Орловский государственный университет

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Институт вычислительной математики РАН

Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского



Посвящается 75-летию Орловского государственного университета

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНЫХ ШКОЛ-СЕМИНАРОВ «МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Выпуск 4



Печатается по решению организационного комитета Международных школ-семинаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

Организационный комитет

профессор Гандель Ю.В. (Украина) профессор Лифанов И.К. (Россия) профессор Пивень В.Ф. (Россия) учёный секретарь оргкомитета доцент Аксюхин А.А. (Россия)

Редакционная коллегия

профессор Пивень В.Ф. – ответственный редактор профессор Гандель Ю.В. профессор Лифанов И.К.

Труды Международных школ-семинаров «**Методы дискретных** особенностей в задачах математической физики». Выпуск 4. Орёл. ОГУ. 2005. - 148 с.

В сборнике представлены статьи участников Международных школ-семинаров молодых ученых России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школсеминаров. Школы-семинары «МДОЗМФ» проводятся ежегодно с 2000 года.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем теории фильтрации, аэро- и гидродинамики, теплопроводности, электродинамики и других областей механики и физики, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, численных методов и других методов математической физики.

Компьютерная вёрстка: Аксюхин А.А.

Сборник трудов Международных школ-семинаров «МДОЗМФ» издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-96433).

- © Оргкомитет школ-семинаров «МДОЗМФ», 2005 г.
- © Авторы статей, 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие	дисловие5		
1.	Аксюхин А.А.	Математическое моделирование двумерной задачи о дебите скважины в кусочно-неоднородном слое с несколькими границами сопряжения		
2.	Апаринов А.А.	Методические вопросы вычисления точек отрыва потока идеальной жидкости с гладкой поверхности		
3.	Богомолов Д.В.	Методика построения разгонного вихря Прандтля17		
4.	Гахов А.В.	Экспериментальное определение параметров достоверного моделирования дифракции на предфракталах методом дискретных особенностей23		
5.	Голубев Г.В.	К задаче об учете дискретных особенностей логарифмического типа при фильтрации в трещиновато-пористой среде		
6.	Гуляев В.В., Икрянников Е.Д., Смелтер Ю.В.	Применение метода дискретных особенностей при формировании облика авиационных средств поражения		
7.	Духопельни- ков С.В.	Математическая модель излучения цилиндрической волны из продольных щелей в прямом круговом цилиндре		
8.	Духопельни- ков С.В.	Математическая модель дифракции плоской волны на продольных щелях в волноводе кругового сечения		
9.	Желанников А.И., Еременко С.М., Некраха С.И.	Методика и результаты расчёта аэродинамических характеристик самолёта с учётом влияния вихрей от рельефа местности. 56		
10.	Зайцев А.А., Фомченков В.В.	Применение теории групп преобразований к построению функции Грина двумерной задачи Дирихле62		
11.	Квасов А.А.	Решение системы интегрального и дифференциального уравнений на окружности для нестационарной задачи теории фильтрации		
12.	Марков О.И.	Элементарная теория составной ветви термоэлемента		
13.	Мищенко В.О.	Программное обеспечение МДО: роль математических моделей надёжности и трудоёмкости73		

14.	Московских А.С.	Изооилие Пар Лакса по Калоджеро для одномерного нелинейного эволюционного уравнения81
15.	Никольский Д.Н., Деткова Ю.В.	Плоскопараллельная задача о нахождении наивыгоднейшего расположения системы эксплуатационных скважин, работающих в однородном безграничном грунте
16.	Никольский Д.Н., Никольская Т.А.	Исследование осесимметричной задачи о работе несовершенной скважины в однородном грунте с подвижным контуром нефтеносности
17.	Пивень В.Ф.	Задача эволюции границы раздела жидкостей в неоднородном слое для комплексной скорости93
18.	Плиева Л.Ю.	Об одном методе решения уравнения Липпмана- Швингера
19.	Рачинская А.Л.	Эволюция вращений спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления
20.	Севостьяно- ва Н.В., Шпилевой А.Я.	Моделирование фильтрационных течений жидкости в области с границей в виде равностороннего треугольника
21.	Снижко Н.В.	О сходимости в обобщённых пространствах Гёльдера двух квадратурных формул
22.	Ставцев С.Л.	Некоторые численные решения гиперсингулярных интегральных уравнений в задачах акустики120
23.	Ставцев С.Л.	Вычисление некоторых типов гиперсингулярных интегралов с весовой функцией
24.	Федяев Ю.С.	Математическое моделирование непроницаемой границы при эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в неоднородных слоях грунта130
25.	Фролов М.А.	Исследование зависимости дебита скважины от формы контура питания при нестационарной фильтрации упругой жидкости
26	Шестерин Д.Е.	Математическое моделирование продвижения границы «разноцветных» жидкостей в кусочно-анизотропном грунте
	Авторский указат	ель148

ПРЕДИСЛОВИЕ

проводить базе уже доброй традицией на Орловского университета Международные школы-семинары молодых государственного учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Первое заседание школы состоялось в декабре 2000 года. С тех пор почти ежегодно проходит работа этой школы. На заседаниях школы-семинара выступили с содержательными обзорными лекциями академик В.В. Воеводин, доктора наук, профессора А.И. Желанников, И.К. Лифанов, В.Ф. Пивень, Е.Е. Тыртышников (Россия), Ю.В. Гандель, доцент В.О. Мищенко (Украина). На этих лекциях изложены фундаментальные и значимые для практики новые проблемы гидро- аэродинамики, теории фильтрации, электродинамики, новые аналитические и численные (на основе метода дискретных особенностей) методы решения задач математической физики.

Слушатели школы – молодые преподаватели, аспиранты и студенты Орловского и Харьковского университетов, других вузов России и Украины. Ряд молодых преподавателей и аспирантов выступили с докладами, в которых ими были представлены оригинальные исследования. Состоялись дискуссии по этим докладам. Такие школы полезны пытливым умам молодёжи, вступающих в неизведанный мир науки, которые решили посвятить свою деятельность познанию нераскрытых тайн природы. Выпускники физико-математического факультета госуниверситета, активные участники школы А.А. Квасов, Д.Н. Никольский, С.Л. Ставцев, Ю.С. Федяев, М.А. Фролов В 2000-2005 годах кандидатские диссертации физикозащитили ПО математическим наукам.

По тогам работы школы изданы три выпуска научных трудов. Четвёртый выпуск трудов публикуется в настоящем сборнике и посвящается предстоящему 75-летию Орловского государственного университета, которое будет отмечаться в следующем году. Тематика представленных в сборнике статей охватывает спектр проблем гидро- аэродинамики, теории фильтрации, электродинамики, аналитическим и численным методам решения граничных задач с широким применением методов дискретных особенностей. Авторы статей – опытные и молодые преподаватели-исследователи, аспиранты из разных вузов России и Украины. Статьи публикуются, как правило, в авторской редакции. В ряд статей внесены по решению редколлегии небольшие правки редакционного характера, направленные на улучшение стиля изложения материала и его оформления.

Этот выпуск трудов издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-96433). Организационный комитет Международных школ-семинаров и редакционная коллегия сборника трудов приносит глубокую благодарность ректору Орловского государственного университета Ф.С. Авдееву за финансовую помощь в проведении школ-семинаров и издании сборников трудов.

Работа Международной школы-семинара «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» будет продолжена. Очередное пятое заседание школы намечено на февраль 2006 года в Орловском госуниверситете.

Ответственный редактор Ноябрь, 2005 года. В.Ф. Пивень

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ГРАНИЦАМИ СОПРЯЖЕНИЯ¹

А.А. Аксюхин

Россия, Орловский государственный университет, e-mail: aksjuhin@au.ru

Исследуется двумерная граничная задача о дебите совершенной эксплуатационной скважины, работающей в степенном слое с прямолинейным контуром питания, проводимость которого меняется по степенному закону с постоянными скачками на нескольких замкнутых границах сопряжения. Задача сводится к системе интегральных уравнений и интегрального соотношения, которые совместно решаются численно методом дискретных особенностей. Исследуется влияние скачков проводимостей слоя на дебит скважины.

1. Рассмотрим двумерную стационарную напорную фильтрацию жидкости к совершенной эксплуатационной скважине в неоднородном слое грунта. Пусть область фильтрации *D* представляет собой тонкий слой толщины H, расположенный на плоскости, где выбраны декартовы координаты x, y. Пусть в слое имеется m-1 замкнутых гладких (или кусочно-гладких) границ $\sigma_{\eta},\ \eta=1,2,...,\eta^*,...,m-1$, которые делят область Dфильтрации жидкости на части D_{ν} , проводимости $P_{\nu}(M) = K_{\nu}(M)H_{\nu}(M)$, $\nu = 1,2,...,m$ (здесь $H_{\nu}(M)$ – толщина слоя, $K_{\nu}(M)$ – его проницаемость). Проводимости моделируются положительными функциями координат точки M(x, y) и имеют непрерывные первые производные по x и y в соответствующих областях. Здесь и далее обозначим за η номер границы, а за ν – номер области. Будем считать, что границы σ_n не касаются и не пересекают друг друга, контур питания σ_Π и сингулярную линию σ_0 . Движение жидкости к скважине в области D_{ν} , ν = 1,2,...,m будем характеризовать скоростью течения жидкости $\vec{V}_{\nu}(M)$ и квазипотенциалом скорости $\phi_{\nu}(M)$, которые удовлетворяют закону Дарси и уравнению неразрывности, записанными в безразмерной форме [1]:

$$\vec{V}_{\nu}(M) = K_{\nu}(M) \nabla \varphi_{\nu}(M), \text{ div } \vec{V}_{\nu}(M) = 0, M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2, ..., m.$$
 (1.1)

Для двумерной фильтрации, в случае тонкого слоя с проводимостью $P_{\nu}(M) = k_{\nu} P(M)$, где $k_{\nu} = \mathrm{const}_{\nu}$, из формул (1.1) следуют уравнения, которые в декартовых координатах x,y, выбранных на подошве слоя, имеют вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P(M) \frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial y} \right) = 0, \quad M \in D', \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433)

где
$$D' = \bigcup_{v=1}^m D_v \setminus \left(D_c \cup \sigma_\Pi \cup \sigma_0 \cup \sigma_c \bigcup_{\eta=1}^{m-1} \sigma_\eta \right)$$
, где D_c — область, ограниченная

контуром скважины σ_c , σ_Π – контур питания, σ_0 – сингулярная линия, σ_η ($\eta=1,2,...,m-1$) – границы сопряжения слоёв, условия на которых для квазипотенциалов скорости задаются ниже.

Условия сопряжения на каждой из границ σ_n , $\eta = 1, 2, ..., m-1$:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_V^-(M), \quad k_1 \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+ = k_V \left(\frac{\partial \varphi_V(M)}{\partial n_M}\right)^-, \quad M \in \sigma_{\eta},$$

$$v = \eta + 1, \quad \eta = 1, 2, \dots, m - 1.$$

$$(1.3)$$

На *сингулярной границе* σ_0 нормальная составляющая скорости жидкости в неоднородном слое равна нулю, либо давление постоянно:

$$K_{\nu}(M)\frac{\partial \varphi_{\nu}(M)}{\partial n_{M}} = 0$$
 или $\varphi_{\nu}(M) = 0$, $\nu = 1, 2, ..., m$, $M \in \sigma_{0}$. (1.4)

На контуре питания σ_{Π} , ограничивающим только область D_1 задаётся давление, характеризуемое непрерывной функцией $\alpha(M)$:

$$k_1 \varphi_1(M) = \alpha(M), \quad M \in \sigma_{\Pi}, \quad \sigma_{\Pi} \in D_1.$$
 (1.5)

Давление на контуре скважины σ_c , в силу малости его радиуса R_c , считается постоянным и задаётся в его произвольной точке M_C :

 $k_{\nu} \varphi_{\nu} \big(M_C \big) = C \;, \;\; M_C \in \sigma_C \;, \;\; \nu = 1$ или 2,..., или $m \;, \;\; C = \mathrm{const} \;. \; (1.6)$ Центр окружности σ_C расположен в точке $M_0 \big(x_0 \,, y_0 \big) .$

Для нахождения дебита скважины искомые квазипотенциалы, следуя [1], запишем в виде:

$$\varphi_{\nu}(M) = \frac{\varphi_0(M) + \Phi_{\nu}(M)}{k_{\nu}}, M \in D', \nu = 1, 2, ..., m,$$
(1.7)

где квазипотенциал $\varphi_0(M)$ задаёт течение в области D при отсутствии границ σ_η (η = 1,2,...,m – 1) и σ_Π . Функция $\varphi_0(M)$ имеет особенности в точках M_i^* , i = 0,1,2,..., μ , учитывает возможную границу σ_0 , то есть, удовлетворяет условию (1.4), а для канонической формы границы σ_Π - и условию (1.5). Функция $\varphi_0(M)$ содержит в виде множителя постоянную q, которая представляет собой искомый приведённый ∂ ебит q скважины — расход жидкости за единицу времени через фильтр скважины, отнесённый к длине фильтра и к коэффициенту проницаемости среды в точке забоя скважины. Функции $\Phi_\nu(M)$, есть *квазипотенциалы возмущений*, вызванные наличием границ σ_η (η = 1,2,...,m – 1) и σ_Π , характеризующие течения в областях D_ν (ν = 1,2,...,m), не имеющие в них особых точек и удовлетворяющие уравнению (1.2).

2. Квазипотенциалы возмущений $\Phi_{\nu}(M)$, $\nu=1,2,...,m$, будем искать в виде квазипотенциалов двойного слоя, распределённых с плотностями g_{η} по границам σ_{η} , $\eta=1,2,...,m-1$, следующей формы [1]:

$$\Phi_{V}(M) = \sum_{\eta=1}^{m-1} \Phi_{V}^{(\eta)}(M) = \sum_{\eta=1}^{m-1} \int_{\sigma_{\eta}} g_{\eta}(N_{\eta}) P(N_{\eta}) \frac{\partial G(M, N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} d\sigma_{\eta}, \qquad (2.1)$$

$$N_{\eta} \in \sigma_{\eta}, \ M \in D_{V}, \ V = 1, 2, ..., m, \ \eta = 1, 2, ..., m-1,$$

где $G(M,N_{\eta})$ — комбинации, составленные из фундаментальных решений уравнений (1.2), удовлетворяющие этим уравнениям и условиям (1.4), (1.5). В формуле (2.1) орты положительных нормалей $\vec{n}_{N_{\eta}}$ направлены во внешнюю к границам σ_{η} ($\eta=1,2,...,m-1$) область D_1 .

На границах σ_{η} , $\eta = 1, 2, ..., m-1$ квазипотенциалы (2.1) принимают вид:

$$(\Phi_1(M))^+ = \frac{g_{\eta^*}(M)}{2} + \sum_{\eta=1}^{m-1} \int_{\sigma_\eta} g_{\eta}(N_{\eta}) P(N_{\eta}) \frac{\partial G(M, N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} d\sigma_{\eta}, \qquad (2.2)$$

$$N_{\eta} \in \sigma_{\eta}, M \in \sigma_{\eta^*}.$$

$$(\Phi_{V}(M))^{-} = -\frac{g_{\eta^{*}}(M)}{2} + \sum_{\eta=1}^{m-1} \int_{\sigma_{\eta}} g_{\eta}(N_{\eta}) P(N_{\eta}) \frac{\partial G(M, N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} d\sigma_{\eta}, \qquad (2.3)$$

$$N_{\eta} \in \sigma_{\eta}$$
, $M \in \sigma_{\eta^*}$, $v = 2,3,...,m$.

Здесь η^* — номер той границы сопряжения, к которой в пределе приближается точка M.

Согласно [1], в случае неограниченной области D_1 , на квазипотенциал $\Phi_1(M)$ накладывается условие затухания в бесконечности, которое автоматически выполняется благодаря свойствам потенциала двойного слоя.

После подстановки функций (2.1)–(2.3) в граничные условия (1.3)–(1.6) замечаем, что второе из условий (1.3), а также одно из условий (1.4) и (1.5) обращаются в верные тождества благодаря свойствам функций $G(M,N_\eta)$ и $\varphi_0(M)$. Получим систему интегральных уравнений и интегральное соотношение:

$$\begin{cases} g_{\eta^*}(M) - 2\lambda_{\eta^*} \sum_{\eta=1}^{m-1} \int_{\sigma_{\eta}} g_{\eta}(N_{\eta}) P(N_{\eta}) \frac{\partial G(M, N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} d\sigma_{\eta} = 2\lambda_{\eta^*} \varphi_0(M), \\ M \in \sigma_{\eta^*}, \ \lambda_{\eta^*} = \frac{k_1 - k_{\eta+1}}{k_1 + k_{\eta+1}}, \ \eta = 1, 2, ..., m-1. \end{cases}$$

$$\sum_{\eta=1}^{m-1} \int_{\sigma_{\eta}} g_{\eta}(N_{\eta}) P(N_{\eta}) \frac{\partial G(M_C, N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} d\sigma_{\eta} + \varphi_0(M_C) = C, \ M_C \in \sigma_C.$$

$$(2.4)$$

Совместное решение системы т интегральных уравнений и

интегрального соотношения (2.4) позволяет определить плотности $g_{\eta}(N_{\eta})$, $\eta=1,2,...,m-1$ и дебит скважины q.

Для вычисления скорости течения в точке $M \in D_{\nu}$, $\nu = 1, 2, ..., m$ воспользуемся первой из формул (1.1), которая примет вид:

$$\vec{V}_{\nu}(M) = \nabla_{M} \varphi_{0}(M) + \sum_{\eta=1}^{m-1} \int_{\sigma_{\eta}} g_{\eta}(N_{\eta}) P(N_{\eta}) \nabla_{M} \left[\frac{\partial G(M, N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} \right] d\sigma_{\eta}, \qquad (2.5)$$

$$M \in D_{\nu}, \ \nu = 1, 2, ..., m.$$

3. Систему (2.4) решим численно, используя метод дискретных особенностей [2]. Для этого сначала кривые σ_{η} , $\eta=1,2,...,m-1$, а затем и уравнения системы, запишем в параметрическом виде. Каждую из границ σ_{η} разобьём равномерно по параметру t_{η} с шагом h_{η} на n_{η} точек. В системе (2.4) заменим интегралы суммами по квадратурным формулам прямоугольников и выразим $d\sigma_{\eta}$ через h_{η} . Получим систему $1+\sum_{\eta=1}^{m-1}n_{\eta}$ алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}
g_{\eta*}(t_{\eta j}) - 2\lambda_{\eta*} \sum_{\eta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n_{\eta}} g_{\eta}(t_{\eta i}) K(t_{\eta j}, t_{\eta i}) h_{\eta} = 2\lambda_{\eta*} \varphi_{0}(t_{\eta j}), \\
j = 1..., n_{\eta}, \ \lambda_{\eta*} = \frac{k_{1} - k_{\eta+1}}{k_{1} + k_{\eta+1}}, \ \eta = 1, 2, ..., m-1. \\
\sum_{\eta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n_{\eta}} g_{\eta}(t_{\eta i}) K(M_{C}, t_{\eta i}) h_{\eta} + \varphi_{0}(M_{C}) = C, \ M \in \sigma_{C},
\end{cases}$$
(3.1)

где для краткости обозначено: $P(N_{\eta}) \frac{\partial G(M,N_{\eta})}{\partial n_{N_{\eta}}} d\sigma_{\eta} \approx K(t_{\eta j},t_{\eta i}) h_{\eta}$.

Решение системы (3.1) позволяет определить дебит q и m-1 функций g_{η} , $\eta=1,2,...,m-1$, заданных таблично, по n_{η} точек в каждой.

Формула расчёта скорости течения (2.5) примет вид:

$$\vec{V}_{v}(M) = \nabla_{M} \varphi_{0}(M) + \sum_{\eta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n_{\eta}} g_{\eta}(t_{\eta i}) \nabla_{M} K(M, t_{\eta i}) h_{\eta}, M \in D_{v}, v = 1, 2, ..., m. (3.2)$$

4. В качестве примера решения двумерной задачи о дебите скважины, работающей в неоднородном слое с несколькими границами сопряжения, рассмотрим течение к скважине в слое со степенным законом изменения проводимости $P_{\nu}(M) = k_{\nu} P(M) = k_{\nu} y_M^s$, где s > 0, $k_{\nu} = \mathrm{const}_{\nu}$, $\nu = 1,2,...,m$, и прямолинейным контуром питания с уравнением x = 0, на котором $\alpha(M) \equiv 0$. В таком слое линия y = 0 является сингулярной границей, и на ней выполняется условие непротекания (см. первое из условий (1.4)).

Для учёта прямолинейной границы σ_{Π} , функцию $\varphi_0(M)$, согласно [1], запишем в виде:

$$\varphi_0(M) = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{y_0}{y_M} \right)^{\frac{s}{2}} \left[Q_{\frac{s}{2}-1} \left(1 + \frac{r_{MM_0}^2}{2y_M y_0} \right) - Q_{\frac{s}{2}-1} \left(1 + \frac{\widetilde{r}_{MM_0}^2}{2y_M y_0} \right) \right], \tag{4.1}$$

где
$$r_{MM_0}^2 = (x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2$$
, $\tilde{r}_{MM_0}^2 = (x_M + x_0)^2 + (y_M - y_0)^2$.

Фундаментальные решения основного уравнения в каждой из областей D_{ν} , $\nu=1,2,...,m$, запишутся в виде:

$$G(M,N) = \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}\left(1 + \frac{r_{MN}^2}{2y_M y_N}\right) - Q_{\frac{s}{2}-1}\left(1 + \frac{\widetilde{r}_{MN}^2}{2y_M y_N}\right)}{2\pi(y_M y_N)^{\frac{s}{2}}},$$
(4.2)

где $r_{MN}^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$, $\widetilde{r}_{MN}^2 = (x_M + x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$. В формулах (4.1)-(4.2) $Q_{s/2-1}$ — есть функция Лежандра второго рода степени s/2-1 нулевого порядка.

Пусть границами сопряжения являются, например, эллипсы с полуосями a_{η} , b_{η} , центры которых расположены в точках $M_{\eta}(x_{\eta}, y_{\eta})$. Параметром t_{η} для каждого эллипса может выступать угол θ_{η} полярной системы координат, связанной с центром эллипса. Тогда параметрическое задание кривых σ_{η} имеет вид: $x = x_{\eta} + a_{\eta} \cos(\theta_{\eta})$, $y = y_{\eta} + b_{\eta} \sin(\theta_{\eta})$, $\eta = 1, 2, ..., m-1$.

На рис. 1 и рис. 2 приведены картины поля скоростей течения к скважине, работающей слое степени s=2 при различных значениях λ_1 и λ_2 . Скорости течений были рассчитаны по формулам (3.2). Границами сопряжения здесь являются два эллипса с полуосями a_1 =0.75d, b_1 =0.4d, a_2 =d=1, b_2 =0.5d, центры которых расположены в точках $M_1(d,2d)$ и $M_2(2.5d,0.8d)$. За единицу измерения длины d выбрана большая полуось второго эллипса. При расчетах положено R_C =10 ^{-4}d , C =1. Из рис. 2 видно, что первый эллипс близок к каверне, а второй – практически непроницаем.

