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{V}_B^*(M,N) = \vec{V}_B(M,N)/K(N)$, $\vec{V}_B(M,N)$ – скорость в точке *M*, от нормированного вихря, расположенного в точке *N*. Эта скорость выражается через функцию тока вихря $\Psi(M,N)$ по формуле [2]

$$\vec{V}_B(M,N) = \frac{1}{H(M)}\left[\frac{\partial\Psi(M,N)}{\partial y_M}\vec{i} - \frac{\partial\Psi(M,N)}{\partial x_M}\vec{j}\right], \tag{2.2}$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты координатных осей *Ox* и *Oy*. При наличии в области фильтрации сингулярной линии L_0 скорость $\vec{V}_B(M,N)$ удовлетворяет граничным условиям (1.10) и (1.11). Поэтому скорость возмущения (2.1) тоже удовлетворяет этим условиям. Для скорости возмущения также выполняется условие на бесконечности (1.12).

Непрерывно продолжим скорость $\vec{V}(M,t)$ на границы Γ, Γ_t, L_1 и L_2. Следуя [2], получаем её предельные значения:

$$\begin{aligned} &\vec{V}^{\pm}(M,t)=\vec{V}(M,t)\pm\frac{\delta(M,t)}{2}\vec{\tau}_M, \quad M\in\Gamma\cup\Gamma_t, \\ &\vec{V}^{+}(M,t)=\vec{V}(M,t)+\frac{\delta(M,t)}{2}\vec{\tau}_M, \quad M\in L_1\cup L_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь под $\vec{V}(M,t)$ понимается прямое значение скорости возмущения (2.1) на контуре C, $\delta(M,t)$ – плотность распределения особенностей на соответствующей границе: $\delta(M,t)=g(M,t)$, $M\in\Gamma$; $\delta(M,t)=f(M,t)$, $M\in\Gamma_t$; $\delta(M,t)=h_1(M,t)$, $M\in L_1$; $\delta(M,t)=h_2(M,t)$, $M\in L_2$.

Из (2.3) следует, что нормальные составляющие предельных значений скорости возмущения на границах Γ и Γ_t непрерывны. Подставляя (2.3) в условия (1.6) – (1.9) получаем систему неоднородных интегральных уравнений типа Фредгольма:

$$g(M,t)-2\lambda_k V_\tau(M,t)=2\lambda_k \upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M\in\Gamma, \tag{2.4}$$

$$f(M,t)-2\lambda_\mu V_\tau(M,t)=2\lambda_\mu \upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M\in\Gamma_t, \tag{2.5}$$

$$V_n(M,t)=-\upsilon_{0n}(M,t), \quad M\in L_1, \tag{2.6}$$

$$h_2(M,t)+2V_\tau(M,t)=-2\upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M\in L_2, \tag{2.7}$$

где $V_\tau(M,t)=\vec{V}(M,t)\cdot\vec{\tau}_M$ и $V_n(M,t)=\vec{V}(M,t)\cdot\vec{n}_M$ – касательная и нормальная составляющая прямого значения скорости возмущения на соответствующей границе. Уравнения (2.4), (2.5) и (2.7) представляют собой интегральные уравнения второго рода, а уравнение (2.6) –интегральное уравнение первого рода.

Подставляя (2.3) в (1.13), получим уравнение движения границы Γ_t:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt}=\vec{\upsilon}_0(M,t)+\vec{V}(M,t), \quad M\in\Gamma_t. \tag{2.8}$$

Следовательно, для нахождения скорости возмущения $\vec{V}(M,t)$ необходимо решить систему уравнений (2.4) – (2.7) относительно плотности вихревого слоя на контуре C. Вычислив интеграл (2.1) получаем искомую скорость. Положение границы Γ_t находим решая дифференциальное уравнение (2.8) при начальном условии (1.3). Так как уравнение (2.5) записано на подвижной границе, то уравнения (2.1), (2.4) – (2.8) следует решать совместно.

Уменьшим число уравнений в полученной системе. Для этого исключим $f(M,t)$ из уравнения (2.8). Умножив (2.8) скалярно на единичный вектор касательной $\vec{\tau}_M$ в точке M границы Γ_t и используя уравнение (2.5), получим

$$f(M,t) = 2\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_M}{dt} \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \tag{2.9}$$

Следовательно, плотность распределения особенностей $f(M,t)$ по границе Γ_t пропорциональна касательной составляющей скорости движения границы Γ_t в данной точке *M*. Учитывая (2.1) и (2.9), введём обозначение

$$\vec{V}^*(M,t) = \int_\Gamma g(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N + 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N +$$

$$+ \int_{L_1} h_1(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N + \int_{L_2} h_2(N,t)\vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N, \quad M \in D. \tag{2.10}$$

Из (2.8) получим векторное интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - \vec{V}^*(M,t) = \vec{\upsilon}_0(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{2.11}$$

Интегральные уравнения (2.4), (2.6), (2.7) для определения плотностей $g(M,t)$, $h_1(M,t)$, $h_1(M,t)$ примут вид:

$$g(M,t) - 2\lambda_k V_\tau^*(M,t) = 2\lambda_k \upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma, \tag{2.12}$$

$$V_n^*(M,t) = -\upsilon_{0n}(M,t), \quad M \in L_1, \tag{2.13}$$

$$h_2(M,t) + 2V_\tau^*(M,t) = -2\upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M \in L_2, \tag{2.14}$$

где $V_\tau^*(M,t)$ и $V_n^*(M,t)$ – касательная и нормальная составляющая прямого значения скорости возмущения (2.10) на соответствующей границе.

Таким образом, изучение движения границы Γ_t в кусочно-неоднородных слоях сводится к решению эволюционной задачи для системы интегро-дифференциального (2.11) и интегральных (2.12) – (2.14) уравнений при начальном условии (1.3).

Решение поставленной задачи упрощается, если границы Γ, L_1 и L_2 имеют канонический вид (прямая, окружность). В этом случае поле скоростей $\vec{\upsilon}_0(M,t)$ и скорость вихря $\vec{V}_B(M,N)$ выбираем таким образом, чтобы граничные условия на этих границах выполнялись. Тогда следует положить $g(M,t) = 0$, $h_1(M,t) = 0$, $h_1(M,t) = 0$ и необходимость в уравнениях (2.12) – (2.14) отпадает. Интегро-дифференциальное уравнение (2.11) принимает вид

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N)d\ell_N = \vec{\upsilon}_0(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{2.15}$$

При отсутствии границ Γ, L_1 и L_2 интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет тот же вид (2.15). В указанных случаях нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения (2.15) при начальном условии (1.3) [3].

3. Полученная система уравнений (2.11) – (2.14) решается численно с помощью метода дискретных особенностей. В случае присутствия в области фильтрации только границ Γ и Γ_t схема численного решения уравнений приведена в работе [4]. На эквипотенциальной границе L_2, как и на границе Γ, имеет место интегральное уравнение второго рода. Поэтому уравнение на границе L_2 решается аналогично уравнению на границе Γ. На непроницаемой границе L_1 имеет место интегральное уравнение первого рода. Для численного решения такого уравнения необходимо использовать специальный подход. В работе для этого случая применялся численный метод, разработанный и обоснованный в монографии [5].

Рассмотрим работу системы нагнетательной и эксплуатационной скважин в кусочно-неоднородном слое, проводимость которого изменяется по степенному закону $P = y^s$. В этом случае область фильтрации D ограничивает сингулярная линия $L_0 : y = 0$, на которой проводимость слоя обращается в ноль ($s > 0$, L_{01} – линия сброса) или бесконечность ($s < 0$, L_{02} – контур питания). Нагнетательную скважину моделируем источником полной мощности $\Pi_{\text{и}}$, а эксплуатационную – стоком полной мощности $\Pi_{\text{с}}$. Считаем, что нагнетательная скважина находится в точке с координатами $(x_{\text{и}}, y_{\text{и}})$, а эксплуатационная – в точке $(x_{\text{с}}, y_{\text{с}})$. Для потенциала невозмущённой скорости в рассматриваемом случае имеем [6]:

$$
\begin{gathered}
\varphi_0 = -\frac{\Pi_{\text{и}}}{2\pi}(yy_{\text{и}})^{-\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_{\text{и}}) - \frac{\Pi_{\text{с}}}{2\pi}(yy_{\text{с}})^{-\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_{\text{с}}), \quad s > 0; \\
\varphi_0 = -\frac{\Pi_{\text{и}}}{2\pi}(yy_{\text{и}})^{\frac{|s|}{2}} Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega_{\text{и}}) - \frac{\Pi_{\text{с}}}{2\pi}(yy_{\text{с}})^{\frac{|s|}{2}} Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega_{\text{с}}), \quad s < 0.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Здесь $\omega_{\text{и(с)}} = \dfrac{(x - x_{\text{и(с)}})^2 + y^2 + y_{\text{и(с)}}^2}{2yy_{\text{и(с)}}}$, Q_ν – функция Лежандра второго рода.

Невозмущённое поле скоростей вычисляется по формуле

$$\vec{\upsilon}_0 = K\nabla\varphi_0. \tag{3.2}$$

Функция тока вихря Ψ имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\Psi = \frac{\gamma}{2\pi}(y\eta)^{\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}}(z), \quad s > 0; \\
\Psi = \frac{\gamma}{2\pi}(y\eta)^{-\frac{|s|}{2}} Q_{\frac{|s|}{2}-1}(z), \quad s < 0.
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Здесь (ξ, η) – точка расположения вихря, $z = \dfrac{(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2}{2y\eta}$, $\gamma = -1$.

Считаем, что скважины работают с постоянными и равными по модулю дебитами. То есть $q_{\text{и}} = \Pi_{\text{и}} / H(x_{\text{и}}, y_{\text{и}}) = q$, $q_{\text{с}} = \Pi_{\text{с}} / H(x_{\text{с}}, y_{\text{с}}) = -q$. Скважины находятся на расстоянии c от сингулярной линии L_0. Расстояние между источником и стоком обозначим d. Ось Oy проведём посередине между скважинами. Тогда для их координат получим $(x_{\text{и}}, y_{\text{и}}) = (-d/2, c)$, $(x_{\text{с}}, y_{\text{с}}) = (d/2, c)$. Границу Γ будем моделировать окружностью радиуса R, центр которой находится посередине между источником и стоком в точке $(0, c)$. Первоначальное положение границы Γ_t совпадает с контуром нагнетательной скважины и представляет собой окружность радиуса R_0 с центром в точке расположения источника.

В качестве характерного размера выберем расстояние d. За характерное время T возьмём время T_z загрязнения эксплуатационной скважины нагнетаемой жидкостью при отсутствии границы Γ ($\lambda_k = 0$) и сингулярной линии L_0 (однородный слой). Это время определяется по формуле

$$T = \frac{\pi d^2}{3q} \quad (R_0 << d). \tag{3.4}$$

В этом случае безразмерный дебит $q = \pi/3$. Также положим $R_0 = R_c = 0{,}01d$, $R = 0{,}125d$.

Исследуем зависимость времени T_z от параметра λ_μ для различных значений расстояния c. Изучим три предельных случая изменения проводимости слоя. В первом случае полагаем, что по степенному закону изменяется толщина слоя $H = y^s (s > 0)$, а его проницаемость постоянна ($K = 1$). На рис. 2 показана зависимость времени загрязнения эксплуатационной скважины T_z от параметра λ_μ в слое $H = y^4$ для различных значений расстояния до сингулярной линии c.

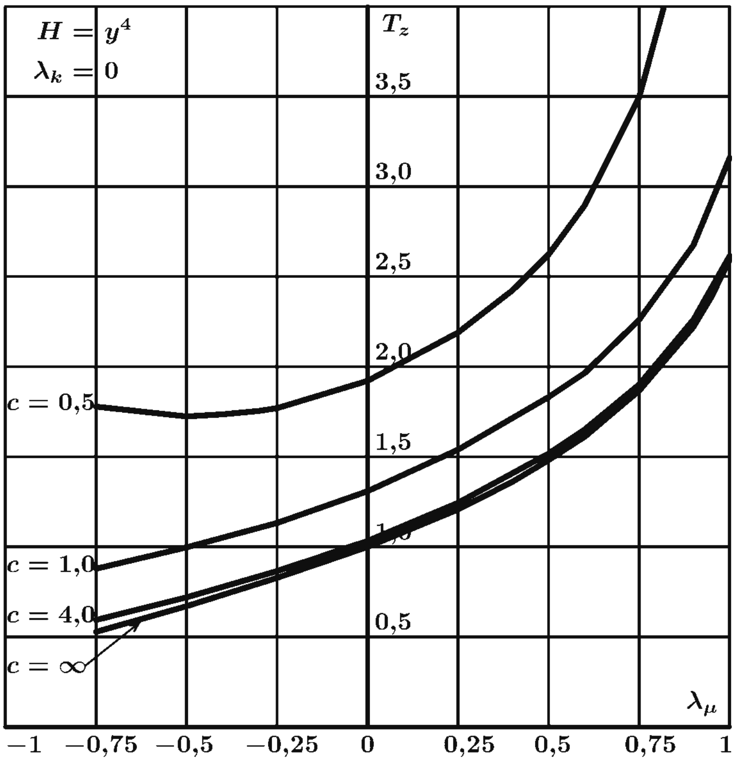


Рис. 2. Зависимость времени T_z от λ_μ в слое $H = y^4$

При расчётах полагали что $\lambda_k = 0$ (неоднородный грунт). Предельному случаю $c = \infty$ соответствует работа скважин в однородном неограниченном пласте. Видим, что при $c > 1$ с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости время T_z увеличивается. При $c = 4$ зависимость мало отличается от случая $c = \infty$, то есть при $c > 4$ влияние сингулярной линии L_{01} на время T_z мало.

Во втором случае полагаем, что по степенному закону изменяется проницаемость слоя $K = y^s \left(s > 0\right)$, а его толщина постоянна ($H = 1$). На рис. 3 показана зависимость времени T_z от параметра λ_μ в слое $K = y^4$ для различных значений расстояния c. Для всех значений c с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости время T_z увеличивается. Как и в случае изменения толщины слоя при $c > 4$ влияние сингулярной линии L_{01} на время T_z мало. Сравнивая рис. 2 и рис. 3, видим, что при изменении толщины слоя время T_z сильнее зависит от расстояния c.