Зависимость найденного из системы (3.1) дебита скважины q от величины скачков проводимости λ_1 и λ_2 представлена на рис. 3. Здесь приводится, выраженное в процентах, отношение дебита q при $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$ к дебиту q_0 скважины, вычисленному при отсутствии границ σ_1 и σ_2 (то есть при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Причём, прерывистые линии на рис. 3 соответствует зависимости $q(\lambda_1)/q_0$ при фиксированном значении $\lambda_2 = \pm 0.95$, а сплошные - зависимости $q(\lambda_2)/q_0$ при фиксированном $\lambda_1 = \pm 0.95$. Такой выбор параметров λ_1 и λ_2 позволяет оценить влияние каждой границы сопряжения и скачка проницаемостей на дебит скважины q.

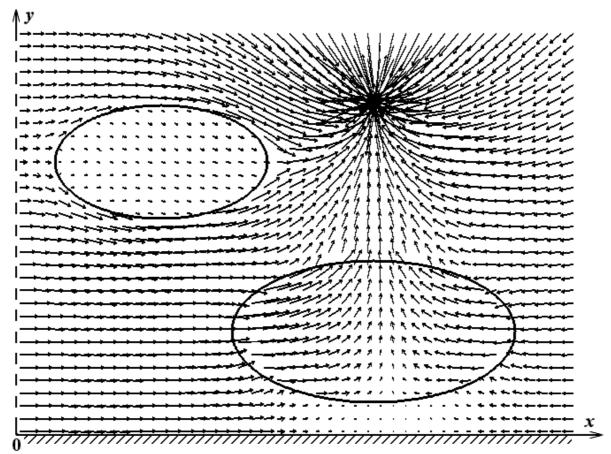


Рис. 1. Поле скоростей течения при $\,\lambda_1=0.75\,,\,\,\lambda_2=-0.5\,.\,$

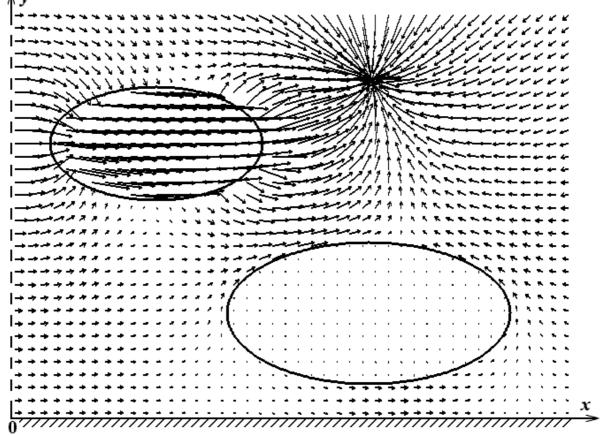


Рис. 2. Поле скоростей течения при $\,\lambda_1 = -0.95\,,\,\,\lambda_2 = 0.95\,.\,$

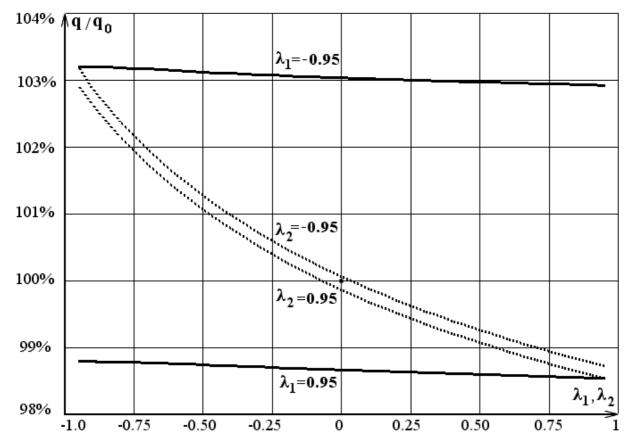


Рис. 3. Зависимость относительного дебита от скачка проводимостей.

Из рис. 3. видно, что дебит скважины:

- практически не меняется с изменением только лишь проницаемости λ_2 ;
- на несколько процентов изменяется с λ_1 при фиксированном λ_2 ;
- достигает минимального значения, когда оба эллипса непроницаемы;
- максимален при наличии двух эллиптических каверн.

Количество границ σ_{η} и их форма, положение скважины и число скважин, законы проводимостей в областях D_{ν} и величины скачков проводимостей на них могут сильно отличаться от приведённых в этой работе, но порядок решения задачи при этом не изменится.

Построенная математическая модель имеет общетеоретическую значимость, так как позволяет решить граничные задачи отыскания мощностей источников и характеристик процессов, протекающих в неоднородных слоях с несколькими границами сопряжения и описываемых уравнениями того же вида, что и в решенной задаче.

Литература

- 1. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Кандидатская диссертация. Орел. Орловский госуниверситет. 2000. 153 с.
- 2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: TOO «Янус». 1995. 520 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОЧЕК ОТРЫВА ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. Апаринов

Россия, Москва, Институт вычислительной математики РАН e-mail: aparinov@provokator.ru

В статье проводится обзор подходов к численному моделированию отрыва потока идеальной жидкости с гладкой поверхности и формулируются некоторые перспективные направления развития исследований в этой области.

Задача отрыва потока с гладкой поверхности сформулирована очень давно и существует достаточно большое число методов расчета отрыва потока, основанных на анализе пограничного слоя [1,5,6]. Это связано с тем, что многие исследователи предполагают, что отрыв потока напрямую связан с вязкостью среды и свои усилия концентрируют на формулировке критериев, реализующих такую гипотезу. Сформулированные критерии [1] являются вполне работоспособными, однако одни работают только для двумерных случаев, другие сопряжены с огромными вычислительными затратами.

Очевидно, что в рамках обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью, критерии, основанные на анализе пограничного слоя не применимы. Для идеальной несжимаемой жидкости в обычной постановке задачи обтекания тела отрыв потока назначается с линий нарушения гладкости поверхности тела [2]. Гипотеза Чаплыгина-Жуковского объясняет справедливость возможности такого подхода к назначению линий отрыва. Есть также несколько примеров расчетов, когда место отрыва потока назначалось и с гладкой поверхности [7].

Однако существует большой класс задач, для которых такая практика или неприменима вообще или не позволяет правильно смоделировать реальный физический процесс. Долгое время установление мест отрыва потока с гладкой поверхности проводилось только лишь экспериментальным путем.

Работы по формулировке критерия отрыва потока идеальной жидкости с гладкой поверхности начались еще в 70-е годы. Первые интересные результаты в этом направлении были опубликованы в работе [4], в которой предложено, что отрыв вихревой пелены в рамках модели идеальной жид-

кости происходит в зоне поверхности тела, где соотношение $\frac{\delta v_n}{\delta n} > 0$, v_n

- нормальная к вихревой пелене компонента скорости, n - нормаль к поверхности тела.

Однако, предложенный критерий оказался неуниверсальным и давал приемлемые результаты соответствующие экспериментам с числами Рейнольдса порядка 10^4 . Исследования в этом направлении были продолжены. В.А. Апариновым был предложен подход, который опирается на идею поиска минимума давления на поверхности тела. Подход дал хороший ре-

зультат при обтекании кругового цилиндра, которое соответствует числам Рейнольдса порядка 10^7 , однако не работал при обтекании телесного профиля крыла. Работа так и не была опубликована, но исследования в этом направлении продолжились.

В результате М.Л. Дмитриев сформулировал критерий отрыва потока с гладкой поверхности идеальной жидкости [3], основанный на поиске минимального изменения кинетической энергии потока. Он постулировал, что отрыв потока идеальной жидкости с гладкой поверхности происходит в той точке, в которой изменение кинетической энергии минимально. Далее для теоретической формулировки критерия отрыва в [3] предлагается проанализировать изменение величины кинетической энергии в единицу времени на единицу поверхности. В [3] критерий сначала формулируется для случая плоскопараллельного обтекания. Используя известную формулу для затрат кинетической энергии в единицу времени для потока идеальной жидкости

$$\overset{\bullet}{T} = \frac{dT}{dt} = \oint_{\sigma_T} (\vec{V}_*, \vec{n}) p d\sigma,$$

 $(\vec{V_*}$ — переносная скорость тела в земной системе координат, \vec{n} — нормаль к поверхности тела в точке расчета, σ — поверхность тела, p — давление) и, моделируя процесс возможного мгновенного схода отрезка вихревой пелены в данной точке поверхности, М.Л. Дмитриев получает формулу, выражающую изменение кинетической энергии

$$-\frac{1}{\rho}\delta T = \delta \oint \frac{V_o^2 - V_*^2}{2} \xi d\sigma + \frac{d}{dt} \oint \delta \Phi \xi d\sigma - \oint \delta \Phi \xi d\sigma,$$

где V_o^2 — скорость потока относительно системы координат связанной с телом, ρ — плотность, $\xi = \left(\vec{V}_*, \vec{n}\right)$, δ — изменение, связанное с появлением свободного вихревого отрезка бесконечно малой длины, Φ — потенциал скорости.

Откуда, оценивая каждое слагаемое отдельно, в [3] получается следующее выражение изменения кинетической энергии:

$$\frac{\delta T}{\delta \sigma} = \frac{\rho}{2} V_o^2 \left(\vec{V}_*, \vec{n} \right).$$

Точка поверхности, в которой достигается минимум этой величины, и является точкой отрыва вихревой пелены — это и является критерием отрыва потока идеальной жидкости с гладкой поверхности.

Следует отметить, что принципиальным допущением рассматриваемого в [3] процесса является мгновенность схода отрезка вихревой пелены. Поток как бы тестируется на возможность схода отрезка пелены в данной точке. При этом получается, что в один момент времени рассматриваются два возможных состояния вихревой поверхности — без сошедшего вихревого отрезка и с ним.

Автор предполагает, что такое допущение может давать некоторые искажения результата, если функция переносной скорости имеет резкие изменения, скачки. Предположение основано на том, что при анализе первого слагаемого в выражении для изменения кинетической энергии используется формула:

$$\begin{split} &\delta \oint \frac{V_o^2 - V_*^2}{2} \xi d\sigma = \oint \frac{(V_o + \delta V_o)^2 - V_o^2}{2} \xi d\sigma = \\ &= \oint \frac{2V_o \delta V_o + (\delta V_o)^2}{2} \xi d\sigma = -\frac{V_o^2}{2} \xi_A \delta\sigma + o\Big((\delta\sigma)^2\Big) \end{split}$$

В ней используются состояния до и после схода отрезка вихревой пелены, при этом, очевидно, полагается, что $\delta V_* = 0$. Данное предположение требует дополнительной проверки.

Предложенный критерий отрыва потока с гладкой поверхности распространяется в [3] и на пространственный случай. Для этого предлагается построить на поверхности тела линии тока и применять критерий вдоль линий тока. Далее, построить линию отрыва потока с гладкой поверхности, которая проходит через точки отрыва потока, полученные с использованием критерия, на каждой линии тока.

Интересно, что исследования обтекания профиля, проведенные с использованием предложенного критерия, показали, что «С увеличением угла атаки точка отрыва потока на верхней поверхности профиля перемещается в направлении от хвостика профиля к его носку. При этом точка отрыва, соответствующая нижней поверхности профиля, находится на задней кромке. Таким образом, не требуется заранее удовлетворять условию Чаплыгина-Жуковского, назначая сход какой-либо из пелен с задней кромки». Такие результаты численного эксперимента позволяют говорить, что такой подход является косвенным подтверждением гипотезы Чаплыгина-Жуковского.

Итак, в работе [3] сформулирован критерий отрыва потока с гладкой поверхности, который работает для потока идеальной несжимаемой жидкости. Учитывая универсальность идеи, которая лежит в основе критерия, логично предположить, что указанный подход должен работать и в случае сжимаемого потока и неидеальной жидкости. На это указывают исследования, опубликованные в работах [8] и [9].

В работе [8] рассматривается вопрос о расчете отрыва потока с гладкой поверхности в случае обратного проектирования аэродинамических поверхностей. Рассматривается случай, когда обратное проектирование ведется на основе заданного распределения скоростей на поверхности, и, проблемой является то, что отрыв потока с гладкой поверхности может существенно ухудшить характеристики аэродинамической поверхности, которые ожидаются исходя из распределения скоростей. Для численного моделирования отрыва потока с гладкой поверхности в работе [8] со ссылкой на работу [9] формулируется тот же подход к анализу отрыва потока с гладкой

поверхности, основанный на поиске минимума изменения кинетической энергии, что и в работе [3]. Однако, ввиду того, что не делается никаких предположений относительно идеальности жидкости, при выводе математической формулировки критерия использован другой подход. В качестве основы использована известная формула кинетической энергии потока $T = \frac{1}{2} \rho V^2$, где ρ — локальная плотность, а локальный вектор скоростей q определяется как $\vec{V} = V\vec{s} + 0\vec{n} + 0\vec{m}$, (s,n,m) — декартова система координат, направленная по линии тока.

Первая производная кинетической энергии соответствует по смыслу затратам кинетической энергии и выражается в [8] формулой

$$\dot{T} = \frac{1}{2}V^2 \rho_t + \rho V V_t + \frac{1}{2}V^3 \rho_s + \rho V^2 V_s.$$

Далее в [5] предлагается найти нули второй производной для определения точек возможного минимума изменения кинетической энергии и среди этих точек найти точки отрыва. Окончательно в [8] получены условия:

для стационарного потока несжимаемой жидкости:

$$T = \rho^{2} V^{2} (V_{s})^{2} + V^{3} q_{ss} = \rho \left[V (V^{2} V_{s})_{s} \right] = 0$$

для нестационарного потока несжимаемой жидкости

$$T = \rho \left[\left(V_t + V V_s \right)^2 + \left[V \left(V_s \right)^2 + V_t V_s + V_{tt} + 2 V V_{st} + V^2 V_{ss} \right] V \right] = 0$$

для стационарного потока сжимаемой жидкости

$$T = \rho V^2 \left\{ \left[2 - 3M^2 + \frac{2 - \gamma}{2} M^4 \right] (V_s)^2 \left(1 - \frac{M^2}{2} \right) \right\} = 0 ,$$

где M – число Mаха, а γ – коэффициент перемежаемости [1].

В работе [8] приводятся результаты экспериментов, проведенных с использованием критерия в такой постановке, и демонстрируется, что они хорошо согласуются с экспериментальными данными для разных значений числа Рейнольдса.

Однако, из приведенных в [8] условий отрыва потока несложно видеть, что в такой формулировке критерий работает только в случае, когда скорость является дважды дифференцируемой функцией по времени и пространству. Поэтому, в случае расчета обтекания заданного тела при неизвестном распределении скоростей по поверхности, как это делается в [3], применение критерия в такой формулировке может быть связано со значительными сложностями при вычислении производных скорости, либо невозможно вообще, ввиду недифференцируемости функции скорости.

Но само существование критерия в условиях [8] является очень важным, т.к. указывает на принципиальную возможность расширения критерия в формулировке [3] на случаи вязкой и сжимаемой жидкости путем введения диссипативного члена, в котором будут учитываться особенности потока.

Литература

- 1. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука Гл. ред. физ-мат. лит., 1988.
- 2. Белоцеркровский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
- 3. Дмитриев М.Л. Диссертация на соискание степени кандидата физикоматематических наук «Математическое моделирование отрыва потока с гладкой поверхности тел в рамках теории идеальной жидкости» М.: 1998.
- 4. Ильичев К.П., Постоловский С.Н. // Расчетные исследования нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, №2.
- 5. Чжен П., Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979.
- 6. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
- 7. Вальес Н.Г. Расчет срывного обтекания цилиндра при автоколебаниях в потоке идеальной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. 1980. №3.
- 8. Dulikravich G.S., A criteria for surface pressure specification in aerodynamic shape design // AIAA, J. 8-11, 28th aerospace sciences meeting, 1990.
- 9. Sih G.C., Phenomena of instability: Fracture mechanics and flow separation. // Navai research reviews, Spring

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ РАЗГОННОГО ВИХРЯ ПРАНДТЛЯ

Д.В. Богомолов

Россия, Москва, Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского, e-mail: bogomolov.77@mail.ru

Предлагается подробная методика построения разгонного вихря Прандтля в нелинейной постановке задачи. Работа будет полезна молодым ученым в области аэродинамики при ознакомлении с простейшим видом обтекания.

I. Обозначения, принятые в работе:

 x_i — точки расположения дискретных вихрей на пластинке; расчетных x_{0i} – расположение точек; n -количество отрезков разбиения на пластике; h — шаг дискретности по оси OX; $\omega_{i,0\,i}^{,\,r}$ — нормальная составляющая расчетной В точке индуцируемой вихрем единичной интенсивности, помещенным в точке x_i в r расчетный момент времени;

 $\omega_{,0\,j}^{s\,,\,r}$ — нормальная составляющая скорости, в $x_{0\,j}$ индуцируемой вихрем единичной интенсивности в точке $\begin{pmatrix} x_s^r , y_s^r \end{pmatrix}$ в которой располагается в момент r свободный вихрь, сошедший в момент s;

 Γ_i^r — интенсивность суммарного вихря в x_i , в момент времени r;

 δ^{s} — интенсивность свободного вихря, сошедшего в момент s ;

 $\vec{V}_{i,0j}^{,r}$ — скорость, индуцируемая вихрем единичной интенсивности, расположенным в x_i в x_{0j} расчетной точке в момент r; $\vec{V}_{,n}^{,r}$ — суммарная скорость, индуцируемая суммарными дискретными вихрями в точке (x_n, y_n) ;

 $ec{V}^{s,r}$ — вектор сдвига, по направлению которого будет сдвигаться свободный вихрь δ^s в момент r; $ec{V}^{s,r}_{,n}$ — скорость, индуцируемая свободным вихрем δ^s в точке (x_n,y_n) в момент r; $ec{V}^{r}_{i,s}$ — скорость, индуцируемая суммарным вихрем, размещенным в x_i в точке расположения свободного вихря δ^s в момент времени r.

II. Постановка задачи

Среди численных методов для идеальной жидкости, используемых в аэродинамике, наибольшее распространение получил метод дискретных вихрей. В данной работе предпринята попытка достаточно подробно рассмотреть

-1 1 U₀ Рис. 1. Вихрь Прандтля при обтекании пластинки. методику построения разгонного вихря Прандтля, который является одним из наиболее простых случаев нестационарной нелинейной задачи. Таким образом, рассматриваем плоскую задачу. Пластинка движется в невязкой несжимаемой среде со средней поступательной скоростью U_0 (рис. 1). Плотность среды при обтекании не

изменяется $\rho = \rho_{\infty}$. При этом считаем, что известен закон движения пластинки и предполагаем, что с задней кромки сходят свободные вихри. Необходимо определить интенсивность вихрей на пластинке, а также интенсивность и координаты свободных вихрей. Исходя из принципа обратимости, в дальнейшем рассмотрим движение жидкости относительно неподвижной пластинки, расположенной на [-1,1] оси OX. С задней кромки пластинки (x = 1; y = 0) сходит пелена свободных вихрей интенсивности $\delta(t)$ в момент времени t. Профиль σ и его след σ_1 заменяются непрерывной вихревой поверхностью, причем профиль σ – поверхностью из суммарных вихрей, а след σ_1 – поверхностью из свободных вихрей, двигающихся вместе с жидкостью по траекториям частиц без изменения их интенсивности. Решение этой задачи будет сведено к системе интегральных уравнений описанных в [1] стр. 190. Численно решать данную задачу будем с помощью метода дискретных вихрей в нелинейной постановке при малых углах атаки α , при этом применим дискретизацию по пространству и по времени. Непрерывный вихревой слой заменяют системой дискретных вихрей так, чтобы в пределе при увеличении числа дискретных вихрей получить искомый вихревой слой. В качестве основного элемента рассматривается соответствующий изучаемому классу задач

вихревой образ, в частности в плоских задачах применяем математическую абстракцию в виде вихревой нити бесконечного размаха. В точках схода пелены выполняется гипотеза Чаплыгина-Жуковского о конечности скорости в этих точках, что соответствует обращению в нуль интенсивности присоединенного вихревого слоя в них. При безциркуляционном обтекании, когда интенсивность $\gamma(x)$ не ограничена на обеих кромках, Б-условие требует, чтобы крайними к обеим кромкам располагались дискретные вихри. Поэтому расчетных точек будет на одну меньше, чем дискретных вихрей на пластинке. Использование условия непротекания в этих точках даст n-1 уравнений для n неизвестных циркуляций дискретных вихрей. Получаем недоопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Доопределяется эта система с помощью условия бесциркуляционности обтекания. Задачу будем решать последовательно по временным шагам r = 1, ..., n

III. Методика построения Шаг № 1, r = 1

X

1. Определяем координаты суммарных дискретных вихрей и расчетных точек на пластинке. Задаемся числом n. Для точек расположения дискретных вихрей: $x_i = -1 + (i-1)h$, i = 1, ..., n, где h = 2/(n-1). Для расчетных точек $x_{0i} = x_i + h/2$, расчетная точка $x_{0n} \notin [-1,1]$, поэтому i = 1, ..., n-1. Взаимное расположение суммарных вихрей и расчетных точек на пластинке представлено на рисунке 2.

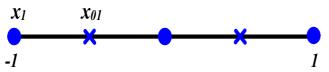


Рис. 2. Взаимное расположение вихрей и расчетных точек.

формирования 2. Для χ_{0n} уравнений СЛАУ, исходя из условия непротекания, значение определим $\vec{V}_{i,0i}^{,r}$. Воспользуемся формулой Био-Савара:

$$\vec{V}_{i,0j}^{,1} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_{0j} - y_i)\vec{i} - (x_{0j} - x_i)\vec{j}}{(x_{0j} - x_i)^2 + (y_{0j} - y_i)^2}$$

3. Выполняя условие непротекания в расчетных точках получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}\Gamma_{1} + a_{12}\Gamma_{2} + \dots + a_{1n}\Gamma_{n} = -Sin\alpha \\ \dots & \vdots \\ a_{n-11}\Gamma_{1} + a_{n-12}\Gamma_{2} + \dots + a_{n-1n}\Gamma_{nn} = -Sin\alpha \end{cases}$$

где: $a_{ij} = \vec{V}_{i,0j}^{,1} \vec{n}_{j}$, \vec{n}_{j} – орт нормали в x_{0j}

СЛАУ имеет n неизвестных и n-1 уравнений.

4. Решить СЛАУ в таком виде невозможно, поэтому доопределяем ее условием безциркуляционности, полученным из теоремы Томпсона, т.е. *n*-ое уравнение будет иметь вид $\gamma_n^r(x_1)h + ... + \gamma_n^r(x_n)h = 0$. Правая часть при отсутствии свободных вихрей состоит только из нормальной составляющей скорости набегающего потока, с обратным знаком т.е. – $Sin \alpha$.