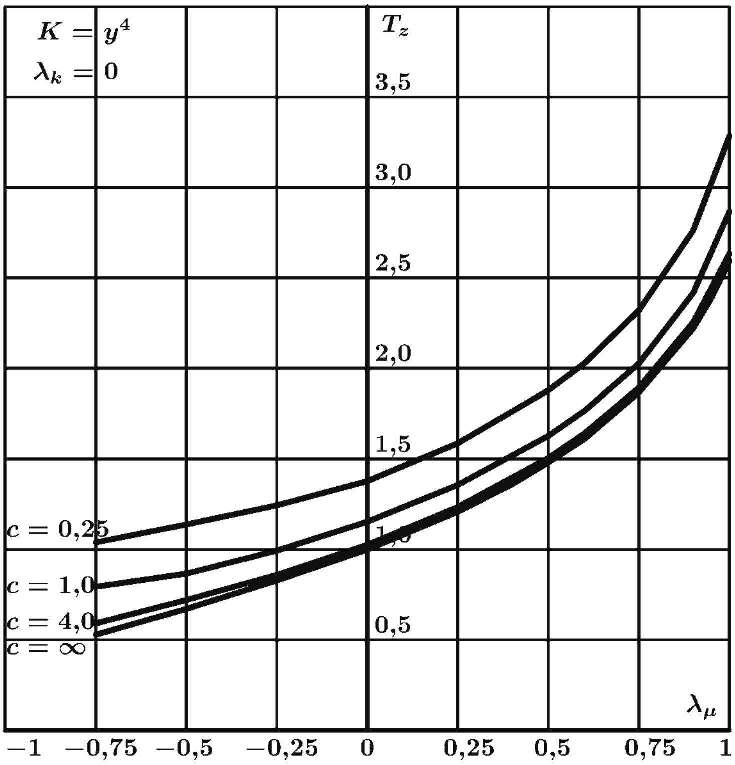


Рис. 3. Зависимость времени T_z от λ_μ в слое $K = y^4$

В третьем случае полагаем, что по степенному закону изменяется проницаемость слоя $K = y^{-s} \left(s > 0\right)$, а его толщина постоянна ($H = 1$). На рис. 4 показана зависимость времени T_z от параметра λ_μ в слое $K = y^{-4}$ для различных значений расстояния c. Видим, что при $c > 1$ с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости время T_z увеличивается. Сравнивая рис. 2, рис. 3 и рис. 4, замечаем, что сингулярная линия L_{02} оказывает наиболее сильное влияние на время T_z. С удалением от сингулярной линии во всех рассмотренных случаях зависимости стремятся к зависимости при $c = \infty$.

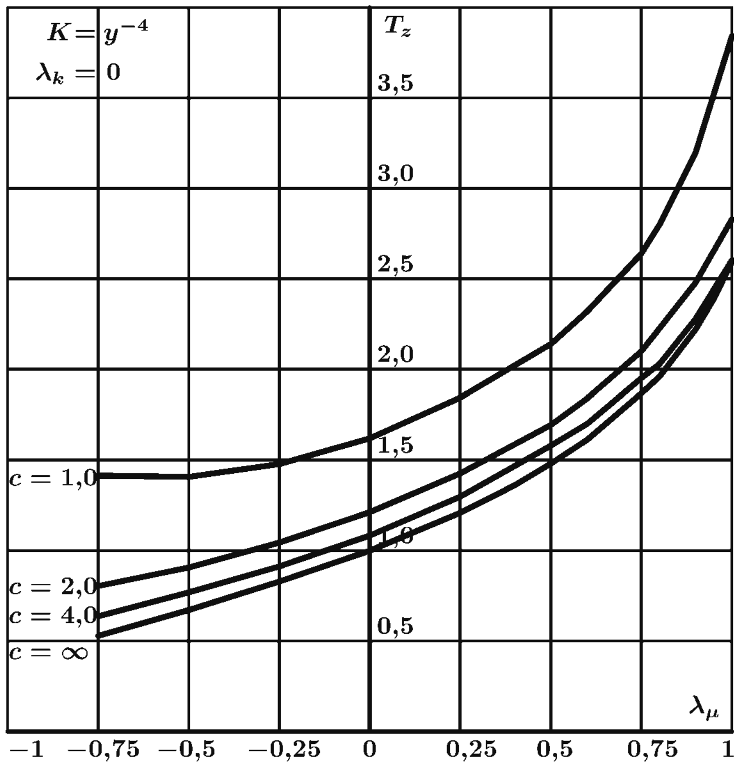


Рис. 4. Зависимость времени T_z от λ_μ в слое $K = y^{-4}$

Отметим, что во всех исследованных случаях изменения проводимости слоя с увеличением неоднородности слоя (параметра s) зависимость времени T_z от расстояния c усиливается и время T_z растёт.

Литература

1. Пивень В.Ф. Математическое моделирование течений жидкости в неоднородных слоях // Юбилейный научный сборник в честь семидесятилетия Орловского государственного университета. Орёл, 2001. С. 89-98.
2. Пивень В.Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №12. С. 1705–1710.
3. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование плоскопараллельного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости методом интегро-дифференциального уравнения // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ – 2001». Херсон, 2001. С. 275-279
4. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование двумерного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое со степенным законом изменения его проводимости // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 2. Орёл. ОГУ, 2003. С. 53-63.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
6. Пивень В.Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей //ПММ. 1997. Т.61, вып.4. С. 595-605.

УДК 531.55:521.2

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ И СВЕТОВЫХ МОМЕНТОВ

С.Г. Суксова

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Рассматривается движение динамически симметричного спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и гравитационного притяжения. Проводится усреднение уравнений движения по движению Эйлера-Пуансо. Проведено исследование возмущенного движения и описаны траектории движения вектора кинетического момента L.

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках моделей динамики твердых тел, центры масс которых движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Задачи динамики обобщаются и осложняются учетом различных возмущающих факторов и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления и др.), близкому к проводимому ниже, посвящено много работ (см. [1-10]) и библиографию к этим работам.

Введем три правых декартовых системы координат, начало координат совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $OXYZ$ движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником; ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Z – направлению радиус-вектора орбиты в ее перигелии, ось X – направлению вектора скорости центра масс в перигелии.

Положение вектора кинетического момента тела **L** относительно его центра масс в системе координат $OXYZ$ определим углами ρ и σ, как показано в [1-3]. (**L** – кинетический момент тела относительно его центра масс). Для построения системы координат OL_1L_2L, связанной с вектором **L**, в плоскости OYL проведем ось L_1, перпендикулярно к вектору **L** и составляющую тупой угол с осью Y. Ось L_2 дополняет оси L_1 и L до правой системы координат. Оси связанной системы координат $Oxyz$ совместим с главными центральными осями инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей L, L_1, L_2 определим углами Эйлера [1-3]. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей x, y, z относительно системы OL_1L_2L выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме гравитационных и сил светового давления. В [1] приведена сравнительная оценка гравитационных моментов и моментов сил светового давления для спутника Солнца. Для общей ситуации показано, что момент сил светового давления на несколько порядков больше гравитационного. В рассматриваемой ниже задаче момент сил светового давления предполагается того же порядка малости ε^2, что и гравитационный момент. Это достигается, например, распределением масс и соответствующей формой тела.

Гравитационный момент, действующий на динамически симметричный спутник со стороны Солнца, имеет вид [3]

$$M_g = \frac{3}{2}\frac{\omega_0^2\left(1+e\cos\nu\right)^3}{(1-e^2)^3}(A-C)\gamma''^2 \tag{1}$$

Здесь ω_0 – средняя угловая скорость движения, e – эксцентриситет орбиты спутника, γ''–косинус угла между радиусом-вектором **R** и осью z.

Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии **k** направлен по оси Oz. Как показано в [1, 4], в этом случае для момента сил светового давления $\mathbf{M_c}$, действующего на спутник, имеет место формула

$$M_c = (a_c\,(\varepsilon_s)\ R_0^2 / R^2)\ \mathbf{e_r}\times\mathbf{k}$$

$$a_c\,(\varepsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2} = p_c\,S\,(\varepsilon_s)\,Z_0'\,(\varepsilon_s),\ \ p_c = \frac{E_0}{c}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{e_r}$ – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты, ε_s – угол между направлениями $\mathbf{e_r}$ и **k**, так, что $|\mathbf{e_r}\times\mathbf{k}| = \sin\,\varepsilon_s$, R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника, R_0 – фиксированное значение R, например, в начальный момент времени, $a_c(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, S – площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку, Z_0' - расстояние от центра масс до центра давления, p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца, c – скорость света, E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Далее полагаем [1] $a_c = a_c\,(\cos\,\varepsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos\,\varepsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от положения оси симметрии тела в пространстве [1]. Представим функцию $a_c\,(\cos\,\varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_{0c} + a_{1c}\cos\,\varepsilon_s + \ldots \tag{3}$$

Далее рассмотрим отдельно только второй член разложения.

Уравнения возмущенного движения динамически симметричного спутника при наличии силовой функции в переменных L, ρ, σ, φ, ψ, θ имеют вид [3]

$$\begin{gathered}\dot\sigma = (L\sin\rho)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\rho},\ \dot\rho = -(L\sin\rho)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\sigma} + L^{-1}ctg\rho\frac{\partial U}{\partial\psi}\\ \dot L = \frac{\partial U}{\partial\psi},\ \dot\theta = -(L\sin\theta)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + L^{-1}ctg\theta\frac{\partial U}{\partial\psi}\\ \dot\varphi = L\cos\theta\left(C^{-1}-A^{-1}\right) + (L\sin\theta)^{-1}\frac{\partial U}{\partial\theta}\end{gathered} \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = LA^{-1} - L^{-1}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} ctg\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} ctg\theta\right)$$

Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $\nu(t)$ и от направляющих косинусов α_3, β_3, γ_3 оси Oz относительно системы координат $OXYZ$; она имеет вид $U = U(\nu(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

К системе уравнений (4) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем

$$\frac{d\nu}{dt} = \omega_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(1+e\cos\nu\right)^2,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0} = \left[\chi\left(1-e^2\right)^3 P^{-3}\right]^{1/2} \tag{5}$$

Здесь ω_0 – средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q_0 – период обращения спутника. e и P – эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, χ – произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

Считаем силовую функцию состоящей из двух слагаемых, обусловленных влиянием гравитационного момента и момента сил светового давления $U=U_g+U_c$. Силовая функция, обусловленная влиянием гравитационного момента, записывается следующим образом [3]

$$U_g = \frac{3\omega_0^2\left(1+e\cos\nu\right)^3}{2\left(1-e^2\right)^3}(A-C)\gamma''^2 \tag{6}$$

Момент сил светового давления (2) эквивалентен наличию силовой функции $U_c(\cos\varepsilon_s) = -R_0^2/R^{-2}\int a_c(\cos\varepsilon_s)d(\cos\varepsilon_s)$.

Рассмотрим случай $a_c(\cos\varepsilon_s) = a_{1c}\cos\varepsilon_s$, соответствующий второму члену разложения функции $a_c(\cos\varepsilon_s)$ (3). Силовая функция в этом случае имеет вид $U_c(\cos\varepsilon_s) = -\dfrac{R_0^2}{2R^2}a_{1c}\cos^2\varepsilon_s$, причем $\cos\varepsilon_s = \gamma_3\cos\nu + \alpha_3\sin\nu$.

Введем в систему уравнений (4), (5) малые параметры. Предположим, что $a_{1c} \sim \varepsilon^2$. Исследуем решение системы (4), (5) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи применим метод усреднения [11]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-2}$ оборотов. Усреднение по движению Эйлера-Пуансо проводим по методике работы [1] для нерезонансных случаев.

Уравнения (4) удобны для исследования движения в случае быстрых вращений. При быстрых вращениях, то есть при больших L, ψ возрастает почти равномерно и достаточно быстро. Поэтому ля выявления основных эффектов движения удобно усреднить уравнения движения по быстрой переменной ψ. Проводя такое усреднение, например, в уравнении для $\dot{L}$ (4) и учитывая, что U зависит от ψ периодически с периодом 2π, получим для усредненного движения

$\dot{L} = 0$, то есть $L = L_0$. Кроме того,

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{L_0 \sin\rho}\frac{d\bar{U}}{d\sigma},\ \dot{\sigma} = \frac{1}{L_0 \sin\rho}\frac{d\bar{U}}{d\rho},\ \bar{U} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U d\psi \tag{7}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_0}{A} - \frac{1}{L_0}\left(\frac{d\bar{U}}{d\rho} ctg\rho + \frac{d\bar{U}}{d\theta} ctg\theta\right) \approx \dot{\psi}_0 \tag{8}$$

Будем считать, что орбита спутника невозмущенная эллиптическая, и, используя (5), перейдем от независимой переменной t к новой независимой переменной ν. Введем функцию U_ν и ее среднее по ψ значение

$$U_\nu = \frac{P^2}{\sqrt{\mu P}\left(1 + e\cos\nu\right)^2} U,\ \bar{U} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\nu d\psi \tag{9}$$

Тогда уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{d\nu} = -\frac{1}{L_0 \sin\rho}\frac{d\bar{U}_\nu}{d\sigma},\ \frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{1}{L_0 \sin\rho}\frac{d\bar{U}_\nu}{d\rho} \tag{10}$$

Уравнение (10) описывает весьма медленные вековые и долгопериодические эффекты движения, а также периодические эффекты, обусловленные влиянием ν. Вековые и долгопериодические члены изменяются весьма медленно по сравнению со скоростью движения центра масс спутника по орбите. Для их выявления можно усреднить уравнение движения не только по ψ, но и по ν. Независимое усреднение по каждой фазовой переменной (ψ, ν) допустимо, если частоты этих переменных несоизмеримы, что мы будем предполагать. Такое двойное усреднение уравнений (4) сводится к усреднению по ν уравнений (10). Получим

$$\bar{U}_\nu = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P^2}{\sqrt{\mu P}\left(1 + e\cos\nu\right)^2} U d\psi d\nu \tag{11}$$

Согласно (9) и (11) получим усредненные по ψ и по ν уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\nu} &= \sin\rho\sin(\sigma-\nu)\cos(\sigma-\nu)\frac{N_0}{L_0}\left[-\alpha + \beta(1 + e\cos\nu)\right] \\ \frac{d\sigma}{d\nu} &= \cos\rho\cos^2(\sigma-\nu)\frac{N_0}{L_0}\left[-\alpha + \beta(1 + e\cos\nu)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $N_0 = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta_0$, $\alpha = \frac{a_{1c}R_0^2}{\sqrt{\mu P}}$, $\beta = \frac{3\sqrt{\mu}}{P^{3/2}}\left(A - C\right)$.

Исследование возмущенного движения сводится к исследованию уравнений (12) движения вектора **L**. Так как ν меняется быстро, а σ – медленно, то $\sigma - \nu$ меняется быстро и поэтому многократно проходит через экстремальные значения (в тех точках, где $\sigma - \nu$ имеет значения $\pm\pi n/2$, n = 0, 1, 2…).

Угол V между касательной к траектории и меридианом на единичной сфере определяется формулой

$$\text{tg}\ V = d\sigma \sin\rho\ /\ d\rho = \text{ctg}\ (\sigma - \nu)\cos\rho \tag{13}$$

По такой же формуле определялся угол при исследовании движения динамически симметричного спутника в гравитационном поле [1].

При $\sigma - \nu = 0$ и $\sigma - \nu = \pm\pi$ получаем tg $V = \infty$, и траектория касается параллели и имеет точку экстремума. При $\sigma - \nu = \pm \pi/2$ и $\sigma - \nu = \pm 3\pi/2$ получим tg $V = 0$, траектория имеет точку возврата. Из (13) следует, что траектория может проходить значения $\rho = 90°$ только под прямым углом к экватору единичной сферы, а также, что при $\rho_0 < 90°$ точки возврата являются точками минимума ρ, а точки касания – точками максимума ρ. При $\rho_0 > 90°$ заострения траектории ρ (σ) обращены к полюсам единичной сферы.