- 5. Решением СЛАУ будут интенсивности вихрей $\Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \dots \Gamma_n^1$ в точках $x_1 \dots x_n$, причем Γ_n^1 полагаем свободным.
 - 6. Найдем скорость $\vec{V}_{i,0j}^{,1}(\Gamma_i^1)$, для вихря интенсивности Γ_i^1 , i=1,...n:

$$\vec{V}_{i,0j}^{,1}\left(\Gamma_{i}^{1}\right) = \frac{\Gamma_{i}^{1}}{2\pi} \frac{(y_{n} - y_{i})\vec{j} - (x_{n} - x_{i})\vec{i}}{(x_{n} - x_{i})^{2} + (y_{n} - y_{i})^{2}};$$

Суммарная скорость от дискретных вихрей на пластинке будет определена как: $\vec{V}_{,n}^{,1} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{V}_{i,0j}^{,1} (\Gamma_i^1).$

скорости $\vec{V}_{,n}^{,1}$ необходимо добавить 7. К суммарной набегающего потока. Изменение всего вихревого слоя будем наблюдать через некоторые промежутки времени Δt , которые принимаем равными h. Это позволит определить вектор сдвига, по направлению которого будет смещен вихрь с интенсивностью Γ_n^1 , т.е.:

$$\vec{V}^{1,1} = (\vec{V}_{,n}^{,1} + \vec{U}_{0}) \Delta t;$$

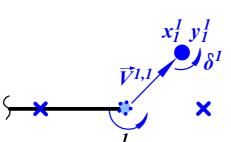
8. Координаты первого свободного вихря будут составлять:

$$x_1^1 = x_n + \vec{V}^{1,1}\vec{i}$$
; $y_1^1 = y_n + \vec{V}^{1,1}\vec{j}$;

Т.о. в потоке появляется первый свободный вихрь. Его интенсивность $\delta^1 = \Gamma_n^1$ и с течением времени не изменяется. А его координаты составят (x_1^1, y_1^1) .

Шаг № 2,
$$r = 2$$

Расположение суммарных присоединенных вихрей и первого свободного вихря, определенных при первом расчетном шаге представлено на рис. 3. От



туда же известны: x_{0j} , x_i , δ^1 , $\left(x_1^1, y_1^1\right)$. Левая часть туда же известны: x_{0j} , x_i , δ^1 , $\left(x_1^1, y_1^1\right)$. Левая часть СЛАУ остается неизменной, т.к. $\vec{V}_{i,0j}^{,2} = \vec{V}_{i,0j}^{,1}$.

1. Присутствующий в потоке свободный вихрь δ^1 будет индуцировать в расчетных тошках

дополнительные скорости:

Рис. 3. Положение вихрей при первом расчётном шаге.

$$\vec{V}_{,0j}^{1,2}(\mathcal{S}^1) = \frac{\mathcal{S}^1}{2\pi} \frac{(y_i - y_1^1)\vec{i} - (x_i - x_1^1)\vec{j}}{(x_i - x_1^1)^2 + (y_i - y_1^1)^2};$$

- 2. Теперь правая часть СЛАУ для первых n-1 будет состоять из нормальных составляющих скорости набегающего потока, взятых с минусом, и скорости, индуцируемой первым свободным вихрем в расчетных точках, т.е. $-Sin \alpha - \omega_{0i}^{1,2}, j = 1,...,n$.
- 3. Правая часть n-ого уравнения СЛАУ будет состоять из интенсивности свободного вихря, взятого с противоположным знаком $(-\delta^1)$.

- 4. После решения СЛАУ нам известна интенсивность присоединенных вихрей $\left(\Gamma_1^2, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_n^2\right)$
- 5. Вычисляется $\vec{V}_{i,0}^{,2}(\Gamma_i^2)$ с интенсивностью Γ_i^2 и $\vec{V}_n^{,2}$. Но теперь еще δ^1 будет оказывать влияние на скорость $\vec{V}_{,n}^{\,,2}$, т.е. необходимо определить скорость

$$\vec{V}_{,n}^{1,2} = \frac{\delta^1}{2\pi} \frac{\left(y_n - y_1^1\right)\vec{i} - \left(x_n - x_1^1\right)\vec{j}}{\left(x_n - x_1^1\right)^2 + \left(y_n - y_1^1\right)^2};$$

и добавить ее к $\vec{V}_{,n}^{,2}$, не забыв про скорость набегающего потока и временной интервал:

$$\vec{V}^{1,2} = (\vec{V}_{,n}^{1,2} + \vec{V}_{,n}^{1,2} + \vec{U}_{0}) \Delta t;$$

6. Определяем координаты второго свободного вихря, оторвавшегося с конца профиля:

$$x_2^2 = x_n + \vec{V}^{1,2}\vec{i}$$
; $y_2^2 = y_n + \vec{V}^{1,2}\vec{j}$;

Теперь в потоке находятся два свободных вихря $\delta^2 = \Gamma_n^2$, и его интенсивность также не меняется с течением времени.

7. Но и δ^1 не остается на месте. На его сдвиг будут влиять присоединенные вихри, индуцирующие в точке его расположения скорости:

$$\vec{V}_{i,s}^{,2} = \frac{\Gamma_i^2}{2\pi} \frac{\left(y_1^1 - y_i\right)\vec{i} - \left(x_1^1 - x_i\right)\vec{j}}{\left(x_1^1 - x_i\right)^2 + \left(y_1^1 - y_i\right)^2}, \quad i = 1, \dots, n;$$

 $8. \ \vec{V}^{1,2}$, по которому будет



Рис. 4. Расположение вихрей к третьему шагу.

$$\vec{V}^{1,2} = (\vec{V}_{i,s}^{,2} + \vec{U}_0) \Delta t;$$

9. И тогда новые координаты δ^1

$$x_1^2 = x_1^1 + \vec{V}^{1,2}\vec{i}$$
; $y_1^2 = y_1^1 + \vec{V}^{1,2}\vec{j}$;

В потоке находятся два свободных вихря уже с новыми координатами $\begin{pmatrix} x_1^2, y_1^2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_2^2, y_2^2 \end{pmatrix}$.

Расположение вихрей к третьему шагу отражено на рис. 4. Выполняя последовательно развитие следа, на

r шаге получим:

Шаг № r

Из предыдущих шагов известны: x_{0j} , x_i , δ^s , $\left(x_s^r, y_s^r\right)$, $s=1,\ldots,r-1$. Расположение вихрей перед шагом r представлено на рисунке 5.

- 1. На любом расчетном шаге левая часть СЛАУ остается неизменной.
- 2. В потоке находится r-1 свободный вихрь. Каждый из них индуцирует в расчетных точках скорости:

$$\vec{V}_{,0j}^{s,r} = \frac{\delta^{s}}{2\pi} \frac{(y_{i} - y_{n}^{s})\vec{i} - (x_{i} - x_{n}^{s})\vec{j}}{(x_{i} - x_{n}^{s})^{2} + (y_{i} - y_{n}^{s})^{2}}, s = 1, \dots, r - 1;$$

3. СЛАУ на данном шаге будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{i}^{r} \omega_{ij}^{r} = -Sin\alpha - \sum_{s=1}^{r-1} \delta^{s} \omega_{,0j}^{s,r}, j = 1, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{i}^{r} = -\sum_{s=1}^{r-1} \delta^{s} \end{cases};$$

где:
$$\omega_{,0j}^{s,r} = \vec{V}_{,0j}^{s,r} \vec{n}_{j}$$

- 4. Снова определяем интенсивность присоединенных вихрей $(\Gamma_1^r, \dots \Gamma_n^r)$.
- 5. Скорость, индуцируемая суммой присоединенных дискретных вихрей, расположенных на [-1,1] в точке (x_n, y_n) вычисляется как:

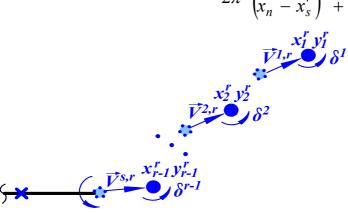
$$\vec{V}_{,n}^{,r} = \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_i^r \cdot \vec{V}_{i,0j}^{,r} \left(\Gamma_i^r \right);$$

$$\Gamma_i^r \left(y_n - y_i \right) \vec{i} - \left(x_n - x_i \right) \vec{j}.$$

где:
$$\vec{V}_{i,0j}^{,r} \left(\Gamma_i^r \right) = \frac{\Gamma_i^r}{2\pi} \frac{(y_n - y_i)\vec{i} - (x_n - x_i)\vec{j}}{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2}$$
;

6. Каждый свободный дискретный вихрь добавляет к этой скорости некоторую составляющую:

$$\vec{V}_{,n}^{s,r} = \frac{\delta^{s}}{2\pi} \frac{(y_{n} - y_{s}^{r})\vec{i} - (x_{n} - x_{s}^{r})\vec{j}}{(x_{n} - x_{s}^{r})^{2} + (y_{n} - y_{s}^{r})^{2}};$$



7. Просуммировав данную скорость со скоростью $\vec{V}_{,n}^{r}$ и \vec{U}_{0} , помножая на временной интервал, вектор скорости на который будет сдвигаться s свободный вихрь:

$$\vec{V}^{s,r} = \left(\vec{V}_{,n}^{,r} + \vec{V}_{,n}^{s,r} + \vec{U}_{0}\right) \Delta t;$$

Рис. 5. Расположение вихрей перед шагом r.

8. Координаты s свободного вихря в момент r составят:

$$x_s^r = x_s^{r-1} + \vec{V}^{s,r}\vec{i}; y_s^r = y_s^{r-1} + \vec{V}^{s,r}\vec{j}.$$

Литература

- 1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука. 1985. 252 с.
- 2. Лифанов И. К. Методы сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.
- 3. Математическое моделирование в аэродинамике. Под ред. А.И. Желанникова. М.: ВВИА. 1992. 42 с.

УДК 519.7

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДОСТОВЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФРАКЦИИ НА ПРЕДФРАКТАЛАХ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

А.В. Гахов

Украина, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина e-mail: gahov@univer.kharkov.ua

Предлагается система критериев достоверности численных решений по методам дискретных особенностей краевых задач, возникающих в электродинамике планарных структур. Выполнено экспериментальное определение минимальных параметров дискретизации, допускающих достоверное численное моделирование дифракции на предфрактальных структурах типа ковра Серпинского.

Статья относится к области численной и программной реализации методов математического моделирования на базе методов дискретных особенностей в электродинамике [1-4].

Как видно на примере ряда работ последнего десятилетия [5-8], резко возросла актуальность численного моделирования взаимодействия монохромных волн (прежде всего — электромагнитных) с планарными микрополосковыми структурами. Это объясняется возросшей потребностью техники в миниатюрных излучающих и принимающих антеннах с широким диапазоном рабочих частот [8-9]. В этом контексте особый интерес представляют, так называемые, фрактальные (с математической точки зрения — предфрактальные) плоские структуры, примеры которых приведены на рис. 1.

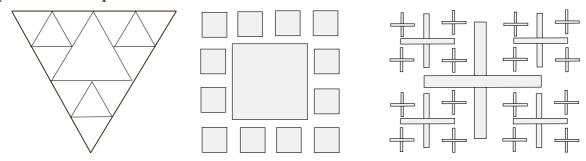


Рис. 1. Различные структуры фрактального типа.

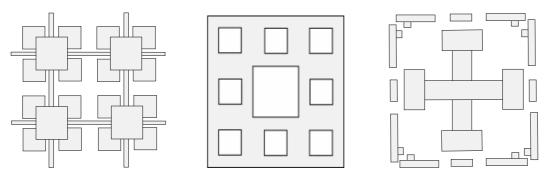


Рис. 1. Различные структуры фрактального типа.

Реальные применения предфрактальных структур сопряжены с рядом обстоятельств, весьма усложняющих полное численное решение соответствующих дифракционных задач. К числу таких существенных обстоятельств относятся:

- Наличие диэлектрической подложки
- Наличие ёмкостной нагрузки (имеется питающий или отводящий кабель)
- Множественность структурных элементов (ведущая к «обвальному» росту размерности дискретных моделей)
- Векторный характер уравнений Максвелла

В численном моделировании этим усложняющим обстоятельствам противопоставляются различные приёмы упрощения постановки математических задач:

- **П1.** Всегда в двумерных, а при определённых условиях и в трёхмерных постановках, удаётся свести задачу рассеяния для электромагнитной волны к ряду задач для скалярных волн [2].
- **П2.** Иногда эффект поверхностных волн в диэлектрике заведомо невелик, что позволяет пренебрегать отличием электрической и магнитной проницаемостей в подложке от окружающего пространства. В некоторых других случаях можно ограничиться допущением поверхностных волн, вызванных наличием идеально проводящего экрана.
- П3. Можно ограничиваться полным численным решением пространственных задач для предфракталов в нижней части частотного диапазона, пренебрегая мелкими в сравнении с длиной волны (предфракталы элементами малого структурными порядка). оставшейся части диапазона придётся применять эмпирические методы П4. Ограничиться таким минимальным порядком дискретной модели, определённые какой только сохранить признаки позволяет достоверности моделирования.

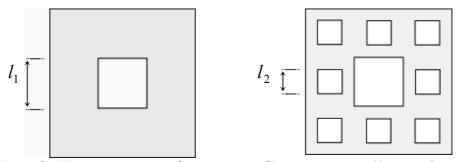


Рис. 2. Примеры предфракталов Серпинского (1-го и 2-го порядков)

Данная работа посвящена разработке метода определения в численном эксперименте минимального значения параметра дискретизации в соответствии с приёмом **П4** в условиях применимости всех прочих упрощений. Таким образом, речь идёт о решении задачи

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x), \quad x \in \Sigma$$

где Σ - область, одного из видов, представленных на рис.2, лежащая в плоскости $X_1 0 X_2$

Метод решения – численное определение приближения к u(x) в форме потенциала двойного слоя по методу дискретных особенностей [9], численная сходимость которого на прямоугольных областях в задаче падения плоской волны ПОД произвольными углами, подробно Использовано разработанное исследовалась [10-11].автором сотрудничестве с В.О.Мищенко [10] программное обеспечение, параметры которого анализировались в [12], а исходные тексты доступны в сети Интернет¹

Исходя из опыта работ [10,11], в качестве признаков достоверности моделирования примем следующие:

- стабилизация вида диаграммы рассеяния
- стабилизация формы функции плотности
- характерный порядок обнуления решения

Исследования проводились для различных степеней дискретизации, различных частот и углов падения заданного поля.

В ходе исследований удалось выяснить, что с ростом порядка дискретизации стабилизация диаграммы рассеяния наблюдается так быстро, что в качестве основного критерия её выбирать бессмысленно.

¹http://www.programm.iatp.org.ua

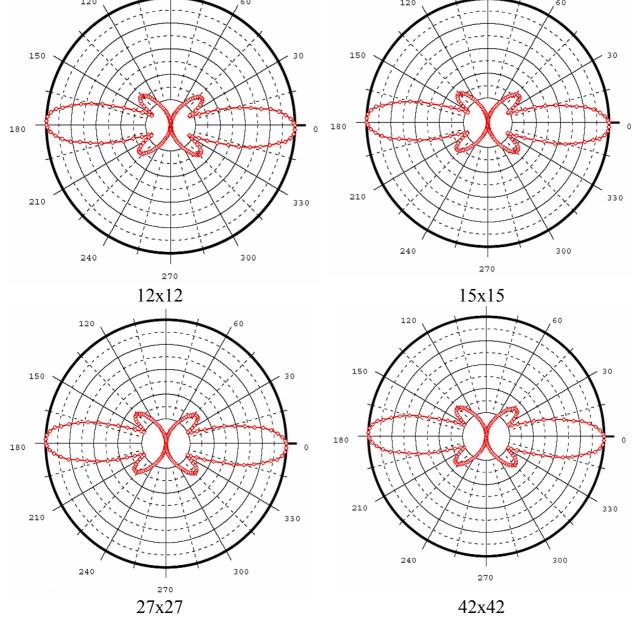


Рис. 3. Зависимость нормированной диаграммы направленности от степени дискретизации ($k = 4\pi$, нормальное падение).

Важным критерием является стабилизация формы функции плотности, получаемая при решении гиперсингулярного интегрального уравнения. На рис. 4. приведены некоторые графики сечений функции плотности.

Применим В третий признак достоверности. согласии [13] теоретическими представлениями по результатам предыдущих исследований [11] примем за характерный порядок обнуления значение, не Обработанные результаты меньшее, 0.44. экспериментов чем предфрактала показаны на рис. 5.

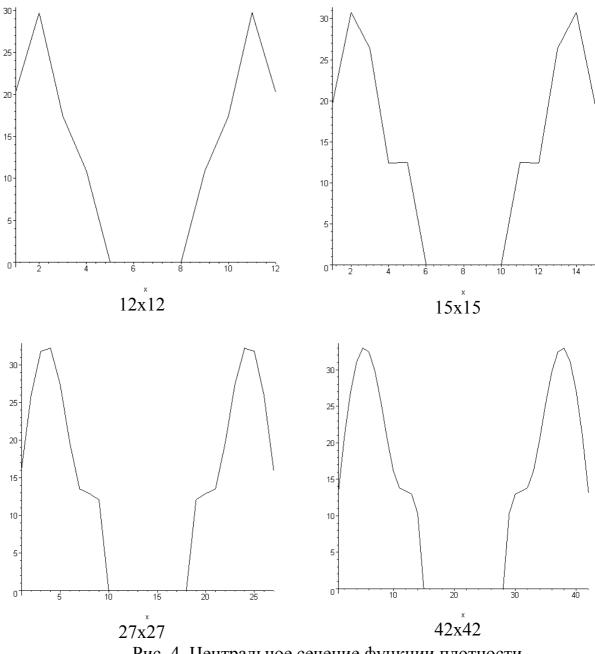


Рис. 4. Центральное сечение функции плотности $(k=4\pi \, , \, \text{нормальное падение})$

В итоге оказывается, что для предфрактала первого порядка, используя все три критерия, можно признать разбиение 27х27 как достаточное.

Рис. 5. также демонстрирует, что использование для заключения о достаточности только одного из критериев, может провоцировать ошибочные заключения. Действительно, принятый в третьем критерии порядок обнуления однажды уже удовлетворялся для разбиения 18х18.

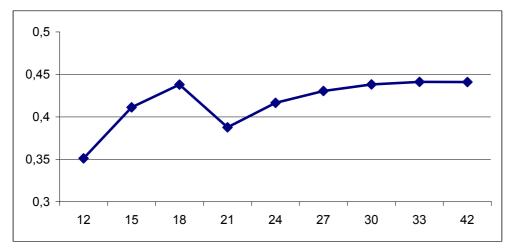


Рис. 5. Зависимость порядка обнуления решения от разбиения.

Численная сходимость в себе последовательности решений МДО (при повышении степени дискретизации) была установлена ранее в [11].

В рамках ограничений на ресурсы, эксперименты по такому же плану проводились и для предфрактала Серпинского второго порядка и получены примеры расчётов для 3-го порядка. Различий в качественной картине численной сходимости пока не обнаружилось. Но для достижения той же степени достоверности результатов, как для предфракталов первого порядка, в настоящее время проводятся дополнительные эксперименты.

Результаты данной работы, строго говоря, относятся к исследованию дискретизации по методам дискретных особенностей для максимально упрощенных моделей фрактальных антенн. Но, в соответствии с принципом распространения результатов, полученных для модельных условий, на реальные задачи [4], эти результаты могут применяться в расчетах для предфрактальных систем при отказе от каких-либо из упрощающих предположений **П1-П3**.

При проведении дальнейших исследований с использованием численных экспериментов по принятому плану, будет целесообразно сосредоточить усилия на преодолении ресурсных ограничений с целью нахождения достоверно достаточных параметров дискретизации для предфракталов 3 порядка. Для предфрактальных экранов 1-3 порядков целесообразен поиск алгоритмических усовершенствований, которые бы позволили провести сравнение с результами расчётов по более полной модели, отказавшись, по крайней мере, от одного из ограничений **П1-П3**

Выражаю благодарность Мищенко В.О. за постановку задачи и советы.

Литература

- 1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, М.: Наука, 1985. 256 с.
- 2. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов: Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных

- волн. Ч.2: Учеб.пособие ХГУ им.А.М.Горького . Х.: Изд-во ХГУ, 1992 . 145 с. Библиогр.:с.141-143 (25 назв.).
- 3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520с.
- 4. Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Математическое моделирование в электродинамике на базе сингулярных интегральных уравнений и проект программной системы // Математическое моделирование. Сб. науч. тр. НАН Украины. Ин-т. математики. Киев, 1996. С.70-74
- 5. Douglas H. Werner, Randy. L. Haupt, Pingjuan L. Werner Fractal antenna engineering: The theory and design of fractal antenna arrays, IEEE Antennas Propagat. Mag., vol. 41, pp. 37 58, October 1999.
- 6. C. Puente, J. Romeu, R. Pous, X. Garcia, F. Benitez Fractal multiband antenna based on the Sierpinski gasket, Electron. Lett., Vol. 32, No.1, pp.1-2, Jan. 4, 1996.
- 7. L. M. Lyamshev, I. A. Urusovskii Sound Diffraction at Sierpinski Carpet // Acoustical Physics, Vol. 49, No. 6, 2003, pp. 700-703
- 8. J. P. Gianvittorio, J. Romeu, S. Blanch, and Y. Rahmat-Samii, "Self-similar prefractal frequency selective surfaces for multiband and dual-polarized applications," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 51, pp. 3088-3096, November 2003.
- 9. Nathan Cohen Fractal Antenna Applications in Wireless Telecommunications // IEEE Electronics Industries Forum of New England, No.8, pp. 43-49. 1997.
- 10. Гахов А. В., Мищенко В. О. Вычислительный эксперимент на базе численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для прямоугольной области // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления": вып. 1, 2003г. С. 84-91.
- 11. Гахов А. В. Численные эксперименты на базе программной реализации 3-мерной акустической задачи дифракции на плоском экране // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»(МДОЗМФ-2005). Харьков-Херсон. 2005. С.93-96
- 12. Gahov A. Testing a new approach to the analysis of projects development using generalization parameters offered by software science // Transaction of The International Conference «SCALNET'04», 28-30 September 2004, Kremenchuk. pp. 118-120
- 13. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики: Учеб. пособ. для вузов. М.: Высш. школа, 1991. 224 с.

К ЗАДАЧЕ ОБ УЧЕТЕ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г.В. Голубев

Россия, Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, golubev@tm.kstu-kai.ru

Рассмотрена задача определения поля давлений в неоднородном трещиновато-пористом пласте Выведено исходное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных с дивергентной главной частью и установлен его тип. Сформулирована исследуемая задача и предложен метод его решения, основанный на сведении к интегро-дифференциальному уравнению и решении его последовательными приближениями. Разобран общий алгоритм и примеры.