Амплитуда колебаний ρ тем меньше, чем ближе значение ρ к 0 или π. Так как при прохождении через $\rho = \pi/2$ направление движения меняется, то в окрестности $\rho = \pi/2$ траектории имеют петли. В окрестности $\rho = \pi/2$ скорость изменения σ очень мала, поэтому петли траектории имеют очень малую ширину и сдвигаются очень медленно.

Автор благодарит Д.Д. Лещенко за ценные советы и полезные обсуждения.

Литература.

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
2. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474-483.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ. 1975. 308 с.
4. Карымов А.А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. Вып 5. С. 923-930.
5. Поляхова Е.Н. Космический полёт с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука. 1986. 304 с.
6. Сидоренко В.В. О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып 6. С. 780-790.
7. Сазонов В.В. Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестник. 1994. Т.28, №2. С. 95-107.
8. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. №1. С. 14-21.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. №2. С. 3-12.

10. Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. №6. С. 17-26.
11. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев. Наук. думка, 1971. 440 с.

УДК 532.546

ВЛИЯНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СКВАЖИН НА ПОЛЕ ДАВЛЕНИЙ ВНУТРИ ПЛАСТА ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К СИСТЕМЕ СКВАЖИН С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ КОНТУРА ПИТАНИЯ И РАЗДЕЛА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПЛАСТА

М.А. Фролов
Орловский государственный институт экономики и торговли

В отличие от работ [1-8], ставится плоскопараллельная задача притока жидкости к системе совершенных скважин при упругом режиме фильтрации. Рассматриваются прямолинейные границы области питания и раздела сред разных проницаемостей. Исследуется влияние интерференции скважин на распределение поля давлений в пласте. Производится сопоставление со случаем стационарной фильтрации несжимаемой жидкости.

Рассмотрим нестационарную фильтрацию упругой капельной жидкости. Основным уравнением движения такой жидкости в упругой пористой среде является уравнение пьезопроводности Щелкачёва [2, 8]:

$$\chi \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1}$$

где p — давление, $\chi = \dfrac{kK}{m_0 \mu}$ — коэффициент пьезопроводности, k — коэффициент проницаемости среды, μ — вязкость жидкости, m_0 — пористость среды при начальном давлении p_0, $K = \dfrac{K_{ж}}{1 + K_{ж} / m_0 K_c}$ — приведённый модуль упругости жидкости в упругой пористой среде, $K_{ж}$ — модуль объёмной упругости жидкости, K_c — модуль упругости пористой среды.

При решении практических задач целесообразно использовать безразмерные величины. Введём безразмерные величины: давление, длину, время, коэффициент проницаемости среды, оператор Гамильтона: $p' = \dfrac{p}{p_0}$, $L' = \dfrac{L}{L_0}$, $t' = \dfrac{t}{t_0}$, $k' = \dfrac{k}{k_0}$, $\nabla' = L_0 \nabla$. Здесь p_0, L_0, t_0, k_0 — характерные значения соответствующих величин, их выбор определяется конкретным видом задачи. Безразмерный коэффициент пьезопроводности среды примет вид: $\chi' = \dfrac{\chi}{\chi_0}$, где $\chi_0 = \dfrac{k_0 K_0}{m_0 \mu}$, $K_0 = \dfrac{K_{ж}}{1 + K_{ж} / m_0 K_{0c}}$, K_{0c} — характерный модуль упругости пористой среды. Выразим величины, входящие в уравнение (1), через соответствующие им безразмерные величины: $p = p_0 p'$, $\nabla = \dfrac{\nabla'}{L_0}$, $t = t_0 t'$, $\chi = \chi_0 \chi'$. Подставив последние соотношения в (1) имеем:

$$\chi_0 \chi' \frac{p_0}{L_0^2} \nabla^2 p' = \frac{p_0}{t_0} \frac{\partial p'}{\partial t'}.$$

Полагая $\dfrac{L_0^2}{\chi_0 t_0} = 1$ и опуская штрихи, запишем уравнение (1) в безразмерных величинах:

$$\chi \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (1')$$

Таким образом, уравнение (1), записанное в безразмерных величинах, сохраняет свою форму.

Фундаментальное решение уравнения ($1'$), описывающее плоскопараллельное течение жидкости к точечному стоку единичной мощности $q = 1$ (мощность предполагается постоянной) в однородной среде, с коэффициентом пьезопроводности $\chi = 1$, имеет вид:

$$p = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t} \right), \qquad (2)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $\operatorname{Ei}\left(-\dfrac{r^2}{4t} \right)$ — функция интегрального экспоненциала, причём

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t} \right) = \lim_{t \to 0} \left(-\frac{4t}{r^2 e^{r^2/4t}} \right) = 0. \qquad (3)$$

Поставим задачу об определении функции давления $p(M, t)$ в любой точке потока M, в любой момент времени t, при наличии системы совершенных скважин, расположенных в некоторой области D с прямолинейным контуром питания L_n и прямолинейным контуром раздела сред разных пьезопроводностей L.

Пусть в области D расположено число n совершенных скважин. Работу скважин, обладающих дебитами[1] q_i, будем моделировать точечными

[1] Для эксплуатационных скважин дебиты положительны $(q_i > 0)$, нагнетательных – отрицательны $(q_i < 0)$.

стоками [1-7]. Полагаем, что координаты центра скважин $M_{0i} = (x_{0i}, y_{0i})$, а их контуры L_{ci} — окружности радиусов R_{ci} $i = 1, \dots, n$. В качестве контура L_n выберем прямую $y = 0$. Предположим, что контур L — прямая $x = 0$ делит область D на области D_1 и D_2. Область D_1 $(x > 0, y > 0)$ заполнена средой с коэффициентом пьезопроводности χ_1, а область D_2 $(x < 0, y > 0)$ — средой, коэффициент пьезопроводности которой χ_2. Будем считать, что при переходе через границу L коэффициент пьезопроводности изменяется скачком. Для определённости положим, что скачком изменяется лишь коэффициент проницаемости среды k, а величины $\mu, m_0, K_c, K_{ж}$ остаются постоянными во всей области D. Поэтому, в дальнейшем, будем говорить лишь о коэффициенте k.

Пусть в области D_1 расположено число n_1 скважин, а в области D_2 — число n_2 скважин ($n = n_1 + n_2$).

Начальные и граничные условия задачи согласно [2, 5, 8] следующие:

$$p(M, t) = 0, \ M \in D_1 \cup D_2 \cup L, \text{ при } t = 0, \tag{4}$$

$$p(M, t) = 0, \ M \in L_n, \ t \geq 0, \tag{5}$$

$$q_i = q_{0i}, \ i = 1, \dots, n, \ t > 0, \tag{6}$$

где q_{0i} $i = 1, \dots, n$ — заданные произвольные постоянные дебиты скважин.

На контуре L выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости [3, 5, 6]:

$$\begin{gathered} p_1(M, t) = p_2(M, t), \\ k_1 \frac{\partial p_1(M, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial p_2(M, t)}{\partial x}, \ M \in L. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, задача заключается в определении функции давления $p(M, t)$ в любой точке потока M, в момент времени $t > 0$, которая удовлетворяет уравнению ($1'$) и условиям (4) — (7).

Радиальное течение жидкости к точечному стоку мощности q в однородной безграничной среде с коэффициентом пьезопроводности $\chi = 1$ описывает функция вида:

$$p_0(M, t) = -\frac{q}{4\pi} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t} \right). \tag{8}$$

Наличие границы L вносит некоторое возмущение в характер течения жидкости. Предположим, что сток находится в области $x > 0$, которая заполнена средой с коэффициентом проницаемости k_1. Область $x < 0$ заполнена средой с коэффициентом проницаемости k_2. Тогда функции давления в этих областях можно представить в виде:

$$p_1(M,t) = p_0(M,t) + p_1^*(M,t),$$
$$p_2(M,t) = p_0(M,t) + p_2^*(M,t), \tag{9}$$

где $p_1^*(M,t)$ и $p_2^*(M,t)$ возмущения, вызванные наличием границы L. Поскольку функция $p_0(M,t)$ удовлетворяет уравнению ($1'$), то функции возмущения $p_1^*(M,t)$ и $p_2^*(M,t)$ также удовлетворяют этому уравнению. Условия (4) — (7) для функций $p_1^*(M,t)$ и $p_2^*(M,t)$ примут вид:

$$p_\nu^*(M,t) = 0,\ \nu = 1,2,\ M \in D_1 \cup D_2 \cup L,\ \text{при } t = 0, \tag{$4'$}$$

$$p_\nu^*(M,t) = -p_0(M,t),\ \nu = 1,2,\ M \in L_n,\ t \ge 0, \tag{$5'$}$$

$$p_1^*(M,t) = p_2^*(M,t),$$
$$k_1 \frac{\partial p_1^*(M,t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial p_2^*(M,t)}{\partial x},\ M \in L. \tag{$7'$}$$

В общем случае, если контур L_n отсутствует (находится в бесконечности), необходимо наложить дополнительное условие. Пусть N точка контура L, а r_{NM} — расстояние между точками N и $M \notin L$. Согласно [5] потребуем выполнения условия:

$$p_\nu^*(M,t) \to 0 \text{ при } r_{NM} \to \infty. \tag{10}$$

Условие (10) означает затухание возмущения на бесконечности, вызванного границей L.

Учитывая (8) и (9) имеем:

$$p_1 = -\frac{q}{4\pi}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right) + A\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4t}\right)\right]$$
$$p_2 = -\frac{q}{4\pi} B\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right), \tag{11}$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $\tilde{r} = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, A и B — постоянные. Удовлетворяя (11) условиям ($7'$), определим постоянные A и B. Имеем:

$$A = \lambda,\ B = 1 + \lambda,\ \text{где } \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Тогда решение (11) запишем:

$$p_1 = -\frac{q}{4\pi}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right) + \lambda\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4t}\right)\right]$$
$$p_2 = -\frac{q}{4\pi}(1+\lambda)\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right). \tag{12}$$

Пусть теперь имеется контур питания L_n: $y=0$. Применим к (12), согласно [3, 5, 6] фильтрационную теорему о прямой. Получим давления:

$$p_1' = \frac{q}{4\pi}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_*^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right) + \lambda\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_*^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4t}\right)\right]\right\}$$

$$p_2' = (1+\lambda)\frac{q}{4\pi}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_*^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\right\}, \tag{13}$$

где $r_* = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}$, $\tilde{r}_* = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}$.

Система (13) описывает течение жидкости к скважине, расположенной в области D_1 при наличии прямолинейных контуров L: $x=0$ и питания L_n: $y=0$. Если источник находится в области D_2, то, проведя рассуждения аналогичным образом, получим:

$$p_1'' = (1-\lambda)\frac{q}{4\pi}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_*^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4t}\right)\right\},$$

$$p_2'' = \frac{q}{4\pi}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_*^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4t}\right) + \lambda\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_*^2}{4t}\right)\right]\right\}. \tag{13'}$$

В общем случае, источники могут располагаться как в области D_1, так и в области D_2. Учитывая (13) и (13′), функции давления, описывающие течение жидкости к числу n_1 скважин расположенных в области D_1 и к числу n_2 скважин расположенных в области D_2, имеют вид:

$$P_1 = p_1' + p_1'' = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n_1} q_i\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4t}\right) + \lambda\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t}\right)\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=n_1+1}^{n} (1-\lambda) q_i\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t}\right)\right\},$$

$$P_2 = p_2' + p_2'' = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n_1} (1+\lambda) q_i\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4t}\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=n_1+1}^{n} q_i\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t}\right) + \lambda\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{*i}^2}{4t}\right)\right]\right\}, \tag{14}$$

где $r_i = \sqrt{(x-x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2}$, $\tilde{r}_i = \sqrt{(x+x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2}$, $r_{*i} = \sqrt{(x-x_{0i})^2 + (y+y_{0i})^2}$, $\tilde{r}_{*i} = \sqrt{(x+x_{0i})^2 + (y+y_{0i})^2}$ $i = 1, \ldots, n$.

Удовлетворим (14) условиям ($4'$), ($5'$), (6), (10). Видно, что на границе: $x = 0$ имеют место равенства $\tilde{r}_{*i} = \tilde{r}_i$, $r_i = r_{*i}$. Следовательно, условие ($5'$) выполняется автоматически. Как следует из (3), условия ($4'$) и (10) тоже выполняются. Удовлетворим (14) условиям (6), имеем:

$$P_1 = p_1' + p_1'' = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n_1} q_{0i}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4t}\right) + \lambda\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t}\right)\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=n_1+1}^{n} (1-\lambda) q_{0i}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t}\right)\right\},$$

$$P_2 = p_2' + p_2'' = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n_1} (1+\lambda) q_{0i}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4t}\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=n_1+1}^{n} q_{0i}\left\{\mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_{*i}^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{4t}\right) + \lambda\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{*i}^2}{4t}\right)\right]\right\}, \qquad (15)$$

Система (15) состоит из 2 уравнений и имеет 2 неизвестные величины: P_1 и P_2. Решая систему (15), определяем искомые функции.