В качестве математической модели трещиновато-пористой среды примем модель Баренблатта – Желтова. В ней реальная среда представлена в виде двух вложенных друг в друга разномасштабных "пористых" сред с различными коэффициентами проницаемости. Осреднение характеристик среды и потока проводится по объемам, содержащим достаточно большое число пористых блоков, где сосредоточены главные запасы нефти, и трещин, по которым происходит основное движение нефтегазового потока. Будем считать, что движение однородной жидкости в этой среде таково, что фильтрация в трещинах описывается нелинейным двучленным законом Ф.Форхгеймера, а фильтрация в пористых блоках определяется нелинейным "криволинейным" законом. Тот факт, что закон Форхгеймера более адекватен реальному течению в трещинах по сравнению с другими законами фильтрации обычно обосновывают ссылками на эксперименты Фенчера, Льюиса, Бернса, опыты Линдквиста и анализ промысловых данных по многим нефтегазовым месторождениям с трещиноватыми коллекторами. Но сам закон Форхгеймера приводится у разных авторов в двух различных формах. Можно предположить, что экспериментальные данные допускают такую двойственность записи. Нелинейный "криволинейный" закон в свою очередь лучше описывает проявление аномальных свойств пластовой нефти по сравнению с законом Дарси – линейной зависимостью скорости фильтрации от градиента давления. Закон фильтрации как раз устанавливает зависимость между ними, а функциональная зависимость скорости фильтрации от градиента давления, изображенная графически, носит название индикаторной кривой. Она основана на экспериментальных измерениях и определяется свойствами жидкости и пористой среды. Для жидкостей, которые назвали вязко-пластическими, индикаторная кривая имеет отчетливо нелинейный характер. Рядом авторов были предложены нелинейные законы фильтрации: закон с начальным градиентом давления, закон полигональной аппроксимации и некоторые другие. Среди нелинейных законов важное место занимает "криволинейный" закон, предложенный узбекскими учеными. Он получается путем гиперболической аппроксимации индикаторной кривой при малых

градиентах давления, где особенно сильно влияние нелинейности, и линейной при больших градиентах. Переход одной в другую происходит при начальном градиенте давления, соответствующем рассматриваемым жидкости и пористой среде.

Закон Форхгеймера в форме, приведенной в работах [1] – [3], имеет вид:

$$\nabla p = -\mu \frac{\overline{v_1}}{k_1} - \beta \mu \frac{\overline{v_1} \overline{v_1}}{k_1}. \tag{1}$$

Здесь использованы обозначения: v_1 - скорость фильтрации, p - функция давления, k_1 - проницаемость трещин, μ - коэффициент динамической вязкости жидкости, β - некоторая постоянная.

Закон Форхгеймера в форме, разрешенной по отношению к скорости фильтрации, представляется в виде

$$\overline{\mathbf{v}}_{1} = -\mathbf{B}_{1} \nabla \mathbf{p}, \tag{2}$$
 где $\mathbf{B}_{1} = \left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla \mathbf{p}| \mathbf{k}_{1} / \mu} - 1\right) / 2\beta |\nabla \mathbf{p}|.$

Нелинейный «криволинейный» закон математически записывается следующим образом

где v_2 — скорость фильтрации в блоках, k_2 — коэффициент проницаемости блоков, v — динамическая вязкость жидкости при малых градиентах давления, $\beta_1 = \alpha/\sqrt{k_2}$ — начальный градиент давления, μ_0 , α — некоторые постоянные.

Из (2) и (3) для суммарного потока получаем

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = -B_2 \nabla p,$$
 (4)

гле

$$\begin{split} \boldsymbol{B}_2 &= \frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|k_1/\mu}-1}{2\beta|\nabla p|} + \frac{\sqrt{k_2}}{\mu} \frac{|\nabla p|\sqrt{k_2}-\mu_0\alpha}{|\nabla p|} \, \text{при} \, |\nabla p| \geq \beta_1, \\ \boldsymbol{B}_2 &= \frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|k_1/\mu}-1}{2\beta|\nabla p|} \frac{k_2^{3/2}}{\nu} \frac{|\nabla p|}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+|\nabla p|^2k_2}} \quad \text{при} \, |\nabla p| < \beta_1. \end{split}$$

Будем считать коэффициенты проницаемости и трещин и блоков переменными величинами, функциями координат: $k_1 = k_1(x, y)$, $k_2 = k_2(x, y)$. Отношение $k_1/\mu = c_1$ обычно называют коэффициентом текучести (или подвижности). Он тоже является функцией координат: $c_1 = c_1(x, y)$.

Проекции скорости фильтрации суммарного потока на оси координат имеют вид

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}} = -\mathbf{B}_{2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{y}} = -\mathbf{B}_{2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}},$$

где функция B_2 записывается по разному при $|\nabla p| \ge \beta_1$ и $|\nabla p| < \beta_1$.

Выведем основное уравнение фильтрации для трещиновато-пористого пласта в рассматриваемом случае. К закону (4) добавляем соотношение, которое получается из уравнения неразрывности суммарного потока и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления. Оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (hv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_y) + f(x, y, t) + \beta^* h \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

где h – толщина пласта (в дальнейшем положим h = 1), f – функция плотности отбора (или закачки), β^* - упругоемкость пласта, t – время. Жидкость полагаем несжимаемой и тогда член β^*p_t' в уравнении (5) обращается в нуль.

Вычисляя производные

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2x}}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2y}}{\partial y}$$

и подставляя их в соотношение (5), будем иметь при $|\nabla p| \ge \beta_1$

$$\begin{split} &\frac{\partial^{2}p}{\partial x^{2}} \left[\frac{\left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}} - 1 \right)}{2\beta |\nabla p|^{3}} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^{2} + \frac{c_{1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{2}}{|\nabla p|^{2} \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}}} + \frac{k_{2}}{\mu} - \frac{\omega \sqrt{k_{2}}}{|\nabla p|} + \frac{\omega \sqrt{k_{2}}}{|\nabla p|^{3}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{2} \right] + \\ &+ \frac{\partial^{2}p}{\partial y^{2}} \left[\frac{\left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}} - 1 \right)}{2\beta |\nabla p|^{3}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{2} + \frac{c_{1} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^{2}}{|\nabla p|^{2} \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}}} + \frac{k_{2}}{\mu} - \frac{\omega \sqrt{k_{2}}}{|\nabla p|} + \frac{\omega \sqrt{k_{2}}}{|\nabla p|^{3}} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^{2} \right] + \\ &+ 2 \frac{\partial^{2}p}{\partial x \partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \left[- \frac{\left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}} - 1 \right)}{2\beta |\nabla p|^{3}} + \frac{c_{1}}{|\nabla p|^{2} \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}}} - \frac{\omega \sqrt{k_{2}}}{|\nabla p|^{3}} \right] + \\ &+ \left(\frac{\partial c_{1}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c_{1}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) / \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|c_{1}} + \left(\frac{\partial k_{2}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_{2}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\omega}{2\sqrt{k_{2}|\nabla p|}} \right) - f = 0, \end{split}$$

где $\omega = \mu_0 \alpha / \mu$.

При $|\nabla p| < \beta_1$ получаем

$$\begin{split} &\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Bigg[\frac{\left(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}-1\right)}{2\beta|\nabla p|^3} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \frac{c_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2}{|\nabla p|^2 \sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}} + \frac{k_2^{3/2}}{\nu} \left(|\nabla p|^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\right) \bigg/ |\nabla p| (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}) - \frac{k_2^{5/2}}{\nu} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 |\nabla p| \bigg/ \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}\right)^2 \Bigg] + \\ &+ \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Bigg[\frac{\left(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}-1\right)}{2\beta|\nabla p|^3} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \frac{c_1 \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}{|\nabla p|^2 \sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}} + \frac{k_2^{3/2}}{\nu} \left(|\nabla p|^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right) \bigg/ |\nabla p| (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}) - \frac{k_2^{5/2}}{\nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 |\nabla p| \bigg/ \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}\right)^2 \Bigg] + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg[- \frac{\left(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}-1\right)}{2\beta|\nabla p|^3} + \frac{c_1}{|\nabla p|^2 \sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}} + \frac{k_2^{3/2}}{\nu} \bigg/ |\nabla p| \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}\right) - \frac{k_2^{5/2}}{\nu} \Big|\nabla p| \bigg/ \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2} \bigg)^2 \Bigg] + \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c_1}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \bigg) \bigg/ \sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial k_2}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_2}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{|\nabla p| \sqrt{k_2}}{2\nu} \Bigg[3 - k_2 |\nabla p|^2 / \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}\right)^2 \Bigg] \bigg/ (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}\right) - \right. \\ &+ \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2} - f = 0. \end{split}$$

Равенства (6) и (7) представляют собой основные уравнения фильтрации для закона (4) в случаях $|\nabla p| \ge \beta_1$ и $|\nabla p| < \beta_1$. Они могут быть использованы или для определения функции давления или для определения фильтрационных параметров.

Получим теперь основное уравнение фильтрации для второго варианта закона Форхгеймера. В работе [4] закон Форхгеймера записывается в следующем виде

$$\nabla p = -\mu \frac{v_1}{k_1} - \beta \rho \frac{v_1 v_1}{\sqrt{k_1}},$$
 (8)

(7)

где ρ - плотность жидкости, β = const, а остальные обозначения те же, что и в (1).

Для формы (8) обращенный закон Форхгеймера представляется

$$v_{1} = -B_{1}\nabla p,$$
где $B_{1} = \left(\sqrt{1 + 4|\nabla p|\rho k_{1}^{3/2}\beta/\mu^{2}} - 1\right)\mu/2\beta\rho|\nabla p|\sqrt{k_{1}}.$ (9)

Если обозначить $\sqrt{k_{_1}}=u,\;$ то B_1 будет иметь вид

$$B_1 = \left(\sqrt{1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^3/\mu^2} - 1\right)\mu/2\beta\rho|\nabla p|u.$$

Скорость фильтрации суммарного потока запишется

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}_1 + \overline{\mathbf{v}}_2 = -\mathbf{B}_2 |\nabla \mathbf{p}|,\tag{10}$$

гле

$$\begin{split} B_2 &= \frac{\left(\sqrt{1+4|\nabla p|\rho\beta u^3 / \mu^2} - 1\right)\!\!\mu}{2\beta\rho|\nabla p|u} + \frac{\sqrt{k_2}}{\mu} \frac{|\nabla p|\sqrt{k_2} - \mu_0\alpha}{|\nabla p|} & \text{при } |\nabla p| \geq \beta_1, \\ B_2 &= \frac{\left(\sqrt{1+4|\nabla p|\rho\beta u^3 / \mu^2} - 1\right)\!\!\mu}{2\beta\rho|\nabla p|u} + \frac{k_2^{3/2}}{\nu} \frac{|\nabla p|}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}} & \text{при } |\nabla p| \leq \beta_1. \end{split}$$

Проекции вектора у на оси координат равны

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}} = -\mathbf{B}_{2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{y}} = -\mathbf{B}_{2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}},$$

где функция В2 определяется равенствами (11).

Вычисляя производные $\partial v_x / \partial x$, $\partial v_y / \partial y$ и подставляя их в соотношение (5), будем иметь при $|\nabla p| \ge \beta_1$

$$\begin{split} &\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Bigg[\bigg(1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2 \, - \sqrt{1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2} \bigg) \bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \bigg)^2 \, + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} \, u^3 \big| \nabla p \bigg(\frac{\partial p}{\partial x} \bigg)^2 \, + \\ &\quad + D \Bigg(D_1 + D_2 \bigg(\frac{\partial p}{\partial x} \bigg)^2 \bigg) \Bigg] + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Bigg[\bigg(1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2 \, - \sqrt{1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2} \bigg) \bigg(\frac{\partial p}{\partial x} \bigg)^2 \, + \\ &\quad + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} \, u^3 \big| \nabla p \bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \bigg)^2 + D \Bigg(D_1 + D_2 \bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \bigg)^2 \bigg) \Bigg] + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \Big[-1 - 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2 \, + \\ &\quad + \sqrt{1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2} \, + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} \, u^3 \big| \nabla p \big| + D D_2 \Bigg] + \bigg(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \, + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \bigg) \Bigg[\big| \nabla p \big|^2 \, \times \\ &\quad \times \frac{1}{u} \bigg(1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2 \, - \sqrt{1 + 4 \big| \nabla p \big| \rho \beta u^3 \, / \, \mu^2} \bigg) + \frac{6 \rho \beta}{\mu^2} \big| \nabla p \big|^3 \, u^2 \bigg] + \\ &\quad + \bigg(\frac{\partial k_2}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \, + \frac{\partial k_2}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \bigg) \bigg(\frac{1}{\mu} \, - \frac{\omega}{2 \sqrt{k_2} \big| \nabla p \big|} \bigg) D - f D = 0. \end{split}$$

При
$$|\nabla p| < \beta_1$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left[\left(1 + 4 |\nabla p| \rho \beta u^3 / \mu^2 - \sqrt{1 + 4 |\nabla p| \rho \beta u^3 / \mu^2} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial$$

$$+ D\left[D_{3} + D_{4}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{2}\right] + \frac{\partial^{2} p}{\partial y^{2}} \left[\left(1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^{3}/\mu^{2} - \sqrt{1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^{3}/\mu^{2}}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{2} + \frac{2\rho\beta}{\mu^{2}} u^{3}|\nabla p|\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{2} + D\left(D_{3} + D_{4}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{2}\right)\right] + 2\frac{\partial^{2} p}{\partial x\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\left[-1 - 4|\nabla p|\rho\beta u^{3}/\mu^{2} + \sqrt{1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^{3}/\mu^{2}} + \frac{2\rho\beta}{\mu^{2}}u^{3}|\nabla p| + DD_{4}\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left[\nabla p|^{2} \times \frac{1}{u}\left(1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^{3}/\mu^{2} - \sqrt{1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^{3}/\mu^{2}}\right) + \frac{6\rho\beta}{\mu^{2}}|\nabla p|^{3}u^{2}\right] + \left(\frac{\partial k_{2}}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_{2}}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left[\nabla p|\sqrt{k_{2}}\left[3 - k_{2}|\nabla p|^{2}/\sqrt{\alpha^{2} + |\nabla p|^{2}k_{2}} \times \left(\alpha + \sqrt{\alpha^{2} + |\nabla p|^{2}k_{2}}\right)^{2}\right]D\left(\alpha + \sqrt{\alpha^{2} + |\nabla p|^{2}k_{2}}\right) - fD = 0.$$

$$(13)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{split} D &= 2\beta\rho\left|\nabla p\right|^3 u\sqrt{1+4\left|\nabla p\right|\rho\beta u^3 / \mu^2} / \mu, \qquad D_1 = \frac{k_2}{\mu} - \frac{\omega\sqrt{k_2}}{\left|\nabla p\right|}, \\ D_2 &= \frac{\omega\sqrt{k_2}}{\left|\nabla p\right|^3}, \quad D_3 = \frac{k_2^{3/2}\left|\nabla p\right|}{\nu\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\left|\nabla p\right|^2k_2}\right)}, \\ D_4 &= \frac{k_2^{3/2}\alpha}{\nu} \frac{1}{\left|\nabla p\right|\sqrt{\alpha^2+\left|\nabla p\right|^2k_2}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\left|\nabla p\right|^2k_2}\right)}. \end{split}$$

Если рассматривать (6), (7), (12, (13) как уравнения для определения функции давления p, то все их можно представить в одной форме записи

$$a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + H\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \tag{14}$$

только коэффициенты и функция Н будут у всех разные.

Для уравнения (6):

$$\begin{split} a_{11} = & \left(1 + 4\beta \left| \nabla p \right| c_1 - \sqrt{1 + 4\beta \left| \nabla p \right| c_1} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + 2\beta c_1 \left| \nabla p \right| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(D_1 + D_2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) \times \\ \times & 2\beta \left| \nabla p \right|^3 \sqrt{1 + 4\beta \left| \nabla p \right| c_1} \,, \end{split}$$

$$\begin{split} a_{22} &= \left(\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1 - \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + 2\beta \mathbf{c}_1 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(D_1 + D_2 \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) \times \\ &\times 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \,, \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \left[- \left(\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1 - \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) + 2\beta \mathbf{c}_1 |\nabla p| + 2D_2 \beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right] \\ &\quad H = \left(\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) 2\beta |\nabla p|^3 + \left(\frac{\partial \mathbf{k}_2}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{k}_2}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\omega}{2\sqrt{\mathbf{k}_2} |\nabla p|} \right) \times \\ &\quad \times 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} - 2\beta \mathbf{f} |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right. \\ &\quad \mathcal{I}_{DB} \text{ уравнения (7):} \\ a_{11} &= \left(\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1 - \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + 2\beta \mathbf{c}_1 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(D_3 + D_4 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) \times \\ &\quad \times 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \,, \\ a_{22} &= \left(\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1 - \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + 2\beta \mathbf{c}_1 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(D_3 + D_4 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) \times \\ &\quad \times 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \,, \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \left[- \left(\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1 - \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) + 2\beta \mathbf{c}_1 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(D_3 + D_4 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) \times \\ &\quad \times 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \,, \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \left[- \left(\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1 - \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) + 2\beta \mathbf{c}_1 |\nabla p| + 2D_4 \beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \right) \right. \\ &\quad \times 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \,, \\ &\quad \times \left[3 - \mathbf{k}_2 |\nabla p|^2 / \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 \mathbf{k}_2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 \mathbf{k}_2} \right)^2 \right] / (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p|^2 \mathbf{k}_2} \,) - \\ &\quad - 2\beta |\nabla p|^3 \sqrt{\mathbf{I} + 4\beta |\nabla p| \mathbf{c}_1} \,. \\ &\quad \mathcal{I}_{DB} \text{ ypabhehum (12):} \\ &\quad a_{11} &= \left(\mathbf{I} + 4 |\nabla p| \rho \beta \mathbf{u}^3 / \mu^2 - \sqrt{\mathbf{I} + 4 |\nabla p| \rho \beta \mathbf{u}^3 / \mu^2} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\rho \beta}{\alpha^2} \mathbf{u}^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\rho \beta}{\alpha^2} \mathbf{u}^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\rho \beta}{\alpha^2} \mathbf{u}^3 |\nabla p| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right)$$

 $+D\left(D_1+D_2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\right)$

$$\begin{split} a_{22} &= \left(\!\! \left[1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 - \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} \right) \!\! \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 \middle| \nabla p \middle| \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right. + \\ &+ D \Bigg(D_1 + D_2 \Bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg)^2 \Bigg), \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg(- 1 - 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 + \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 \middle| \nabla p \middle| + D D_2 \Bigg), \\ H &= \Bigg(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg) \Bigg\| \nabla p \middle|^2 \frac{1}{u} \Big(1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 - \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} \Big) + \\ &+ \frac{6 \rho \beta}{\mu^2} \middle| \nabla p \middle|^3 u^2 \Bigg] + \Bigg(\frac{\partial k_2}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_2}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg) \Bigg(\frac{1}{\mu} - \frac{\omega}{2 \sqrt{k_2} \middle| \nabla p \middle|} \Bigg) D - f D. \\ \mathcal{A} \pi \pi \ y p a b h e h i \mathcal{H} \\ 13 : a_{11} &= \Bigg(1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 - \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} \Bigg) \Bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 \middle| \nabla p \middle| \Bigg(\frac{\partial p}{\partial x} \Bigg)^2 + \\ &+ D \Bigg(D_3 + D_4 \Bigg(\frac{\partial p}{\partial x} \Bigg)^2 \Bigg), \\ a_{22} &= \Bigg(1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 - \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} \Bigg) \Bigg(\frac{\partial p}{\partial x} \Bigg)^2 + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 \middle| \nabla p \middle| \Bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg)^2 + \\ &+ D \Bigg(D_3 + D_4 \Bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg)^2 \Bigg), \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg(- 1 - 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 + \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 \middle| \nabla p \middle| \Bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg)^2 + \\ &+ D \Bigg(D_3 + D_4 \Bigg(\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg)^2 \Bigg), \\ a_{12} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg(- 1 - 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 + \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} + \frac{2 \rho \beta}{\mu^2} u^3 \middle| \nabla p \middle| + D D_4 \Bigg), \\ H &= \Bigg(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg| \Bigg| \nabla p \middle|^2 \frac{1}{u} \Big(1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2 - \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} \Big) + \\ &+ \frac{6 \rho \beta}{\mu^2} \middle| \nabla p \middle|^3 u^2 \Bigg] + \Bigg(\frac{\partial k_2}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_2}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \Big) \Bigg[3 \frac{|\nabla p \middle| \nabla k_2}{2} - \sqrt{1 + 4 \middle| \nabla p \middle| \rho \beta u^3 \middle/ \mu^2} \Big) - \\ &- \frac{k_2^3}{2 \nu} \middle| \nabla p \middle|^3 \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p \middle|^2 k_2} \Bigg(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + |\nabla p \middle|^2 k_2} \Bigg)^2 \Bigg] D - f D. \end{aligned}$$

Весьма важным является вопрос о типе уравнения (14), а по существу уравнений (6), (7), (12), (13), поскольку от этого зависит последующая постановка задачи. Он определяется по знаку дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Проведем соответствующее исследование, например, для уравнения (6). Введем обозначения:

$$A = \sqrt{1+4\beta |\nabla p| c_1} \,, \ L = 2\beta |\nabla p|^3 \, \sqrt{1+4\beta |\nabla p| c_1} \,, \ E = 2\beta c_1 |\nabla p|.$$

В последующих выкладках нижний индекс у функции р означает дифференцирование по соответствующей переменной. Дискриминант d равен

$$\begin{split} d &= a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = p_x^2 p_y^2 \Big[A^2 (A - 1)^2 + E^2 + L^2 D_2^2 - 2 A (A - 1) E - 2 A (A - 1) L D_2 + 2 E L D_2 \Big] - \\ &- A^2 (A - 1) p_x^2 p_y^2 - A (A - 1) E p_x^4 - A (A - 1) L p_x^2 \Big(D_1 + D_2 p_x^2 \Big) - A (A - 1) E p_y^4 - E p_x^2 p_y^2 - \\ &- L E p_y^2 \Big(D_1 + D_2 p_x^2 \Big) - A (A - 1) L p_y^2 \Big(D_1 + D_2 p_y^2 \Big) - L E p_x^2 \Big(D_1 + D_2 p_y^2 \Big) - L^2 \Big(D_1 + D_2 p_x^2 \Big) \times \\ &\times \Big(D_1 + D_2 p_y^2 \Big) = - A (A - 1) E \Big(p_x^4 + 2 p_x^2 p_y^2 + p_y^4 \Big) - A (A - 1) L D_2 \Big(p_x^4 + 2 p_x^2 p_y^2 + p_y^4 \Big) - \\ &- A (A - 1) L D_1 \Big(p_x^2 + p_y^2 \Big) - E L D_1 \Big(p_x^2 + p_y^2 \Big) - L^2 D_1^2 - L^2 D_1 D_2 \Big(p_x^2 + p_y^2 \Big) = - A (A - 1) E \Big| \nabla p \Big|^4 - \\ &- A (A - 1) L D_2 \Big| \nabla p \Big|^4 - A (A - 1) L D_1 \Big| \nabla p \Big|^2 - E L D_1 \Big| \nabla p \Big|^2 - L^2 D_1^2 - L^2 D_1 D_2 \Big| \nabla p \Big|^2. \end{split}$$

У величины $A = \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p|} c_1$ берется только положительное значение. Величина A-1 фигурирует в законе Форхгеймера (2) и положительность ее следует из того, что скорость фильтрации направлена противоположно градиенту давления. Величины β , c_1 , $|\nabla p|$ положительные, следовательно, функции L и E тоже положительные. Выражение D_1 фигурирует в «криволинейном» законе фильтрации (3) при $|\nabla p| \ge \beta_1$. Положительность его опять вытекает из того, что скорость фильтрации направлена противоположно градиенту давления. В выражении D_2 стоят только положительные величины. Из проведенных рассуждений вытекает, что знак дискриминанта d, записанного в виде (15), отрицательный, а уравнение (6) принадлежит к эллиптическому типу. Аналогичные исследования проводятся и для уравнений (7), (12), (13). Они тоже принадлежат к эллиптическому типу. Для них могут ставиться задачи Дирихле, Неймана и смешанная.

Уравнение (14) с помощью преобразования переменных может быть записано, как известно, в каноническом виде

$$\Delta p + H\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0,$$
 (16)

где вместо новых переменных x_1 , y_1 опять пишем для удобства x, у. Теперь сформулируем задачу определения поля давлений в неоднородной трещиновато-пористой среде. Важно прежде всего получить решение для круговой области единичного радиуса с одной эксцентричной скважиной.

В области $D = \{r \in [0;1]\}$ с границей ∂D найти решение уравнения (16), удовлетворяющее условиям:

- 1) $p = p_{\kappa}(\theta)$ при r = 1, где $p_{\kappa}(\theta)$ заданное распределение давления на контуре питания (краевое условие);
- 2) в точке $A_i(x_i, y_i)$ функция р имеет логарифмическую особенность заданного дебита Q_i и справедливо равенство

$$\lim_{\gamma_i \to 0} \oint B_2 \, \frac{\partial p}{\partial n} \, ds = Q_i,$$

где γ_i — произвольный контур, охватывающий скважину; n — внутренняя нормаль к нему; B_2 — ранее записанное выражение из формул (4) или (10).

Для решения задачи воспользуемся тем же методом, что и в работе [5]. Делается замена переменных $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/2i$, (i — мнимая единица), где \overline{z} - комплексно сопряженная z переменная). В новых переменных уравнение (16) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z} \partial \overline{\mathbf{z}}} + 0.25 \mathbf{H} \left(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}, \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \overline{\mathbf{z}}} \right) = 0. \tag{17}$$

Далее оно дважды интегрируется

$$p(z, \overline{z}) = \varphi(z) + \psi(\overline{z}) - 0.25 \int_{z_i}^{z} \int_{z_i}^{\overline{z}} H\left(\zeta, \overline{\zeta}, p, \frac{\partial p}{\partial \zeta}, \frac{\partial p}{\partial \overline{\zeta}}\right) d\zeta d\overline{\zeta},$$
(18)

где ф и ψ - произвольные аналитические функции своих аргументов.

Интегро-дифференциальное уравнение (18) решается методом итераций. Дальнейшее решение проводится аналогично указанной работе.

По данному алгоритму проводились расчеты примеров в случаях существования точного аналитического решения задачи. Эти решения получены аналогично тому, как это было сделано в работе [5] и некоторых других публикациях автора. Рассматривалась плоско-радиальная фильтрация к центральной скважине в круговом пласте .Брались линейные и экспоненциальные распределения проницаемости в трещинах и блоках Записывались соответствующие точные решения задачи, которые использовались в дальнейшем. При проведении численных расчетов использовался программный продукт "Mathcad 7.0 Professional". Погрешность приближенного решения в них оказалась в пределах практических требований точности. Более подробно результатам расчетов будет посвящена отдельная публикация.

Литература

- 1. Шаймуратов Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980. 224 с.
- 2. Наказная Л.Г. Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах. М.: Недра, 1972. 184 с.
- 3. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Джалилов К.Н., Мамедов А.М., Мустафазаде Ф.М. Гидрогазодинамика трещиноватых коллекторов. Баку: Элм, 1988. 292 с.
- 4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
- 5. Голубев Г.В. Определение поля давлений при фильтрации жидкостей в неоднородной трещиноватой пористой среде // Вестник Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева, 2003. № 1. С. 27-31.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ОБЛИКА АВИАЦИОННЫХ СРЕДСТВ ПОРАЖЕНИЯ

В.В. Гуляев, Е.Д. Икрянников, Ю.В. Смелтер Россия, Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского

Рассматриваются математические модели процессов обтекания, использованные в процессе аэродинамического проектирования ракеты с крыльями малого удлинения. На основе сопоставительного анализа расчетных характеристик и данных трубного эксперимента оцениваются области рационального использования математических моделей различных классов.

В современных условиях решающим фактором для успешного формирования облика авиационных средств поражения (АСП) является использование эффективных численных методов определения аэродинамических характеристик. В этой связи с особой остротой встает вопрос о выборе методов вычислительной аэродинамики, использование которых наиболее предпочтительно для решения задач формирования облика управляемых АСП. Анализ применяемых методов расчета аэродинамических характеристик, использующихся в отечественной и зарубежной практике, показал, что в наибольшей мере требованиям задач проектирования отвечает метод дискретных вихрей (МДВ) [1,2]. Целью настоящей работы является краткий анализ основных задач обтекания АСП и определения их аэродинамических характеристик при дозвуковых скоростях полета, которые могут решаться с помощью МДВ на этапе аэродинамического проектирования, на примере исследования аэродинамических характеристик варианта компоновки высокоточного АСП.

Будем полагать, что исследуемый объект (АСП) совершает движение в безграничной невязкой, однородной, баротропной и сжимаемой (в общем случае) среде с постоянной дозвуковой скоростью. При этих условиях возмущенное течение можно считать потенциальным, за исключением следа за исследуемым объектом. Тогда задача расчета обтекания АСП сводится к отысканию потенциала возмущенных скоростей, который в случае несжимаемой среды удовлетворяет уравнению Лапласа, а в случае сжимаемой — волновому уравнению, которое при предположении о малости возмущений можно линеаризовать. В случае установившегося слабовозмущенного течения сжимаемой среды волновое уравнение путем преобразования Прандтля-Глауэрта может быть приведено к уравнению Лапласа.

Кроме собственно уравнения Лапласа искомый возмущенный потенциал должен удовлетворять ряду граничных (краевых) условий, к числу которых относятся: условие непротекания, Чаплыгина-Жуковского, условие на вихревой пелене и затухания возмущений на бесконечном удалении от АСП и его следа.

Представление о малости возмущений, вносимых АСП в воздушный поток, используемое при линеаризации уравнений для возмущенного потенциала скоростей, оправдывается тогда, когда форма обтекаемого АСП удовлетворяет ряду ограничений, а именно: тело должно быть достаточно тон-

ким, а его элементы слабо изогнутыми. Это позволяет при решении линейных задач применять упрощенную схематизацию АСП, при которой все поверхности АСП заменяются тонкими плоскими базовыми элементами. Пример подобной схематизации АСП с крестообразными крыльями показан на рис.1. При решении нелинейных задач такую схематизацию также можно использовать, однако в ряде случаев она не обеспечивает требуемой точности получаемых характеристик. Поскольку в нелинейных задачах отсутствует ограничение, связанное с предположением о малости возмущений, то и схематизация АСП может иметь достаточно выраженные объемные элементы, в частности такие, как корпус (рис.2).

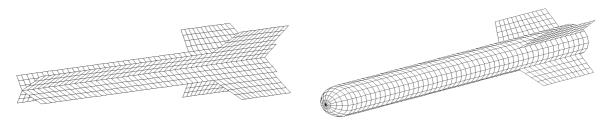


Рис. 1. Рис. 2. *Различные способы схематизации АСП.*

Эффективным способом решения как линейных, так и нелинейных задач является метод граничных интегральных уравнений. Решение уравнения Лапласа представляется в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности АСП и вихревой пелены. Подстановка потенциала двойного слоя в граничное условие непротекания приводит к интегральному сингулярному уравнению относительно плотности двойного слоя на поверхности схематизированного АСП [3].

При решении нелинейных аэродинамических задач форма вихревой пелены заранее неизвестна и должна определяться в процессе решения задачи обтекания. При этом каждому набору кинематических параметров соответствует своя форма поверхности и поэтому нелинейная задача должна решаться независимо для каждого кинематического параметра, в то время, как в линейных задачах набор производных потенциала в полной мере исчерпывает все задачи обтекания при заданном числе Маха.

Для определения формы вихревой пелены в нелинейных задачах интегральное уравнение дополняется однопараметрическим семейством интегродифференциальных уравнений, которые являются следствием граничного условия на пелене и позволяют найти ее форму. Нелинейные стационарные задачи, таким образом, решаются итерационно, а нестационарные — последовательно по временным шагам.

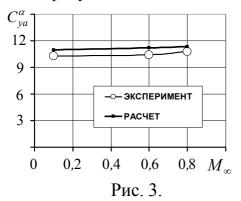
Метод дискретных вихрей представляет собой метод решения соответствующих интегральных уравнений, при котором непрерывный двойной слой, заменяется системой замкнутых вихревых рамок. Граничное условие непротекания выполняется в дискретном множестве контрольных точек, каждая из которых располагается в «центре» вихревых рамок. Совокупность уравнений, выражающих условие непротекания в каждой контрольной точке, дает систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно ис-

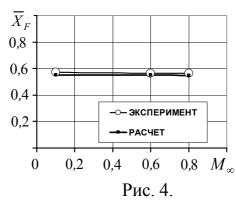
комых циркуляций. Нелинейные задачи должны дополняться каким-нибудь методом численного решения интегро-дифференциальных уравнений.

После определения циркуляций вихревых рамок аэродинамические нагрузки могут быть вычислены с помощью интеграла Коши-Лагранжа. Последующим интегрированием распределенной нагрузки можно определить любые суммарные аэродинамические характеристики АСП и его элементов.

В качестве объекта исследований был выбран вариант высокоточного АСП с крестообразными несущими поверхностями, расположенными в концевой части корпуса.

Полученные расчетом линейные аэродинамические характеристики АСП с дестабилизатором сравнивались с данными экспериментальных исследований. На рис.3 и 4 представлены зависимости производной коэффициента подъемной силы по углу атаки и относительной координаты аэродинамического фокуса от числа Маха.





3ависимость C_{va}^{α} и X_F от числа Mаха M.

Видно, что аэродинамические производные весьма слабо зависят от числа M_{∞} . Это характерная особенность характеристик тел с несущими поверхностями малого удлинения [1]. Экспериментальные и расчетные данные достаточно хорошо согласуются между собой.

На рис.5 показаны расчетные и экспериментальные зависимости коэффициентов подъемной силы, момента тангажа и относительной координаты центра давления от угла атаки, полученные при числе Маха равном 0,1.

Анализ результатов, приведенных на рис.5, показывает, что линейная теория с достаточной степенью точности позволяет определять аэродинамические характеристики АСП в диапазоне углов атаки до $10...12^{\circ}$. При больших углах атаки наблюдается существенная нелинейность в экспериментальных зависимостях $c_{ya}(\alpha)$ и $m_z(\alpha)$. Такой характер экспериментальных зависимостей $c_{ya}(\alpha)$ и $m_z(\alpha)$ связан с возрастанием роли упорядоченных вихревых структур, образующихся при обтекании боковых кромок несущих поверхностей и располагающихся в непосредственной близости над ними. Свойственное течению в упорядоченном вихре разряжение охватывает значительную часть верхней поверхности крыльев, что и приводит к возникновению значительной вихревой составляющей подъемной силы и, соответственно, момента тангажа. Естественно, что в рамках линейной теории подобные эффекты учтены быть не могут.

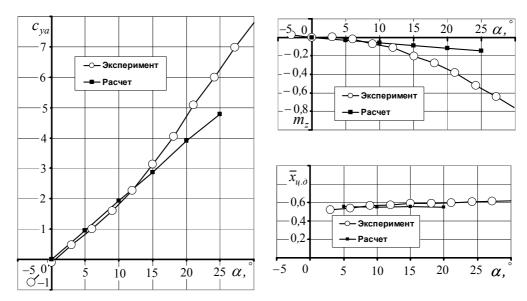


Рис. 5. Зависимость C_{va} , m_z и $x_{u.\partial.}$ от угла атаки α .

Аэродинамические характеристики варианта АСП, у которого дестабилизатор отсутствует, исследовались как экспериментально, так и с использованием методов математического моделирования. При этом аэродинамические характеристики АСП рассчитывались для различных схематизаций изделия в рамках линейного и нелинейного приближений.

Для расчета линейных характеристик использовалась схематизация АСП в виде тонких плоских пластин (рис.1), а соответствующие задачи обтекания решались в стационарной постановке. Нелинейные аэродинамические характеристики определялись для АСП схематизированного так же, как и в линейной задаче, и при схематизации в виде телесного корпуса и тонких несущих поверхностей (рис.2). Нелинейные задачи обтекания решались как нестационарные, а соответствующие аэродинамические характеристики определялись как предельные при больших значениях времени.

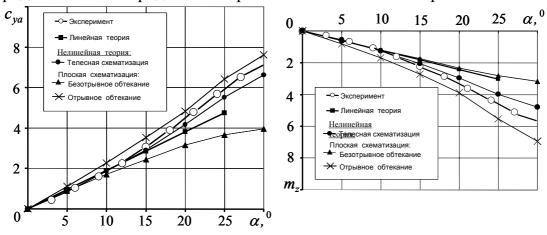


Рис. 6. Зависимость C_{ya} и m_z от угла атаки при числе $M_{\infty}{=}0.1$.

На рис.6 показаны зависимости коэффициентов подъемной силы и момента тангажа АСП от угла атаки при числе $M_\infty=0,1$, из которых видно, что при умеренных значениях угла атаки ($\alpha<10...12^\circ$) выбор вида схематизации АСП, характера математической модели и схемы течения практически не влияет на полученный расчетный результат. Все расчетные результаты в

этом диапазоне углов атаки близки друг другу и согласуются с данными трубного эксперимента.

При больших углах атаки, аэродинамические коэффициенты, полученные с использованием разных схематизаций АСП и различных схем обтекания, существенно отличаются друг от друга. Наихудшие в смысле совпадения с данными эксперимента результаты дает нелинейная математическая модель, если считать, что вихревые пелены сходят только с задних кромок несущих поверхностей. Моделирование вихревой пелены, сходящей с боковых кромок несущих поверхностей, при любом способе схематизации АСП в полной мере отражает качественный характер протекания зависимостей, полученных экспериментальным путем.

Как было отмечено выше, причиной возникающих нелинейностей является формирование устойчивых вихревых жгутов, создающих дополнительное разряжение, что подтверждается рис.7, на котором показана картина обтекания АСП при угле атаки $\alpha=15^\circ$.



Рис. 7. Картина обтекания АСП.

Моделирование АСП тонкими поверхностями приводит к результатам, несколько завышенным по сравнению с экспериментальными. Это объясняется, по видимому, тем, что в случаях отрывного вихревого течения корпус, моделируемый как крыло сверхмалого удлинения, создает значительную подъемную силу вихревой природы, чего нет в действительности на корпусе кругового сечения. Как видно из рис.6, наилучшее согласование с результатами эксперимента при больших значениях угла атаки обеспечивает модель отрывного обтекания АСП, схематизированного телесным корпусом и тонкими несущими поверхностями, поскольку именно она в наибольшей степени адекватна реализующимся в этих условиях эффектам.

Представленные в настоящей статье материалы позволяют сделать вывод, что МДВ является мощным и эффективным средством исследования процессов обтекания АСП в широком диапазоне режимов и условий полета, способным обеспечить все этапы проектирования надежными и достоверными аэродинамическими характеристиками.

Аэродинамические характеристики АСП при малых значениях кинематических параметров надежно определяются с помощью экономичных линейных математических моделей, при больших – нелинейных.

Литература

- 1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
- 2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
- 3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗЛУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ИЗ ПРОДОЛЬНЫХ ЩЕЛЕЙ В ПРЯМОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

С.В. Духопельников

Украина, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, e-mail: sergey_dukh@ukr.net

Дан вывод гиперсингулярного интегрального уравнения задачи дифракции Е-поляризованной волны на круговом цилиндре с продольными щелями. Дискретная математическая модель построена методом дискретных особенностей и на ее основе проведен численный эксперимент.

Постановка задачи.

В работе единственна отличная от нуля компонента электрического поля гармонически зависит от времени $E_z = e^{-i\omega t}u(r,\phi)$. Комплексная амплитуда $u(r,\phi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

граничному условию Дирихле

$$u(a,\phi) = 0, \quad \phi \in CL, \tag{2}$$

известным условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности и Майкснера на ребре.

Здесь
$$\phi \in L = \bigcup_{q=1}^{N} (a_q, b_q)$$
, щели в сечении цилиндра, $CL = [0, 2\pi] \setminus L$.

Полное поле ищем в виде:

$$u = \begin{cases} u_0(r,\phi) + u^+(r,\phi), & r < a, \\ u^-(r,\phi), & r > a, \end{cases}$$

 $u_0=H_0^{(1)}(kr)-rac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}H_0^{(2)}(kr)$ — заданная цилиндрическая волна, при

$$r < a, u_0|_{r-a} \equiv 0.$$

Из (1) и представления полного поля следует, что функции $u^{\pm}(r,\phi)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^{\pm} + k^2 u^{\pm} = 0. \tag{3}$$

В щели цилиндра выполняются условия сопряжения:

$$\left(u_0 + u^+\right)_{r=a} = u^-\Big|_{r=a}, \quad \phi \in L,$$
 (4)

$$\partial_r \left(u_0 + u^+ \right)_{r=a} = \partial_r u^- \Big|_{r=a}, \quad \phi \in L.$$
 (5)

Фурье-представления для u^{\pm} имеют вид:

$$u^{+} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{+} J_n(kr) e^{in\phi}, \qquad r < a,$$

$$u^{-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{-} H_n^{(1)}(kr) e^{in\phi}, \qquad r > a,$$

где $J_n(kr)$ – функция Бесселя n-ого порядка, $H_n^{(1)}(kr)$ – функция Ханкеля первого рода, п-ого порядка.

Эти представления удовлетворяют (3), при этом u^+ ограничена в нуле, а u^- удовлетворяет условию излучения на бесконечности.

Вывод гиперсингулярного интегрального уравнения.

Используя граничное условие (2) и условия сопряжения получаем парное сумматорное уравнение:

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} kC_n \left[\frac{J_n'(ka)}{J_n(ka)} - \frac{H_n^{(1)'}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \right] e^{in\phi} = -\partial_r u_0 \big|_{r=a}, \quad \phi \in L \qquad (6) \right. \\
\left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL \qquad (7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = 0, \qquad \phi \in CL$$
 (7)

где $C_n = C_n^+ J_n(ka) = C_n^- H_n^{(1)}(ka)$.

Обозначим

$$\Gamma_{n} = \left[\frac{J_{n}'(ka)}{J_{n}(ka)} - \frac{H_{n}^{(1)'}(ka)}{H_{n}^{(1)}(ka)} \right] = A_{0}|n| + A_{1}\frac{1}{|n|} + \overline{o}\left(\frac{1}{n^{2}}\right), \tag{8}$$

где
$$A_0 = \frac{2}{ka}$$
, $A_1 = -ka$.

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию:

$$v(\phi) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} \tag{9}$$

С учетом (2) из (9) получаем представление для коэффициентов Фурье:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_L v(\theta) e^{-in\theta} d\theta \tag{10}$$

или с учетом (6), имеем:

$$A_{0} \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_{n} |n| e^{in\phi} + A_{1} \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_{n} \frac{1}{|n|} e^{in\phi} + C_{0} \Gamma_{0} + \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_{n} \left[\Gamma_{n} - A_{0} |n| - A_{1} \frac{1}{|n|} \right] e^{in\phi} = -k^{-1} \partial_{r} u_{0}|_{r=a}.$$

$$(11)$$

Используя параметрические представления гиперсингулярного интегрального оператора и интегрального оператора с логарифмическим ядром [2] и (10) получаем гиперсингулярное интегральное уравнение (ГСИУ) следующего вида:

$$-\frac{A_{0}}{2\pi}\int_{L} \frac{v(\theta)}{2\sin^{2}\frac{\theta-\phi}{2}}d\theta - \frac{A_{1}}{\pi}\int_{L} v(\theta)\ln\left|\sin\frac{\theta-\phi}{2}\right|d\theta - \frac{A_{1}\ln2}{\pi}\int_{L} v(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{L} K(\theta,\phi)v(\theta)d\theta + \frac{\Gamma_{0}}{2\pi}\int_{L} v(\theta)d\theta = -k^{-1}\partial_{r}u_{0}\big|_{r=a}$$

$$(12)$$
где $K(\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_{n} - A_{0}|n| - A_{1}\frac{1}{|n|}\right] \cos(n(\phi-\theta))$

$$-\frac{A_{0}}{\pi}\int_{a_{q}}^{b_{q}} \frac{v_{q}(\theta)}{(\theta-\phi)^{2}}d\theta - \frac{A_{1}}{\pi}\int_{a_{q}}^{b_{q}} v_{q}(\theta)\ln|\theta-\phi|d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{N}\int_{a}^{b_{p}} K_{qp}(\theta,\phi)v_{q}(\theta)d\theta = f_{q}(\phi), \ \phi \in L_{q}, \ q=1...N,$$

$$K_{qq}(\theta,\phi) = K(\theta,\phi) + \frac{\Gamma_0}{2} - \frac{A_0}{2} \left\{ \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta - \phi}{2}} - \frac{2}{(\theta - \phi)^2} \right\} - A_1 \ln \left| \frac{\sin\frac{\theta - \phi}{2}}{\frac{\theta - \phi}{2}} \right|,$$

$$K_{qp}(\theta,\phi) = K(\theta,\phi) + \frac{\Gamma_0}{2} - A_1 \ln 2 - \frac{A_0}{2} \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta - \phi}{2}} - A_1 \ln \left| \sin\frac{\theta - \phi}{2} \right|, \text{ при } q \neq p.$$

Используя линейные замены переменных $\theta = l_q t + \frac{b_q + a_q}{2}$, $l_q = \frac{b_q - a_q}{2}$, перейдем от L_q к интервалу (-1,1). В соответствии с условием Майкснера положим $v_q(q) = \gamma_q(t) \sqrt{1-t^2}$, где $\gamma_q(t)$ – гладкая функция.

$$\frac{A_0}{\pi l_q} \int_{-1}^{1} \frac{\gamma_q(t)\sqrt{1-t^2}}{(t-t_0)^2} dt + \frac{A_1 l_q}{\pi} \int_{-1}^{1} \gamma_q(t) \ln|t-t_0| \sqrt{1-t^2} dt + \frac{A_1 l_q \ln|l_q|}{\pi} \int_{-1}^{1} \gamma_q(t) dt - \frac{A_1 l_q \ln|l_q|}{\pi} \int_{-1}^{1} \gamma_q(t)$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{N} l_p \int_{-1}^{1} K_{qp}(t, t_0) \gamma(t) \sqrt{1 - t^2} dt = -f_q(t_0), \qquad |t_0| < 1, \ q = 1...N.$$

Дискретная математическая модель для ГСИУ.