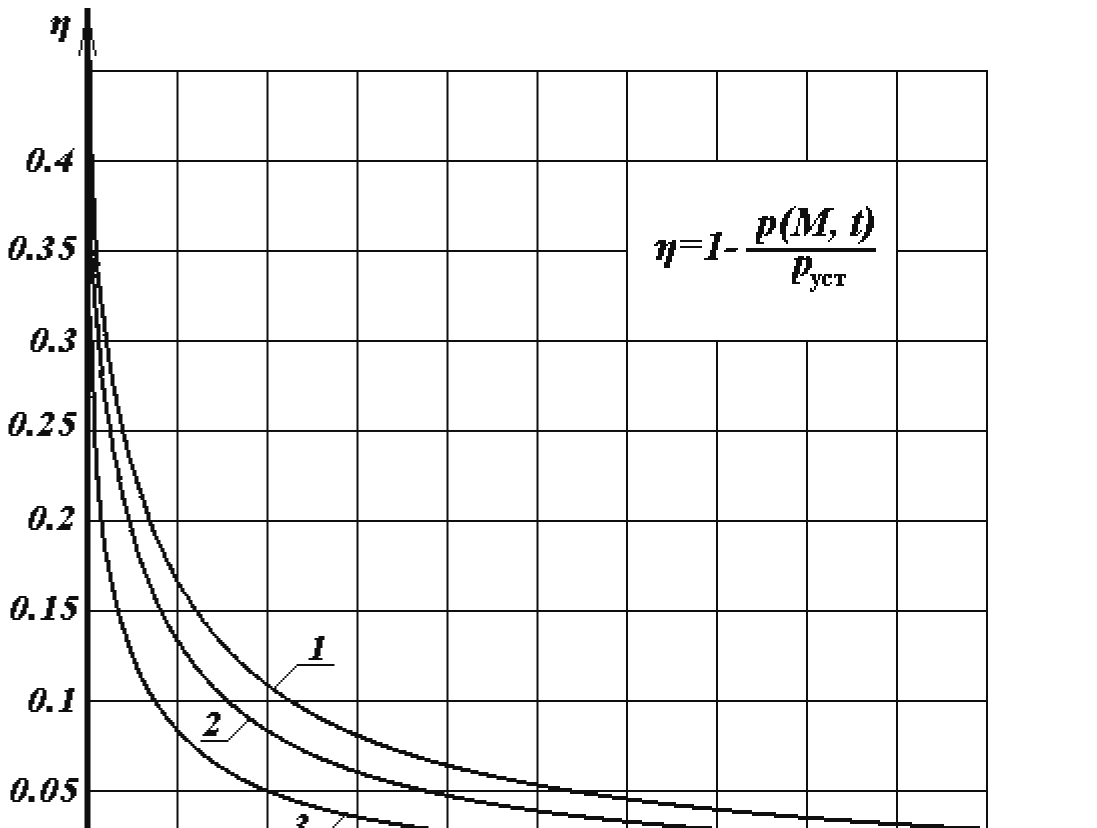


Рис. Зависимость давления на контуре скважины от времени

Кривые 1, 2 и 3 на рисунке показывают, как с течением времени изменятся давление на контуре скважины. Здесь $p(M,t)$ — давление в какой-либо точке контура скважины, $p_{уст}$ — давление в соответствующем случае установившейся фильтрации. Кривая 1 соответствует случаю, когда в грунте имеется три эксплуатационных скважины, кривая 2 — случаю двух эксплуатационных скважин, кривая 3 — случаю одиночной скважины. При расчёте принято: $R_{c1} = R_{c2} = R_{c3} = R_c = 0.001 l_0$, $x_{01} = l_0$, $y_{01} = l_0$, $x_{02} = 2l_0$, $y_{02} = l_0$, $x_{03} = 3l_0$, $y_{03} = l_0$, $\lambda = 1$, $q_{01} = q_{02} = q_{03} = q_0 = 1$, координаты точки M: $x = x_{01} + R_c$, $y = y_{01}$.

Как видим, в первом случае зависимость $\eta(t)$ выражена более слабо. С ростом числа эксплуатационных скважин зависимость $\eta(t)$ ослабевает.

Упругий режим течения сказывается лишь на первоначальном этапе. При $t \to \infty$, осуществляется переход к соответствующим случаям стационарного режима [1, 5, 6, 7]. В нашем случае, для кривой 1, уже при $t = 5.5$ различие в давлениях не превышает *5%*.

Проведённые исследования показывают, что формулы для стационарной фильтрации несжимаемой жидкости [1, 3-7], могут быть оценочными для упругого режима, вместо более сложных формул упругого режима. Рассмотренные задачи упругого режима фильтрации могут выступать в качестве тестовых, при разработке метода интегральных уравнений для уравнений параболического типа.

Литература

1. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Канд. дис. Орловский гос. университет, 2000, 153 с.
2. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидродинамика. Ижевск, АНО «Институт компьютерных исследований», 2003, 479 с.
3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
4. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел.: Изд-во ОГПИ, 1994. 148 с.
5. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дис. Орёл, Орловский гос. ун–т, 1998, 266 с.
6. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1967. 444 с.
7. Фролов М.А. Исследование двумерных граничных задач о дебитах системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Канд. дис. Орловский гос. Университет, 2001, 148 с.
8. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, М., 1963, 396 с.

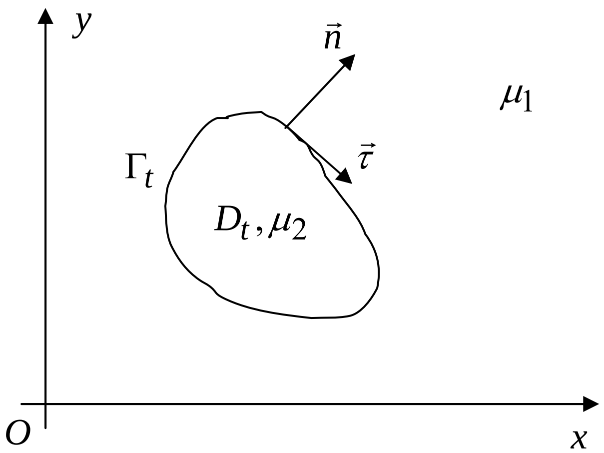
УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТИ К ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ СКВАЖИНЕ В ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

Д.Е. Шестерин
Орловский государственный университет

Исследуется задача о продвижении границы раздела жидкостей различной вязкости в однородном грунте к эксплуатационной скважине. Приводится численная схема решения, исследуется зависимость времени «прорыва» жидкости к скважине от соотношения вязкостей жидкостей.

Рассмотрим плоскопараллельную задачу об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в однородном изотропном грунте. Пусть в безграничной области D происходит фильтрация, обусловленная источниками и стоками течения. В области D имеется изменяющаяся с течением времени область D_t, ограниченная кривой Γ_t, в которой фильтруется жидкость с постоянной вязкостью μ_2. Вне области D_t движется жидкость с постоянной вязкостью μ_1. Полагаем, что при движении одна жидкость полностью вытесняет другую, а капиллярные силы пренебрежимо малы. В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_0 считается известным и задается параметрическим уравнением:



$$\text{При } t = 0 \ \ \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \ M \in \Gamma_0. \qquad (1)$$

Кроме того, считается известным поле скоростей $\upsilon_0(M)$, $M \in D$ в отсутствии границы Γ_t. Требуется найти положение границы Γ_t в любой момент времени $t > 0$.

Нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сведено в известной работе [3] к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M, N) dl_N = \vec{\upsilon}_0(M) \qquad (2)$$

при начальном условии (1), где $M \in \Gamma_t$, $\lambda_\mu = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$, $\vec{V}_B^*(M, N)$ – скорость в точке M, создаваемая нормированным вихрем, расположенным в точке

N, $\vec{\tau}_N$ - единичные вектор касательной к кривой Γ_t в точке N (вектор касательной $\vec{\tau}_N$ составляет правовинтовую систему с вектором нормали $\vec{n}_N$, направленной из области D_t), $\upsilon_0(M)$ - поле скоростей в отсутствии границы Γ_t.

Решим уравнение (2) численно с помощью метода дискретных особенностей. Для этого разобьем подвижную границу Γ_t в момент времени t_p на n_p частей. Тогда положение границы Γ_t в момент времени t_p задается множеством точек $\left\{x_i^p, y_i^p, i = 0..n_p\right\}$. В случае замкнутой границы Γ_t считаем что $x_0^p = x_{n_p}^p$, $y_0^p = y_{n_p}^p$. Отметим, что граница Γ_t разбивается таким образом, чтобы она обходилась по часовой стрелке. Начальное условие (1) примет вид:

$$\text{при } t = 0 \;\; \Gamma: \left\{x_i^0, y_i^0, i = 0..n_0\right\}. \qquad (3)$$