Заменяя неизвестные функции $\gamma_p(t)$, ядра $K_{qp}(t,t_0)$ и правые части $f_q(t_0)$ интерполяционными полиномами по переменным t и t_0 с узлами — нулями полиномов Чебышева II рода $U_{n-1}(t)$, и используя для дискретизации квадратурные формулы интерполяционного типа [3], выпишем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для нахождения приближенных значений искомых функций.

$$\frac{A_{0}}{l_{q}n_{q}} \sum_{k=1}^{n_{q}-1} \gamma_{q}(t_{0k}) (1 - (t_{0k})^{2}) \frac{1 - (-1)^{j+k}}{(t_{0j} - t_{0k})^{2}} - \frac{A_{0}}{l_{q}} \frac{n_{q}}{2} \gamma_{q}(t_{0j}) - \frac{A_{1}l_{q}}{n} \sum_{k=1}^{n_{q}-1} \gamma_{q}(t_{0k}) (1 - (t_{0k})^{2}) \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n_{q}-1} \frac{1}{r} T_{r}(t_{0k}) T_{r}(t_{0j}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2n_{q}} \right] + \left(A_{1} \ln l_{q} \right) \frac{1}{n_{q}} \sum_{k=1}^{n_{q}-1} \gamma_{q}(t_{0k}) (1 - (t_{0k})^{2}) - \frac{1}{n_{p}} \sum_{k=1}^{n_{p}-1} \gamma_{p}(t_{0k}) (1 - (t_{0k})^{2}) K_{q,p,n-2}(t_{0k}, t_{0j}) = -f_{q}(t_{0j}), \quad q = 1...N. \quad (13)$$

Построенная дискретная математическая модель строго обоснована в [3].

Для поля вне цилиндра, из полученной СЛАУ (13), находим неизвестную функцию $v(\theta)$. Используя (10) восстанавливаем его:

$$u^{-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{L} v(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right) H_{n}^{(1)}(kr) e^{in\phi}, \qquad r > a$$

по найденным значениям строим диаграмму направленности поля в дальней зоне:

$$D_{E}(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n} \frac{e^{-i\frac{\pi n}{2}}}{H_{n}^{(1)}(ka)} e^{in\phi} . \tag{14}$$

Численный эксперимент.

На базе изложенного метода был проведен численный эксперимент: задача решалась при различных размерах щелей и значениях волнового числа. Были построены диаграммы направленности. Расчеты проводились в системе MatLab 6.5 и Mathematic 4.2.

Для одинаковых значений параметров (размер щели и волновое число) счет велся при различном количестве узловых точек. Численный эксперимент показал, что счет устойчив и приближенное решение весьма быстро сходиться к точному.

На рис. 1-2 представлены численные решения для цилиндра с одной щелью.

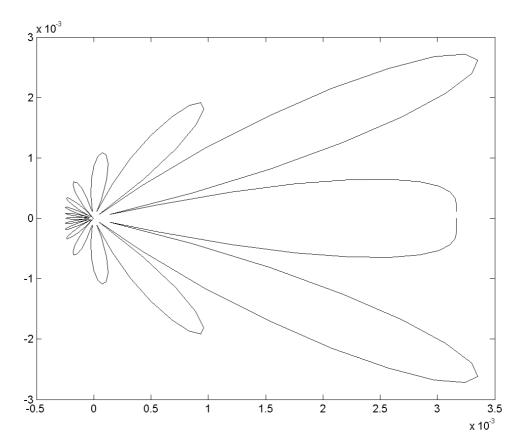


Рис.1. Диаграмма направленности излучения в случае $a=-1^0$ $b=1^0$ k=9 n=15.

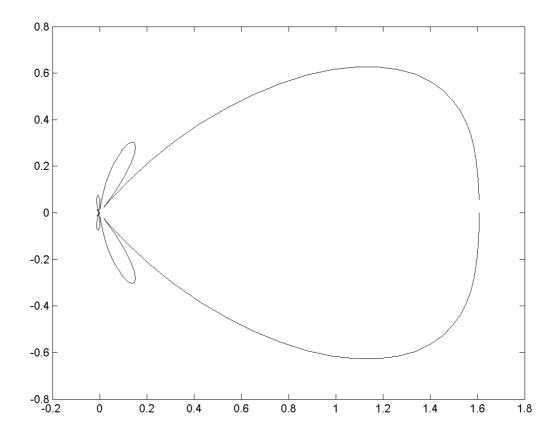


Рис. 2. Диаграмма направленности излучения в случае $a=30^0$ $b=30^0$ k=6 n=15.

Автор благодарен профессору Ю.В. Ганделю за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

- 1. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. М.: Изд. АН СССР, 1986. ВК-124. С. 166-183.
- 2. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. X-2000. 92 с.
- 3. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. Харьков: ХГУ, 1992. 145с.
- 4. Гандель Ю.В., Lana Saksonov Гиперсингулярное интегральное уравнение задачи дифракции электромагнитных волн на многоэлементных решетках // Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2003), Харьков-Херсон, 2003, с.65-70

УДК 517.968.519.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРОДОЛЬНЫХ ЩЕЛЯХ В ВОЛНОВОДЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

С.В. Духопельников

Украина, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, e-mail: sergey_dukh@ukr.net

Дан вывод гиперсингулярного интегрального уравнения задачи дифракции Н-поляризованной волны на круговом цилиндре с продольными щелями. Дискретная математическая модель построена методом дискретных особенностей, проведен численный эксперимент, на основе которого полученные результаты сравниваются в некоторых частных случаях с известными исследованиями.

Рассматривается задача излучения монохроматической Н-поляризованной волны из продольных щелей в волноводе кругового сечения. В работах Шестопалова В.П., Носича А.И. [1,2] решены некоторые подобные задачи, с использованием метода задачи Римана-Гильберта и приведены численные решения. Там же описаны проблемы возникающие при рассмотрении некоторых частных случаев. Эти проблемы не возникают при использовании метода дискретных особенностей [3], на базе которого построена математическая модель в данной работе.

Постановка задачи.

В работе единственна отличная от нуля компонента магнитного поля гармонически зависит от времени $H_z = e^{-i\omega t} u(r,\phi)$. Комплексная амплитуда

 $u(r,\phi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

граничному условию Неймана:

$$\partial_r u(r,\phi)|_{r=a} = 0, \quad \phi \in CL,$$
 (2)

известным условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности и Майкснера на ребре.

Полное поле ищем в виде:

$$u = \begin{cases} u_0 + u^+, & r < a, \\ u_0 + u^-, & r > a, \end{cases}$$

 $u_0=e^{ikr\cos\phi}$ плоская волна, u_0 - решение уравнения (1), $\left.u_0\right|_{r=a}\equiv 0$.

Из (1) и представления полного поля следует, что $u^{\pm}(r,\phi)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^{\pm} + k^2 u^{\pm} = 0. \tag{3}$$

В щели выполняются условия сопряжения:

$$(u_0 + u^+)_{r=a} = (u_0 + u^-)_{r=a}, \quad \phi \in L$$
 (4)

$$\partial_r \left(u_0 + u^+ \right)_{r=a} = \partial_r \left(u_0 + u^- \right)_{r=a} = 0, \quad \phi \in L$$
 (5)

Фурье-представления для u^{\pm} имеют вид:

$$u^{+} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n}^{+} J_{n}(kr) e^{in\phi}, \qquad r < a,$$

$$u^{-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{-} H_n^{(1)}(kr) e^{in\phi}, \qquad r > a,$$

где $J_n(kr)$ функция Бесселя n-ого порядка, $H_n^{(1)}(kr)$ функция Ханкеля первого рода, n-ого порядка. Эти представления удовлетворяют (3), при этом u^+ ограничена в нуле, а u^- удовлетворяет условию излучения на бесконечности.

Вывод гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ).

Используя граничное условие (2) и условия сопряжения получаем парное сумматорное уравнение:

$$\begin{cases}
\sum_{-\infty}^{\infty} k C_n \frac{J_n'(ka)}{J_n'(ka)} e^{in\phi} = -\partial_r u_0(r,\phi)|_{r=a}, & \phi \in CL, \\
\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \left[\frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right] e^{in\phi} = 0, & \phi \in L,
\end{cases}$$
(6)

где положим $C_n^+ J_n^{'}(ka) = C_n^- H_n^{(1)}(kd) = C_n$

Перепишем (6) вводя новые независимые коэффициенты:

$$A_{n} = C_{n} \left[\frac{J_{n}(ka)}{J_{n}'(ka)} - \frac{H_{n}^{(1)}(ka)}{H_{n}^{(1)}'(ka)} \right]$$

парное уравнение принимает вид:

$$\left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} k A_n \left[\frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right]^{-1} e^{in\phi} = -\partial_r u_0(r,\phi) \Big|_{r=a}, \quad \phi \in CL, \tag{7} \right.$$

$$\left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\phi} = 0, \qquad \phi \in L. \tag{8} \right.$$

Введем обозначение

$$\varGamma_n = \left[\frac{J_n(ka)}{J_n^{'}(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right]^{-1} = B_0 \left| n \right| + B_1 \frac{1}{|n|} + \overline{o} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$
 где $B_0 = \frac{1}{2ka}$, $B_1 = -\frac{ka}{4}$.

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию:

$$v(\phi) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} A_n e^{in\phi} . \tag{9}$$

С учетом (2) из (9) выразим все искомые коэффициенты A_n через введенную функцию $v(\theta)$:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{CL} v(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (10)

А для $v(\theta)$, используя параметрические представления гиперсингулярного интегрального оператора и интегрального оператора с логарифмическим ядром [2] и (10) получаем гиперсингулярное интегральное уравнение (ГСИУ) следующего вида::

$$-\frac{B_0}{2\pi} \int_{CL} \frac{v(\theta)}{2\sin^2 \frac{\theta - \phi}{2}} d\theta - \frac{B_1}{\pi} \int_{CL} v(\theta) \ln \left| \sin \frac{\theta - \phi}{2} \right| d\theta - \frac{B_1 \ln 2}{\pi} \int_{CL} v(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{CL} K(\theta, \phi) v(\theta) d\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_{CL} v(\theta) d\theta = -k^{-1} \partial_r u_0 \Big|_{r=a} = f(\phi),$$

$$\text{где } K(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\Gamma_n - B_0 |n| - B_1 \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(\phi - \theta)).$$

$$(11)$$

Произведя в (11) замену $\theta = (\pi - \varepsilon)t + \phi_0 - \pi$ и учитывая условие на ребре $v(\theta) = \gamma(t)\sqrt{1-t^2}$, где $\gamma(t)$ -гладкая функция, получаем окончательно ГСИУ для $\gamma(t)$ на стандартном интервале (-1,1).

$$\frac{B_{0}}{\pi\varepsilon^{2}} \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(t)\sqrt{1-t^{2}}}{(t-t_{0})^{2}} dt + \frac{B_{1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(t) \ln|t-t_{0}| \sqrt{1-t^{2}} dt + \frac{B_{0}}{2\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(t) \left\{ \frac{1}{2\sin^{2}\frac{\varepsilon}{2}(t-t_{0})} - \frac{2}{\varepsilon^{2}(t-t_{0})^{2}} \right\} \sqrt{1-t^{2}} dt + \frac{B_{1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(t) \ln \left| \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}(t-t_{0})}{\frac{\varepsilon}{2}(t-t_{0})} \right| \sqrt{1-t^{2}} dt + \left(\frac{B_{1}\ln\varepsilon}{\pi} - \frac{\Gamma_{0}}{2\pi} \right) \int_{-1}^{1} \gamma(t) \sqrt{1-t^{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} K(\varepsilon t, \varepsilon t_{0}) \gamma(t) \sqrt{1-t^{2}} dt = -\varepsilon^{-1} f(\varepsilon t_{0}), \qquad |t_{0}| < 1$$

Дискретная математическая модель для ГСИУ.

Заменяя неизвестную функцию $\gamma(t)$, ядро $K(\varepsilon t, \varepsilon t_0)$ и правые части $f_q(t_0)$ интерполяционными полиномами по переменным t и t_0 с узлами – нулями полиномов Чебышева II рода $U_{n-1}(t)$, и используя для дискретизации квадратурные формулы интерполяционного типа [5], выпишем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для приближенных значений искомых функций:

$$\frac{B_{0}}{\varepsilon^{2}n} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n-2} \left(t_{0k}^{n-1} \left(1 - \left(t_{0k}^{n-1}\right)^{2}\right) \frac{1 - \left(-1\right)^{j+k}}{\left(t_{0j}^{n-1} - t_{0k}^{n-1}\right)^{2}} - \frac{B_{0}}{\varepsilon^{2}} \frac{n}{2} \gamma_{n-2} \left(t_{0j}^{n-1}\right) - \frac{B_{0}}{\varepsilon^{2}} \frac{n}{2} \gamma_{n-2} \left(t_{0j}^{n-1}\right) - \frac{B_{0}}{\varepsilon^{2}} \frac{n}{2} \gamma_{n-2} \left(t_{0j}^{n-1} \left(1 - \left(t_{0k}^{n-1}\right)^{2}\right)\right) \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} T_{r} \left(t_{0k}^{n-1}\right) T_{r} \left(t_{0j}^{n-1}\right) + \frac{\left(-1\right)^{k+j}}{2n}\right] + \frac{B_{0}}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n-2} \left(t_{0k}^{n-1} \left(1 - \left(t_{0k}^{n-1}\right)^{2}\right)\right) \left\{\frac{1}{2\sin^{2} \frac{\varepsilon}{2} \left(t_{0k}^{n-1} - t_{0j}^{n-1}\right)} - \frac{2}{\varepsilon^{2} \left(t_{0k}^{n-1} - t_{0j}^{n-1}\right)^{2}}\right\} + \frac{B_{1}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n-2} \left(t_{0k}^{n-1} \left(1 - \left(t_{0k}^{n-1}\right)^{2}\right)\right) \ln \left|\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \left(t_{0k}^{n-1} - t_{0j}^{n-1}\right)}{\frac{\varepsilon}{2} \left(t_{0k}^{n-1} - t_{0j}^{n-1}\right)}\right| + \left(B_{1} \ln \varepsilon - \frac{\Gamma_{0}}{2}\right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n-2} \left(t_{0k}^{n-1} \left(1 - \left(t_{0k}^{n-1}\right)^{2}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n-2} \left(t_{0k}^{n-1} \left(1 - \left(t_{0k}^{n-1}\right)^{2}\right)\right) K_{n-2} \left(\varepsilon t_{0k}^{n-1}, \varepsilon t_{0k}^{n-1}\right) = -\varepsilon^{-1} f \left(\varepsilon t_{0j}^{n-1}\right).$$

Построенная дискретная математическая модель строго обоснована в [3].

Для поля вне цилиндра, из полученной СЛАУ, находим неизвестную функцию $v(\theta)$. Используя (10) восстанавливаем его:

$$u^{-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{CL} v(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right) \Gamma_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\phi}, \quad r > a$$

и диаграмму направленности поля в дальней зоне:

$$D_E(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Gamma_n \frac{e^{-i\frac{\pi n}{2}}}{H_n^{(1)}(ka)} e^{in\phi} . \tag{12}$$

Численный эксперимент.

На базе изложенного метода был проведен численный эксперимент: задача решалась при различных размерах щелей и значениях волнового числа. Были построены диаграммы направленности. Расчеты проводились в системе MatLab 6.5 и Mathematic 4.2.

Для случая плоской волны, полученные результаты сравнивались с результатами приведенными в работе Носича А.И. [2]. Визуальное сравнение дало положительный результат. На рис.1-2 приведены диаграммы направленности полученные по формуле (11).

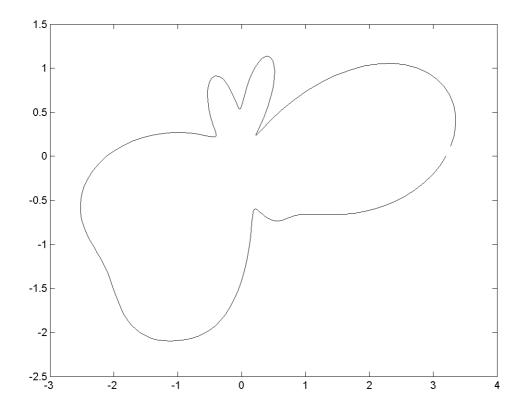


Рис. 1. Диаграмма направленности излучения в случае ϕ_0 =135 ϵ =5 k=3.0 n=15.

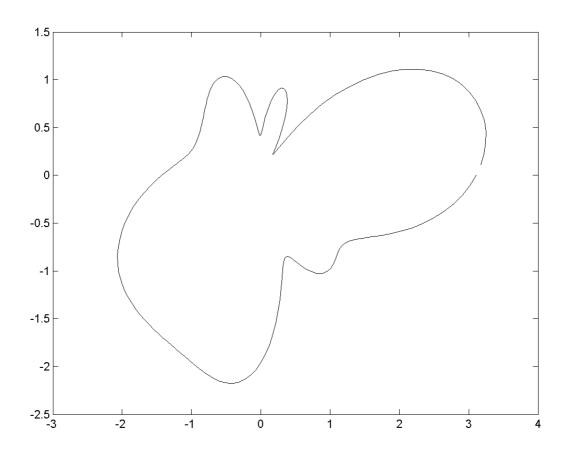


Рис. 2. Диаграмма направленности излучения в случае ϕ_0 =135 ϵ =30 k=3.45 n=15.

Данный метод позволяет решить рассматриваемые задачи и при наличии нескольких щелей в цилиндрической поверхности, что представляет практический интерес.

Автор благодарен профессору Ю.В. Ганделю за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

- 1. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. унта, 1971. 400 с.
- 2. Носич А.И. Электродинамические характеристики незамкнутых круговых цилиндрических экранов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Харьков 1978. 197 с.
- 3. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. М.: Изд. АН СССР, 1986. ВК-124. С. 166-183.
- 4. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. X-2000. 92 с.
- 5. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. Харьков: ХГУ, 1992. 145с.

6. Гандель Ю.В., Lana Saksonov Гиперсингулярное интегральное уравнение задачи дифракции электромагнитных волн на многоэлементных решетках // Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2003), Харьков-Херсон, 2003, с. 65-70.

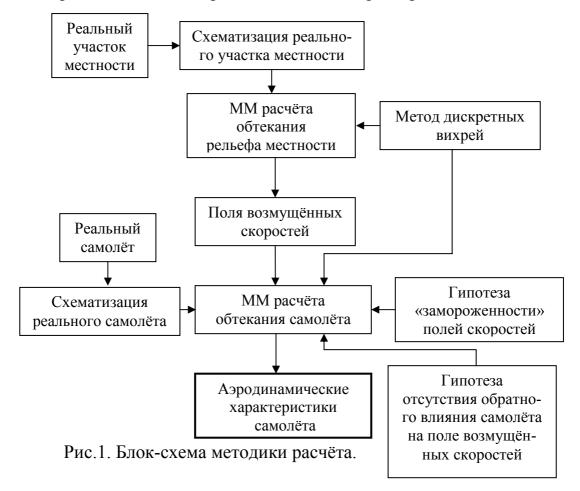
УДК 553.629

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК САМОЛЁТА С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ ВИХРЕЙ ОТ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

А.И. Желанников, С.М. Еременко, С.И. Некраха Россия, Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского, e-mail: zhelannikov@lianet.ru

Описывается методика расчёта аэродинамических характеристик самолёта с учётом вихревого воздействия, обусловленного рельефом местности. В основе методики лежит метод дискретных вихрей. Приводятся результаты расчёта обтекания конкретных участков местности, а также расчёты аэродинамических характеристик самолёта при полёте вблизи этих участков.

На практике часто встречаются задачи, когда необходимо оценить влияние вихревого следа на аэродинамические характеристики самолёта от



рельефа местности или от наземных сооружений. Например, при взлёте или посадке самолёта, или при пролёте самолёта вблизи горных массивов, в ущельях и т.д. Для решения таких задач разработана методика расчёта аэродинамических характеристик самолёта в вихревом следе от рельефа местности, блок-схема которой представлена на рис. 1. В основе предлагаемой методики лежит метод дискретных вихрей.

Задача решается в два этапа.

На первом этапе моделируется обтекание рассматриваемого участка местности, рис.2. Для этого реальный участок местности схематизируется тонкими элементами (поверхностями) в точности повторяющими геометрию реального участка. На этих поверхностях располагаются замкнутые четырёхугольные вихревые рамки, циркуляции которых неизвестны, рис.3.

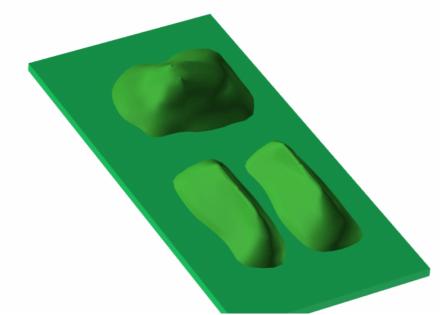


Рис. 2. Пример реального участка местности.

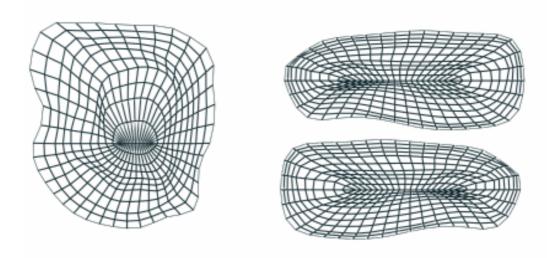


Рис. 3. Схематизация реального участка местности.

Места отрыва потока фиксируются и с них моделируется сход вихревой пелены. Эти места определяются из реальных условий обтекания, взя-

тых из практики. При выполнении граничного условия о непротекании поверхностей, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных циркуляций вихрей. Нестационарная задача решается по временным шагам до наперёд заданного расчётного шага. Затем по формуле Био-Савара рассчитываются поля возмущённых скоростей.

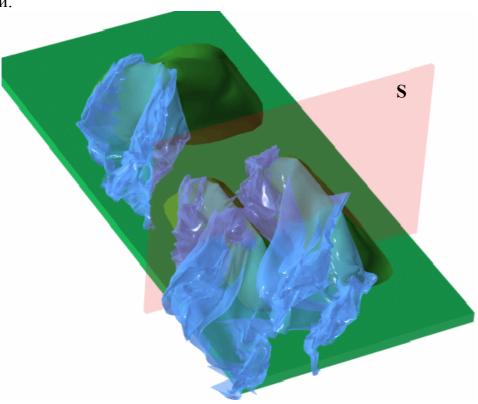


Рис. 4. Пример моделирования обтекания участка местности.

На рис.4 представлены результаты расчёта обтекания рельефа местности, представленного на рис.2 при $\tau = 3.3$, где $\tau = t/h$. Здесь t - время,

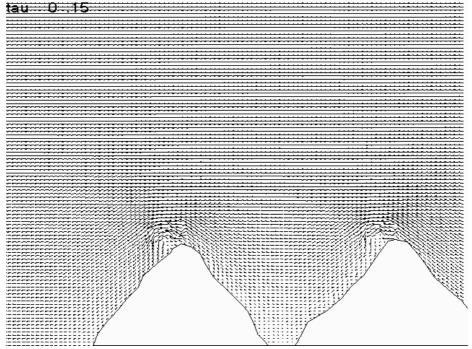


Рис. 4. Поля возмущённых скоростей в момент времени $\tau = 0.15$.

h - высота возвышенностей. В работе высота всех трёх возвышенностей принималась одинаковой.

На рис. 5 и 6 показаны поля возмущённых скоростей в сечении S, обозначенном на рис. 4, в моменты времени $\tau = 0.15$ и 3.3. Видна динамика развития и изменения картины течения в рассматриваемом сечении.

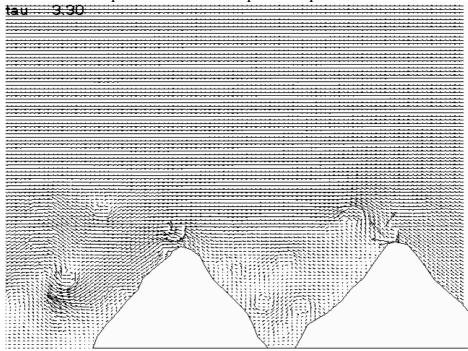


Рис. 5. Поля возмущённых скоростей в момент времени $\tau = 3.3$.

На втором этапе моделируется обтекание летательного аппарата в рассчитанных полях возмущённых скоростей. Для этого используется математическая модель расчёта нестационарного обтекания самолёта, которая также базируется на методе дискретных вихрей. Реальный самолёт в расчётах заменяется схематизированной моделью. В данной работе использовалась схематизация первого уровня, т.е. схематизация осуществлялась только тонкими пластинами, рис. 6. Это оправдано тем,

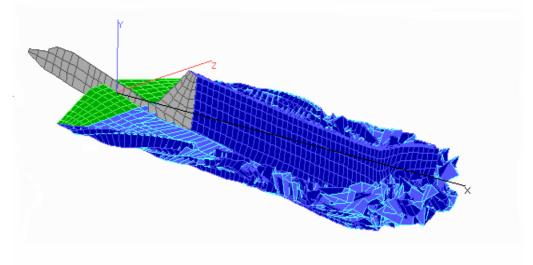


Рис. 6. Схематизированная модель самолёта для расчёта аэродинамических характеристик в поле возмущённых скоростей.

что здесь рассчитываются только суммарные аэродинамические характеристики. При ЭТОМ используются две гипотезы: гипотеза «замороженности» полей скоростей и гипотеза отсутствия влияния самолёта скоростей. Учёт возмущённых влияния внешних возмущённых скоростей осуществлялся через правые части при решении системы линейных алгебраических уравнений, а также при расчёте скоростей при выстраивании вихревой пелены и при расчёте нагрузок. На рис. 7 и 8 представлены результаты расчёта коэффициента подъёмной силы и коэффициента момента крена в зависимости от расстояния и высоты полёта.

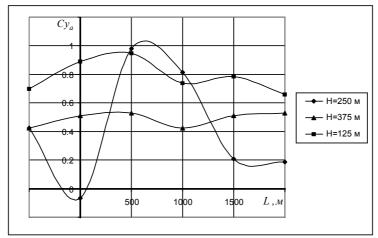


Рис.7. Зависимость коэффициента подъёмной силы от расстояния и высоты полёта.

Было принято, что высота возвышенностей равнялась 500м, а траектория полёта проходила между двумя горными вершинами с уходом самолёта влево от третьей возвышенности.

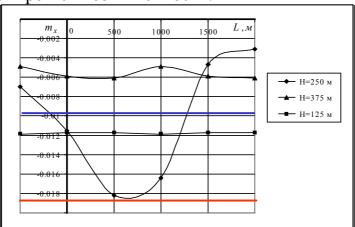


Рис. 8. Зависимость коэффициента момента крена от расстояния и высоты полёта.

Расчёты показывают, что вихревой след от препятствий может оказывать существенное влияние на аэродинамические характеристики самолёта. В некоторых случаях парирование возникающих моментов потребует больших расходов рулей.

Литература

- 1. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы, Гылым, 1997.
- 2. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., Наука, 1965.
- 3. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М., Наука, 1978.
- 4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М., Наука, 1985.
- 5. Бушуев В.И., Ганиев Ф.И., Локтев Б.Е., Ништ М.И., Шамшурин А.Д. Аэродинамическая компоновка и характеристики летательных аппаратов. М., Машиностроение. 1991.
- 6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М., ТОО «Янус-К», 2001.
- 7. Вышинский В.В. Вихревой след самолета, безопасность полета и кризис аэропортов. Полет, ЦАГИ, 1998.
- 8. Головнёв А.В., Желанников А.И., Ерёменко С.М., Некраха С.И. Учёт земли при расчёте нестационарного обтекания летательных аппаратов. Материалы XVI школы-семинара «Аэродинамика летательных аппаратов». ЦАГИ, 2005.
- 9. Гуляев В.В., Демченко О.Ф., Долженков Н.Н., Матвеев А.И., Подобедов В.А., Попов В.М. Математическое моделирование при формировании облика летательного аппарата. М., Машиностроение, 2005.
- 10.Желанников А.И. Вихревая опасность. Журнал «Вестник академии наук авиации и воздухоплавания», №2. М., 2003.
- 11. Пивень В.Ф. Сведение граничной задачи сопряжения обобщённых аналитических функций к интегральным уравнениям. Дифференциальные уравнения. Т. 35, № 9, 1999.
- 12. Калугин В.Т. Аэрогазодинамика органов управления полётом летательных аппаратов. М., Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
- 13. Крицкий Б.С. Моделирование ближнего следа за несущим винтом. Научный вестник МГТУ ГА, №37, серия «Аэромеханика и прочность», 2001.
- 14. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., ТОО «Янус», 1995.
- 15. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М., Изд. "Физматлит", 1995.
- 16. Радциг А.Н. Экспериментальная гидроаэродинамика. М., Издательство МАИ, 2004.
- 17. Ципенко В.Г. Применение математического моделирования и теоретических методов при анализе особых случаев взлёта и посадки воздушных судов. Дисс. на соискание уч. степ. докт. техн. наук. М., 1987.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

А.А. Зайцев*, В.В. Фомченков**

Россия, Калининград, *Российский государственный университет им. Канта, **НОУ «ОНУТЦ ОАО «Газпром», e-mail: V.Fomchenkov@onutc.ru

Предлагается методика построения функции Грина двумерной задачи Дирихле, использующая строение группы преобразований, порожденной симметриями от границ области.

Построение функции Грина двумерной задачи Дирихле для областей с сложной конфигурацией границ является трудной задачей. Для её решения используются методы конформных отображений, мнимых источников, теоремы о прямой и окружности (изложение методов и их применения можно найти в [1]-[4]). Эти методы фактически основаны на соображениях симметрии, однако теория симметрий привлекается пока недостаточно. В данной работе излагается методика построения функции Грина, в которой основную роль играют группы, порожденные симметриями от границ области. Под симметриями будем понимать не только классические симметрии от прямых и окружностей, но также от аналитических линий, изученные в работах Каратеодори [5] и Ламбина [6] (согласно Ламбину симметрии от аналитических линий выражаются через конформные отображения 2-го рода). В качестве первого шага здесь ограничимся случаем симметрии от прямых.

Сущность предлагаемого метода в следующем. Пусть граница области D состоит из n отрезков прямых, симметрии от которых обозначим $s_1,...,s_n$, и пусть G есть группа преобразований расширенной комплексной плоскости, порожденная этими симметриями, причем D является фундаментальной областью группы G. Группа G содержит нормальную подгруппу H, индекс которой равен 2. Её элементами будут произведения четного числа порождающих симметрий. Подгруппа H может быть конечной или (в наиболее интересных случаях) бесконечной. Симметрии s_k , $k=\overline{1,n}$, будут представителями второго смежного класса H_1 ; остальными элементами будут произведения нечетного числа симметрий. При этом $H_1=s_kH=Hs_k$ для любого индекса k. Тогда для функции Грина справедливо представление

$$g(z,z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |\varphi(z,z_0)|, \qquad \varphi(z,z_0) = \frac{R(z,z_0)}{R(s_1z,z_0)}, \tag{1}$$

где функция $R(z,z_0)$ регулярна в области D и строится по подгруппе H . Далее излагается способ её построения.

В случае конечной подгруппы H

$$R(z,z_0) = \prod_{h \in H} (hz - z_0).$$
 (2)

Покажем, что представление (1) удовлетворяет всем требованиям для функции Грина. Функция $R(z,z_0)$ будет целой. Её нули расположены в точках $z=hz_0$, $h\in H$. Из них только один $z=z_0$ расположен в D, вследствие того, что D есть фундаментальная область. Функция $\overline{R(s_1z,z_0)}$ тоже будет целой. Её нулями будут точки $z=h_1z_0$, $h_1\in H_1$; все они находятся за пределами D. Следовательно, $\varphi(z,z_0)$ не имеет полюсов в D, то есть регулярна в этой области, и имеет там единственный простой ноль $z=z_0$.

Осталось проверить выполнение граничных условий. Из принципа симметрии Римана-Шварца можно получить такое следствие: эти условия выполняются тогда и только тогда, когда имеют место тождества

$$\varphi(z,z_0)\overline{\varphi(s_kz,z_0)} = 1. \tag{3}$$

В случае конечной подгруппы H доказательство тождеств (3) следующее. По построению, функция $R(z,z_0)$ инвариантна относительно подгруппы H, но $s_1s_k\in H$, поэтому $R(s_1s_kz,z_0)=R(z,z_0)$, $R(s_kz,z_0)=R(s_1z,z_0)$. Следовательно,

$$\varphi(z,z_0)\overline{\varphi(s_kz,z_0)} = \frac{R(z,z_0)}{R(s_1z,z_0)} \frac{\overline{R(s_kz,z_0)}}{R(s_1s_kz,z_0)} = 1.$$

Перейдем к примерам. Начнем с хорошо известных.

Пример 1. Область D является сектором с углом раствора $\theta_0 = \pi/n$, $0 < \arg z < \pi/n$ (рис. 1). В этом случае имеются две порождающие симметрии s_1 и s_2 , которые действуют по правилу

$$s_1 z = \overline{z}$$
, $s_2 z = \exp(2\pi i/n)\overline{z}$.

Группа G содержит 2n преобразований, а порядок подгруппы H равен n; H будет группой поворотов на углы, кратные $2\pi/n$. Следовательно,

$$R(z,z_0) = \prod_{k=1}^{n} \left(\exp(2\pi ki/n)z - z_0 \right) = (-1)^{n-1} \left(z^n - z_0^n \right),$$

$$\overline{R(s_1 z, z_0)} = (-1)^{n-1} \left(z^n - \overline{z_0^n} \right), \quad \varphi(z, z_0) = \frac{z^n - z_0^n}{z^n - \overline{z_0^n}}.$$

Этот способ можно обобщить на секторы с углом раствора $\theta_0 = \pi m/n$. Тогда в комплексной плоскости D перестает быть фундаментальной областью, но становится ею на m - листной римановой поверхности. Методом симметрий получаем

$$R(z,z_0) = (-1)^{n-1} \left(z^{n/m} - z_0^{n/m} \right) = (-1)^{n-1} \left(z^k - z_0^k \right), \quad k = \pi/\theta_0.$$

Последнее выражение будет справедливо и в общем случае, когда θ_0/π - иррациональное число.

В следующих примерах группа G и её подгруппы H бесконечные. Тогда произведение в формуле (2) будет расходящимся, поэтому в методику построения функции $R(z,z_0)$ следует внести изменения.

Пример 2. Область D является полосой $0 < \text{Re}\,z < d$ (рис. 2). Порождающими симметриями будут зеркальные симметрии от границ полосы, для которых

$$s_1 z = -\overline{z}$$
, $s_2 z = -\overline{z} + 2d$.

Группа D и её подгруппа H бесконечны; H есть группа сдвигов, кратных сдвигу на 2d . Полагаем

$$R(z,z_0) = S(z-z_0), S(z) = 1 - \exp(\pi i z/d).$$
 (4)

Функция S(z) периодична с периодом 2d, поэтому S(hz)=S(z) для всех $h\in H$. Поскольку $s_2s_1\in H$, то $S(s_2s_1z)=S(z)$, $\overline{S(s_2z)}=\overline{S(s_1z)}$. Фактически $R(z,z_0)$ инвариантна относительно подгруппы H. Тогда равенство $\varphi(z,z_0)\overline{\varphi(s_1z,z_0)}=1$ выполняется автоматически, а для второй симметрии будем иметь

$$\varphi(z,z_0)\overline{\varphi(s_2z,z_0)} = \frac{R(z,z_0)}{\overline{R(s_1z,z_0)}} \frac{\overline{R(s_2z,z_0)}}{R(s_1s_2z,z_0)} = \frac{R(z,z_0)}{\overline{R(s_1s_2z,z_0)}} \frac{\overline{R(s_2z,z_0)}}{R(s_1z,z_0)} = 1$$

(обе дроби равны 1, вследствие инвариантности $R(z,z_0)$).

После подстановки (4) в (1) и некоторых преобразований получим

$$g(z,z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin(\pi(z-z_0)/2d)}{\sin(\pi(z-\overline{z_0})/2d)} \right|.$$

Эта формула хорошо известна (см. например, [3], [4]).



Рис. 1.Область D – сектор.

Рис. 2. Область D – полоса.

Пример 3. Область D есть прямоугольник 0 < Re z < a, 0 < Im z < b (рис. 3). Для симметрий от его границ имеют место равенства

$$s_1 z = \overline{z}$$
, $s_2 z = -\overline{z}$, $s_3 z = \overline{z} + 2bi$, $s_4 z = -\overline{z} + 2a$.

Подгруппа H содержит в качестве собственной нормальной подгруппы H_0 группу сдвигов на 2ma+2nbi, $m,n\in \mathbb{X}$, индекс которой равен 2. Основным представителем второго смежного класса будет преобразование $s_1s_2=s_2s_1$, для которого $s_1s_2z=-z$ (это есть симметрия относительно начала координат). С учетом этого факта и основываясь на формуле (4) для $R(z,z_0)$ будем иметь

$$R(z,z_0) = S(z-z_0)S(s_1s_2z-z_0) = S(z-z_0)S(-z-z_0),$$

где

$$S(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \exp(\pi i (z + 2nbi)/a) \right) \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \exp(-\pi i (z - 2nbi)/a) \right).$$
 (5)

Функция S(z) периодична с периодом 2a, а при сдвиге на 2bi приобретает, как не трудно установить из представления (5), экспоненциальный множитель,

$$S(z+2a)=S(z)$$
, $S(z+2bi)=-\exp(-\pi iz/a)S(z)$.

Отсюда получаем следующие инвариантные соотношения для $R(z, z_0)$:

$$R(s_1s_kz, z_0) = R(z, z_0), \quad k = 2,4, \quad R(s_1s_3z, z_0) = \exp(-2\pi i(z-bi)/a)R(z, z_0).$$

С их помощью проверка выполнения соотношения (3) становится простой. Например, в наиболее сложном случае k=3 она сводится к такой цепочке выкладок:

$$\varphi(z,z_0)\overline{\varphi(s_3z,z_0)} = \frac{R(z,z_0)\overline{R(s_3z,z_0)}}{\overline{R(s_1z,z_0)}R(s_1s_3z,z_0)} = \frac{R(z,z_0)}{R(s_1s_3z,z_0)} \frac{\overline{R(s_3z,z_0)}}{\overline{R(s_1s_3z,z_0)}} = \exp\left(2\pi i \left(z - ib - \left(\overline{s_3z} + ib\right)\right)/a\right) = 1.$$

Функцию S(z) несложно выразить через тета-функцию $\theta_1(z)$:

$$S(z) = -i \exp(\pi b/4a) \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \exp(-2\pi nb/a))^{-1} \exp(\pi i z/2d) \theta_1(z/2a, ib/a).$$

Поэтому функция Грина тоже выражается через $\theta_1(z)$.

Отметим, что при решении подобных задач проще пользоваться аналогами функции S(z), а не теорией тета-функций.

Пример 4. Пусть D есть правильный треугольник с центром в начале координат, границами которого служат прямые $y = \pm 3^{-1/2}(x-r)$ и x = -r/2; здесь r - радиус описанной окружности (рис. 4).

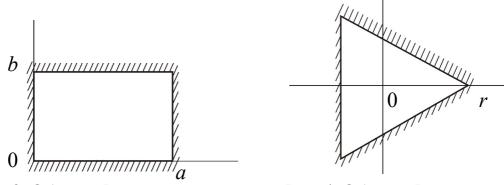


Рис. 3. Область D – прямоугольник. Рис. 4. Область D – треугольник. Для порождающих симметрий справедливы формулы: $s_1z = \exp(-\pi i/3)\overline{z} + \exp(\pi i/3)r$, $s_2z = -\overline{z} - r$, $s_3z = \exp(\pi i/3)\overline{z} + \exp(\pi i/3)r$.

Группа, порожденная этими симметриями, содержит нормальную подгруппу H_0 индекса 6, элементами которой будут сдвиги $z \to z + 3(m + n \exp(\pi i/3))r$. Представителями остальных пяти смежных классов будут преобразования $s_1, s_2, s_3, s_2s_1, s_3s_1$. В силу этого свойства

имеет место представление

$$R(z,z_0) = S(z-z_0)S(s_2s_1z-z_0)S(s_3s_1z-z_0),$$

где

$$S(z) =$$

$$= \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \exp(2\pi i (z + 3n \exp(\pi i/3)r)/3r)\right) \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \exp(-2\pi i (z - 3n \exp(\pi i/3)r)/3r)\right).$$

Основываясь на этом представлении, получаем тождества

$$S(z+3r) = S(z), \quad S(z+3\exp(\pi i/3)r) = -\exp(-2\pi i z/3r)S(z).$$

Их следствием будут такие соотношения:

$$R(s_1 s_2 z, z_0) = \exp(2\pi i (\sqrt{3}iz - (2 - \exp(\pi i/3))r)/r)R(z, z_0),$$

$$R(s_1 s_3 z, z_0) = R(z, z_0).$$

Проверка соотношений (3) снова простая. В наиболее сложном случае k=2она такова:

$$\varphi(z,z_0)\overline{\varphi(s_2z,z_0)} = \frac{R(z,z_0)\overline{R(s_2z,z_0)}}{\overline{R(s_1z,z_0)}R(s_1s_2z,z_0)} = \frac{R(z,z_0)}{\overline{R(s_1s_2z,z_0)}} \frac{\overline{R(s_2z,z_0)}}{\overline{R(s_1s_2(s_2z),z_0)}} = \exp\left(2\pi i\left(-\sqrt{3}iz + \left(2 - \exp(\pi i/3)\right)r - \sqrt{3}i\overline{s_2z} + \left(2 - \exp(-\pi i/3)\right)r\right)/r\right) = 1.$$

В данном случае функция S(z) также выражается через тета-функцию.

Отметим, что другим способом, использующим теорему о прямой, эта задача решена в [7].

В случае симметрий от окружности и аналитических линий решение соответствующих задач получается аналогично. Однако тогда появляется затруднение. Например, симметрия от окружности будет иметь особенность в центре. Это ведет к появлению лишнего нуля в представлении (1) для $\varphi(z,z_0)$. Он устраняется путем включения дополнительного множителя в выражение для $\varphi(z,z_0)$. Обычно его несложно найти.

Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред: Учеб. пособие для педвузов. М., «Высшая школа», 1972.
- 2. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел: ОГПИ, 1994.
- 3. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах: Учеб. пособие. – Калиниград: Изд-во КГУ, 2001.
- 4. Голубева О.В., Шпилевой А.Я. К теории двумерных динамических процессах в неоднородных средах. КГУ, 1990. -Ди-ВИННТИ 5857.
- 5. Caratheodory C. Theory of functions of a complex variable. New Jork. 1954.
- 6. Ламбин Н.В. Метод симметрии и его применение к решению краевых задач. Изд. Белгосуниверситета им. В.И. Ленина, Минск, 1960.
- 7. Севостьянова Н.В., Шпилевой А.Я. Моделирование фильтрационных течений жидкости в области с границей раздела в виде равностороннего треугольника. Настоящий сборник.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ¹

А.А. Квасов

Россия, Орловский государственный университет

Применяя метод дискретных особенностей для нестационарной плоскопараллельной фильтрации, поставлена и решена тестовая задача о продвижении границы раздела двух жидкостей.

1. Постановка задачи. Применение современных численных методов в решении практических задач связано с необходимостью тестирования модели на простых задачи, имеющих известные решения.