Запишем конечно-разностный аналог уравнения (2). Заменим производные по времени правыми разностями, производные по координатам центральными разностями, а интегралы по формуле прямоугольников. Так как в уравнении (2) интеграл по границе Γ_t понимается в смысле главного значения по Коши, то в сумме, аппроксимирующей эти интегралы, следует выкинуть точку, в которой записывается соответствующее уравнение. На $p+1$ шаге по времени Δt_{p+1} получим для кривой Γ_t систему $2n_p$ линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\frac{x_i^{p+1} - x_i^p}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x_j^{p+1} - x_j^p}{\Delta t_{p+1}} \tau_{x_j} + \frac{y_j^{p+1} - y_j^p}{\Delta t_p + 1} \tau_{y_j} \right) V_{Bx_{i,j}}^{*} \Delta l_j = \upsilon_{0x_i}$$

$$\frac{y_i^{p+1} - y_i^p}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x_j^{p+1} - x_j^p}{\Delta t_{p+1}} \tau_{x\,j} + \frac{y_j^{p+1} - y_j^p}{\Delta t_p + 1} \tau_{y_j} \right) V_{By_{i,j}}^{*} \Delta l_j = \upsilon_{0y_i} \qquad (4)$$

$$i = 1..n_p, \Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p.$$

группируя члены, содержащие неизвестные x_i^{p+1}, y_i^{p+1} в левой, а все остальные в правой части получим:

$$\frac{x_i^{p+1}}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x_j^{p+1}}{\Delta t_{p+1}} \tau_{x_j} + \frac{y_j^{p+1}}{\Delta t_{p+1}} \tau_{y_j} \right) V_{Bx_{i,j}}^{*} \Delta l_j =$$

$$= \upsilon_{0x_i} + \frac{x_i^p}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x_j^p}{\Delta t_{p+1}} \tau_{x_j} + \frac{y_j^p}{\Delta t_{p+1}} \tau_{y_j} \right) V^*_{Bx_{i,j}} \Delta l_j \quad i = 1..n_p$$

(5)

$$\frac{y_i^{p+1}}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x_j^{p+1}}{\Delta t_{p+1}} \tau_{x_j} + \frac{y_j^{p+1}}{\Delta t_{p+1}} \tau_{y_j} \right) V^*_{By_{i,j}} \Delta l_j =$$

$$= \upsilon_{0y_i} + \frac{y_i^p}{\Delta t_{p+1}} - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x_j^p}{\Delta t_{p+1}} \tau_{x_j} + \frac{y_j^p}{\Delta t_{p+1}} \tau_{y_j} \right) V^*_{By_{i,j}} \Delta l_j$$

$i = 1..n_p, \Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$.

Здесь

$$\tau_{x_j} = \frac{x_{j-1} + x_{j+1}}{2\Delta l_j}, \ \tau_{y_j} = \frac{y_{j-1} + y_{j+1}}{2\Delta l_j},$$

$$\Delta l_j = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(x_j - x_{j-1}\right)^2 + \left(y_j - y_{j-1}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{j+1} - x_j\right)^2 + \left(y_{j+1} - y_j\right)^2} \right),$$

$$V^*_{Bx_{i,j}} = \frac{1}{2\pi} \frac{y_i - y_j}{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2} \quad V^*_{By_{i,j}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_i - x_j}{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}.$$

Под $\upsilon_{0x_i}, \upsilon_{0y_i}$ понимаются значения невозмущенного поля скоростей $\vec{\upsilon}_0$ в i-той точке границы Γ_t. Для замкнутой кривой Γ_t считаем, что $x^p_{n_p+1} = x^p_1$, $y^p_{n_p+1} = y^p_1$. Решая полученную систему уравнений (5) методом Гаусса относительно неизвестных x_i^{p+1}, y_i^{p+1} $i = 1..n$ находим положение границы Γ_t в момент времени t_{p+1} по ее положению в момент времени t_p.

Рассмотрим эволюцию границы раздела жидкостей различной вязкости к нагнетательной скважине. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ область D_t представляет собой круг с центром в начале координат единичного радиуса. На оси Ox на расстоянии половины радиуса от начала координат расположена эксплуатационная скважина дебита $Q = 1$, будем моделировать ее точечным стоком. В процессе работы скважины в нее сначала будет поступать только жидкость вязкости μ_2 из области D_t, а через определенное время произойдет «прорыв» к скважине жидкости из внешней области вязкости μ_1. Зависимость времени «прорыва» жидкости к скважине от соотношения вязкостей жидкостей λ_μ приведена в таблице.

Таблица. Зависимость времени «прорыва» жидкости к скважине от λ_μ

λ_μ	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
t	0,434	0,457	0,482	0,509	0,538	0,570	0,605	0,643	0,686	0,734
$t/t_{\lambda_\mu=0}$	0,550	0,580	0,611	0,646	0,682	0,723	0,768	0,816	0,871	0,931
λ_μ	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9
t	0,788	0,851	0,926	1,010	1,100	1,210	1,330	1,460	1,611	
$t/t_{\lambda_\mu=0}$	1,009	1,090	1,175	1,281	1,396	1,536	1,688	1,853	2,043	

Расчет производился со следующими параметрами: шаг по времени $\Delta t = 0{,}001$, число точек разбиения границы $n = 100$.

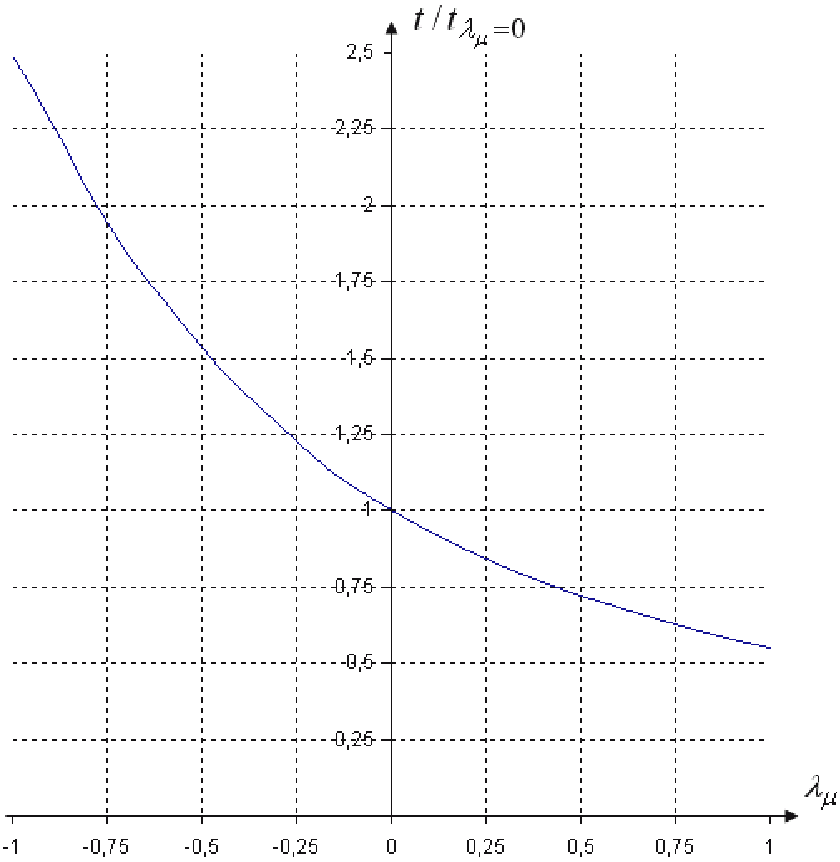


Рис. Зависимость относительного времени прорыва от соотношения вязкостей жидкостей

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
2. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел.: Изд-во ОГПИ, 1994, 148 с.
3. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование двумерного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое со степенным законом изменения его проводимости // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ – 2003». Орел, 2003, С. 53-67

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное издание

Т Р У Д Ы
Международных школ-семинаров
«Методы дискретных особенностей
в задачах математической физики»
Выпуск 3

Компьютерная верстка – Ю.С. Федяев

Подписано в печать 30.11.2004 г. Формат 60x84 1/6
Усл. печ. л. 5. Заказ № 415 от 30.11.2004 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО ПФ «Картуш»
302020, г. Орел, ул. Матросова, 5. Тел. 41-65-94