Рассмотрим плоскопараллельную нестационарную фильтрацию, обусловленную работой нагнетательной скважины в неограниченной области D. Скважину моделируем расположенным в начале координат точечным стоком постоянной мощности дебита q, приходящегося на единицу толщины слоя. Пусть грунт в области фильтрации неоднороден. Моделируем его двумя областями с постоянными коэффициентами k_1 и k_2 . Границу раздела этих областей, охватывающую начало координат, моделируем гладкой замкнутой кривой Γ . Грунт внутри Γ имеет проницаемость k_2 . При работе эксплуатационной скважины в поры грунта, заполненные жидкостью вязкости μ_1 , закачивается жидкость вязкости μ_2 . Считаем, что граница раздела жидкостей является чёткой и в любой момент времени моделируем её замкнутой гладкой кривой Γ_t . При t=0 граница раздела жидкостей является окружность малого радиуса с центром в точке забоя скважины. Таким образом, при $t \neq 0$ в слое грунта можно выделить области D_{ii} , i = 1, 2; j = 1, 2 (индекс i соответствует индексу коэффициента проницаемости грунта в этой области, а ј – вязкости жидкости, заполняющей его поры). Считаем, что фильтрация подчиняется линейному закону Дарси и уравнению непрерывности [1]. Тогда, потенциал ϕ_{ii} течения жидкости в области D_{ii} удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi_{ij}(M, t) = 0, \quad M \in D_{ij}, \ (i = 1, 2; j = 1, 2).$$
 (1.1)

На границах Γ и $\Gamma_{\rm t}$ имеют место условия непрерывности давления и нормальных составляющих скоростей фильтрации [1]:

$$\varphi_{1j}(M, t) = \varphi_{2j}(M, t), \quad k_1 \frac{\partial \varphi_{1j}(M, t)}{\partial n_M} = k_2 \frac{\partial \varphi_{2j}(M, t)}{\partial n_M}, \qquad M \in \Gamma, \qquad (1.2)$$

$$\varphi_{i1}(M, t) = \varphi_{i2}(M, t), \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \varphi_{i1}(M, t)}{\partial n_M} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \varphi_{i2}(M, t)}{\partial n_M}, \quad M \in \Gamma_t.$$
(1.3)

Подвижную границу $\Gamma_{\rm t}$ в любой момент времени представим параметрическими уравнениями (s – параметр):

 $^{^{1}}$ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433).

$$x = x(s, t), y = y(s, t).$$
 (1.4)

Считаем её положение в начальный момент времени (t = 0) известным: $r = r_0$ и в силу (1.4) оно задано уравнениями:

$$x_0 = x(s, 0), y_0 = y(s, 0).$$
 (1.5)

В последующие моменты времени отыскание границы $\Gamma_{\rm t}$ связано с решением уравнения (связь физической скорости и скорости фильтрации [1]):

$$d\vec{r}/dt = \vec{v}(M,t), \quad M \in \Gamma_{t}. \tag{1.6}$$

2. Решение задачи. Решим поставленную эволюционную задачу методом дискретных особенностей. Потенциалы $\varphi_{ij}(M, t)$ ищем в виде:

$$\varphi_{ij}(M,t) = \frac{\mu_j}{k_i} (\varphi_0(M) + \Phi(M,t)), \quad M \in D_{ij}, (i = 1, 2; j = 1, 2), (2.1)$$

где $\varphi_0(M, t)$ – потенциал течения жидкости вязкости $\mu_0 = 1$ в однородной среде с коэффициентом проницаемости $k_0 = 1$, $\Phi(M, t)$ – потенциал возмущений, вызванных наличием границ Γ и Γ_t . Согласно [1],

$$\varphi_0(M) = \frac{q}{2\pi} \ln r, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$
 (2.2)

Потенциал возмущений ищем в виде потенциала двойного слоя:

$$\Phi(M,t) = \int_{\Gamma} g(N,t)K(N,M)dl_N + \int_{\Gamma_t} f(T,t)K(T,M)dl_T, \qquad (2.3)$$

где g(N, t) и f(T, t) — непрерывные периодические на Γ и Γ_t функции распределения особенностей, а ядра интегралов имеют вид:

$$K(P,M) = \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{r}_{PM} \cdot \vec{n}_P}{r_{PM}^2}, \qquad (2.4)$$

где \vec{n}_P — вектор нормали к Γ (Γ_t) в точке P (N(T)), направленный во внешнюю по отношении к Γ (Γ_t) область.

Согласно (2.2) – (2.4), заключаем: потенциалы (2.1) удовлетворяют уравнению (1.1) и в силу свойств потенциала двойного слоя – каждому второму граничному условию в (1.2), (1.3) [2]. Оставшиеся два граничных условия из (1.2), (1.3) приводят к системе двух интегральных уравнений:

$$\begin{cases} g(M,t) - 2\pi_k \int_{\Gamma} g(N,t)K(N,M)dl_N - 2\pi_k \int_{\Gamma_t} f(T,t)K(T,M)dl_T = 2\pi_k \varphi_0(M), M \in \Gamma \\ g(M,t) - 2\pi_\mu \int_{\Gamma} g(N,t)K(N,M)dl_N - 2\pi_\mu \int_{\Gamma_t} f(T,t)K(T,M)dl_T = 2\pi_\mu \varphi_0(M), M \in \Gamma_t, \end{cases}$$
 где $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2), \ \lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1).$

Учитывая закон Дарси [1], формулы (2.1)-(2.4) и предложенный в [3] метод определения скорости фильтрации на границе Γ_t , дифференциальное уравнение (1.6) принимает вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q}{2\pi} \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \nabla_M \int_{\Gamma} g(N, t) K(N, M) dl_N + \nabla_M \int_{\Gamma_t} f(T, t) K(T, M) dl_T, M \in \Gamma_t$$
(2.6)

Здесь ∇_M – оператор набла по координатам точки M.

Таким образом, решение нестационарной задачи о нагнетании жидкости в кусочно-неоднородный слой грунта сведено к решению системы двух интегральных уравнений (2.5) и одного интегро-дифференциального уравнения (2.6) при начальных условиях (1.5). Следует отметить, что уравнения (2.5) содержат сингулярные, а уравнение (2.6) – гиперсингулярный интеграл. Для их вычисления необходимо применять особые методы [2].

Проведённые исследования показали, что для границ Γ и $\Gamma_{\rm t}$ в виде окружностей с общим центром и совпадающим с точкой забоя водозабора, уравнения (2.5), (2.6) разрешимы аналитическими методами. Выбирая за единицу измерения длины радиус окружности границы Γ (a = 1) и следуя [4], имеем решение системы (2.5):

$$\begin{cases} g = 0, \\ f = \frac{q}{\pi} \frac{\lambda_{\mu}}{1 + \lambda_{\mu}} \ln r, \\ f = \frac{q}{\pi} \frac{\lambda_{\mu}}{1 + \lambda_{\mu}} \ln r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} g = -\frac{q}{\pi} \frac{\lambda_{k}}{1 + \lambda_{k}} \frac{2\lambda_{\mu}}{1 + \lambda_{\mu}} \ln r, \\ f = \frac{q}{\pi} \frac{\lambda_{\mu}}{1 + \lambda_{\mu}} \ln r. \end{cases}$$

Преобразовав согласно [2] входящие в (2.6) интегралы (понизив сингулярность) и учитывая вид найденных функций g и f, имеем решение дифференциального уравнения (2.6) при начальных условиях (1.5) в виде:

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{q}{\pi}t} \ .$$

Полученное решение задачи можно использовать при исследовании и тестировании более сложных эволюционных задач теории фильтрации.

Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: «Высш. шк.». 1972. 368 с.
- 2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. «Янус». 1995. 520 с.
- 3. Пивень В.Ф. Задача эволюции границы раздела жидкостей для комплексных потенциалов течений в неоднородном слое. // Труды XII международного симпозиума «МДОЗМФ-2005». Харьков–Херсон, 2005. С. 270 274.

4. Квасов А.А. Решение интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода на окружности для задач фильтрации // Труды IX международного симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орёл «Труд», 2000. С. 259 – 262.

УДК 621.362.1

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ СОСТАВНОЙ ВЕТВИ ТЕРМОЭЛЕМЕНТА

О.И. Марков Россия, Орловский государственный университет

Разработана элементарная теория составной ветви термоэлемента. На примере двухкомпонентной ветви показана возможность увеличения эффективности ветви. Получено условие, накладываемое на основные параметры составляющих ветви.

Одной из возможностей повысить эффективность термоэлектрических охладителей является использование составных термопар [1,2]. Как указывается в [1] в составном термоэлементе теплота Пельтье поглощается не только в холодном спае, но и в месте соединения составляющих частей ветви, что приводит к дополнительному снижению температуры на холодном спае термоэлемента. Поскольку в месте соединения частей контактное сопротивление приводит к дополнительному выделению теплоты Джоуля, то целесообразно использовать т.н. «градиентные» ветви, представляющие собой монокристаллы с меняющимся по длине ветви составом. Однако создать такие ветви можно не всегда, т.к. составляющие части ветви могут иметь различную физико-химическую природу и а таком случае их нельзя выполнить в виде одного неоднородного монокристалла. Поэтому составные термоэлементы не потеряли актуальности и могут представлять значительный практический интерес.

С использованием простейших уравнений теплового баланса авторам [1] численно просчитать кривые зависимости максимальных перепадов температур составного термоэлемента и нижних коэффициентов элементов ветвей отношения термоЭДС. справедливо отмечено в работе, для полупроводниковых материалов со значительно отличающимися величинами коэффициентов термоЭДС «не были согласованы свойства и размеры термоэлементов левой и правой ветвей», поэтому одной из задач является проведение согласования ветвей термоэлемента. Кроме того, из-за отсутствия симметрии между n- и pбольшинства используемых термоэлектриков, ДЛЯ следует рассмотреть не составные термоэлементы, а составные ветви. Авторам работы [2] удалось по этому пути продвинуться несколько дальше, и они получили аналитическое выражение для термоэлектрической добротности ступенчатого термоэлемента. Хотя авторы и не использовали в расчетах температурные зависимости кинетических коэффициентов, они отмечают,

«что фактическая температурная зависимость параметров по длине термоэлементов является положительным фактором, способствующим повышению его эффективности».

В последние годы интерес к составным термоэлементам вновь возрос [3,4,5]. Для расчета составных термоэлементов использованы новые подходы. Например, в [3] сообщается об использовании методов теории оптимального управления для оптимизации каскадных охладителей с учетом температурной и концентрационной зависимости кинетических коэффициентов. Проводимая при этом подходе линеаризация задачи, требуемая теорией оптимального управления, и другие упрощения придают полученным результатам скорее качественный, чем количественный характер. В работе [4] предложен метод конечных элементов, позволяющий рассчитать распределение температуры, и термоэлектрических свойств вдоль термоэлемента. Работы [3,4] развивают расчетные методы составных термопар, не объясняя причины повышения эффективности в составной термопаре по сравнению с однородной. Действительно, в приведенном не совсем понятна причина роста перепада выше объяснении [1] температур в составной ветви, поскольку поглощение теплоты Пельтье в контакте составных частей ветви не является дополнительным, а изъято у холодного спая, где дифференциальная термоЭДС снижается. В некоторых случаях перераспределенный эффект Пельтье может вызвать ненулевой градиент температуры на горячем конце, что приведет к увеличению теплопритока с горячего конца ветви и сведет на нет ожидаемый эффект.

В работе [5] предлагается другое уравнение теплового баланса, с однако, трудно согласиться из-за произвольности выбора Данная работа посвящена расчету и оптимизации составляющих теплот. составной ветви термоэлемента, а также выявлению причин увеличения эффекта охлаждения в составной ветви. Обозначим α_1 , R_1 и дифференциальную термоЭДС, сопротивление теплопроводность «низкотемпературной» составляющей ветви, a α_2 , R_2 термоЭДС, сопротивление дифференциальную И теплопроводность «высокотемпературной» составляющей ветви соответствеено. Тепловой поток на «низкотемпературной части ветви определяется эффектами Пельтье и Джоуля

$$q_1 = J^2 R_1 - \alpha_1 T_x J \,, \tag{1}$$

где T_x - температура холодного конца ветви.

Известное тепловое сопротивление позволяет найти перепад температуры на этом участке ветви

$$\Delta T_1 = \frac{\alpha_1 T_x J - J^2 R_1}{k_1} \,. \tag{2}$$

Тепловой поток на «высокотемпературном» участке ветви

$$q_2 = \frac{1}{2}J^2 R_2 - (\alpha_2 - \alpha_1)T_{\xi}J, \qquad (3)$$

где T_{ξ} - температура промежуточного контакта ветви.

Перепад температуры на «высокотемпературном» участке ветви

$$\Delta T_2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)T_{\xi}J - \frac{1}{2}J^2R_2}{k_2}.$$
 (4)

Тогда полный перепад температур будет иметь вид

$$\Delta T = \frac{\alpha_1 T_0 J - J^2 R_1}{k_1} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) T_{\xi} J - \frac{1}{2} J^2 R_2}{k_2}.$$
 (5)

Исследуя на экстремум, находим, что максимум перепада достигается при токе

$$J_0 = \frac{\alpha_1 T_x + (\alpha_2 - \alpha_1) T_{\xi} \frac{k_1}{k_2}}{2R_1 + R_2 \frac{k_1}{k_2}}.$$
 (6)

Максимальный перепад равен

$$\Delta T = \frac{\left[\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{T_{\xi}}{T_x} \frac{k_1}{k_2}\right]^2 T_x^2}{2\left(2R_1 + R_2 \frac{k_1}{k_2}\right) k_1}.$$
 (7)

Составная ветвь дает большую эффективность при выполнении соотношения

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{\frac{T_{\xi}}{T_x} \frac{k_1}{k_2} - 1}{\frac{T_{\xi}}{T_x} \frac{k_1}{k_2} - \sqrt{2 \frac{R_1}{R_2} \frac{k_1}{k_2} + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}}.$$
(8)

Следует отметить, что в проведенном расчете сопротивление переходных контактов не учитывалось, хотя постановка задачи в данном виде позволяет учесть сопротивление контакта. Использование более двух составляющих ветви, по-видимому, не целесообразно, как из-за увеличения контактных сопротивлений, так и усложнения технологии изготовления и поэтому не рассматривалось.

Данный подход основан на выборе более обоснованного теплового баланса и, поэтому, следует ожидать лучшего соответствия с экспериментом. Полученное соотношение между параметрами составляющих ветви позволит более целенаправленно подойти к подбору материалов ветви.

Литература

- 1. В.А. Семенюк, О.Л. Нечипорук. Максимальное понижение температур в составных полупроводниковых термопарах. Известия вузов. Сер. Энергетика. 1976, № 2, с.105-110.
- 2. А.Л. Вайнер, Н.В. Коломоец, Э.М. Лукишкер, В.М. Ржевский. К теории составного термоэлемента. ФТП. 1977, Т. 11, в. 3. с. 546-552.
- 3. V.A. Semeniouk, T.E. Svechnikova, L.D. Ivanova. Single stage thermoelectric coolers with temperature difference of 80 K. Proceedings of the XIV International Conference on Thermoelectrics. St.Peterburg, Russia, 1995, p. 485-489.
- 4. A.E. Kaliazin, V.L. Kuznetsov, D.M. Rowe. Rigorous calculations related to functionally graded and segmented thermoelements. Proceedings of the XX International Conference on Thermoelectrics, 2001, p. 286-292.
- 5. Л.Д. Иванова, М.А. Коржуев, Л.И. Петрова, Т.Е. Свечникова, Ю.В. Гранаткина, В.С. Земсков. Низкотемпературные термоэлектрические микрохолодильники, использующие распределенный эффект Пельтье. Доклады IX Межгосударственного семинара «Термоэлектрики и их применения». Санкт-Петербург, 2004. с. 422-427.

УДК 519.6

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МДО: РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ И ТРУДОЁМКОСТИ

В.О. Мишенко

Украина, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, e-mail: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua

По поводу программных библиотек математического моделирования физических явлений методами дискретных особенностей (МДО) разбирается важнейший аспект отличия программного обеспечения от исследовательских программ — надёжность реализации спецификаций. Исходя из трактовки надёжности наукой о программах Холстеда, строится оценка трудоёмкости достижения высокой надёжности. Уточняются программные метрики, демонстрируется косвенная оценка уровня некоторых языков программирования.

1. Предмет обсуждения: программное обеспечение и характер его моделирования

Методы дискретных особенностей (МДО) могут рассматриваться двояко: как объединённые общими принципами С.М. Белоцерковского прямые методы моделирования физических явлений или же, как численные

методы решения (высоко)сингулярных уравнений и систем, возникающих в математической физике. Связь этих трактовок освещается в [1]. Как основа компьютерного моделирования, МДО давно и успешно работают в аэрогидродинамике в задачах стационарных и нестационарных. Там они и возникли пол века назад под историческим именем «метод дискретных вихрей». За прошедшие десятилетия программное обеспечение в форме пакетов прикладных программ (ППП) наработано в ВВИА им. акад. Н.Е. Жуковского, в ГОСНИИ «ЦАГИ», Институте парашютостроения (Москва), Институте гидродинамики (Киев), в ряде ведущих университетов России и Украины (автор не претендует на полноту перечня, имея лишь в виду свидетельства сборника [2] и трудов симпозиумов МДОЗМФ прежних лет).

Несколько иначе обстоит дело с МДО в качестве группы численных методов [3-4]. Им по статусу положено программное обеспечение в форме библиотек стандартных (встраиваемых и настраиваемых) компонент («подпрограмм», «модулей» или «подсистем»). Это предполагает не только наличие теоретической базы и испытанных на практике алгоритмов, но и удовлетворение специальных требований программной инженерии. К числу таких относятся: способность к работе в составе прикладных программ на различных платформах, корректная работа с памятью и т. п., но, главное, надёжность выполнения заявленных в документации функций.

Цель статьи – показать роль математического моделирования качества программных систем в обеспечении прогноза их первичной надёжности и оценки ресурсов, необходимых для фильтрации неизбежных ошибок. Аппарат моделирования использует модернизированные «научные метрики» [5-6], разрабатывавшиеся с прицелом на конкретное применение к программным средствам МДО в реальных условиях их разработки в академической среде.

Аппарат «научных» метрик М.Холстеда [7], получил признание в стандартах качества программного обеспечения [8]. Первоначальная модель Холстеда подразумевала однофайловые программы, которые мы назовем простыми. Они трактуются как реализации определённых алгоритмов. Эти реализации составляются из программных символов - лексем используемых языков (например, идентификаторов) или их устойчивых сочетаний (например, «begin ... end»). Вводятся программные параметры:

$$N$$
 - ∂ лина программы в программных символах (с учётом их повторных вхождений), (2)

(3)

 под которой понимается реализация данного алгоритма
 в форме вызова готовой программы из гипотетической
 универсальной библиотеки программ.

Поскольку в потенциальной реализации необходимы два служебных символа (обозначение вызова и библиотечное имя), то

$$\eta^* = 2 + \eta_2^* \,, \tag{4}$$

где η_2^* -число определяемых смыслом параметров (объектов) ввода-вывода.

С большей или меньшей точностью, параметры (1) и (2) связаны уравнением длины программы [7]. Мы используем его упрощенную форму

$$N \approx \eta \cdot \log(\eta)$$
 (5)

По определению, объемом программы у Холстеда называется

$$V = V(N, \eta) = N \cdot \log(\eta)$$
 (догарифм двоичный), (6)

а уровнем программы – показатель компактности реализации:

$$L = V^* / V , \qquad (7)$$

где V^* - потенциальный объём:

$$V^* = V^*(\eta^*) = V(\eta^*, \eta^*) \tag{8}$$

«Наука о программах» руководствовалась аналогией с термодинамикой. Введём «энергетические» характеристики» [7,5]. Мера трудоёмкости -

$$A = L^{-1} \cdot V = \frac{V^2}{V^*} = A(V, V^*)$$
 - работа программирования (определение для простых программ) (9)

где величина L^{-1} - это аналог термодинамического давления. Вводится частный уровень языка *на данной* программе

$$\lambda = \lambda_{prog} = L \cdot V^* = (V^*)^2 / V \tag{10}$$

и уровень языка программирования - среднее таких частных уровней

$$\lambda = \overline{\lambda} = \overline{\lambda_{prog}} \tag{11}$$

по выборке программ, которая должна быть признана представительной.

$$E = E(V^*, \overline{\lambda}) = V^{*3} / \frac{1}{\lambda^2}$$
 - спецификационная энергия

Данная величина, подобно внутренней энергии термодинамических систем, является функцией состояния. Под состоянием будем понимать такую спецификацию рассматриваемой программы (или её части), которая позволяет определить потенциальный словарь (4) и, посредством потенциального объёма (8), величину энергии (12). В термодинамике, если процесс достижения конечного состояния квазистатичен, а определяющий

его закон известен, произведенную работу тоже подсчитывают, зная конечное состояние. Поэтому говорим, что формула (9) определяет работу программирования в *квазистатических процессах разработки*. Как и в термодинамике, квазистатический процесс является идеализацией, занижающей оценку работы (исходный текст не отражает всех переделок).

Размерности характеристик (6),(9),(12) одинаковы (бит символ). Полагаем в честь М.Х. Холстеда «холстедом» величину

1 Хд=1000 символ·бит (один холстед), 1 Hd = 1000 sym·bit.

2. Составляют ли программы исследователей МДО программное обеспечение этих методов?

Предположим, что на основе перспективного алгоритма МДО некто разработал программное средство и продемонстрировал на примере, что с помощью этого средства простая тестовая задача (ответ известен) решается достаточно точно, а новая задача (ответ заранее неизвестен даже приближенно) получает какое-то численное решение достаточно быстро. Даёт ли это основания причислить данное программное средство к составу программного обеспечения МДО? Мы сейчас не имеем в виду вопросы, связанные с конверсией прикладной программы одного пользователя в заготовку для включения в программы многих пользователей.

Имеется в виду проблема, хорошо иллюстрируемая результатом Белла и Салливена [7]: существует такой критический размер программ, что они практически не содержат ошибок при размере, меньшем критического, и неизбежно содержат при большем. Теория гласит [7], что адекватной мерой размера должен в этих вопросах служить объём программы или модуля (6). Критический размер отвечает объёму примерно в 1,5 Xд. Оценка снизу числа B ошибок реализации спецификаций в одном модуле выглядит так:

$$B = V/E_0 \quad (E_0 = 3Hd). \tag{13}$$

Типичное исследовательское приложение МДО [9] содержит порядка 10 модулей с объёмами порядка 10 Хд. Тогда при самом тщательном исполнении «свежее» программное средство МДО наверняка содержит свыше 30 ошибок класса реализации алгоритмов в модулях. Какие-то из них на пробном тесте не проявятся, но в реальном счёте «угробят» точность при сохранении внешней правдоподобности ответа. Для обеспечения надёжности нужно либо ждать выявления всех погрешностей с течением долгого времени, либо подвергнуть новую программу систематическому тестированию. Оно трудоёмко - затраты необходимо планировать загодя.

3. Прогноз трудоёмкости процесса тестирования.

Трудоёмкость тестирования определяется не фактическим числом ошибок, а числом тестов, которые необходимо разрабатывать, прогонять, а результаты прогона анализировать. Число тестов определяется управляющим графом программы и априорной (!) оценкой надёжности.

Известна высокая линейная корреляция между λ_{prog} (10) и средней длиной β линейных участков той же программы [7], где

$$\beta = \sqrt[N]{v+1}, \tag{14}$$

N - длина программы, а ν - число ответвлений, соответствующее числу условных или безусловных переходов.

По данным [7,С.75] мы оценили угловой коэффициент зависимости:

$$\beta \approx 31.55 \cdot \lambda + \varepsilon,$$
 (15)

где \mathcal{E} - непрерывно распределённая случайная ошибка. Валидность коэффициента линейной регрессии проверили по статистике Тейла [10].

Прогноз трудоёмкости тестирования исходит из приравнивания работы (9) спецификационной энергии программы или модуля (12) [7,5,6]:

$$A \approx (V^*)^3 / \overline{\lambda}^2$$

и, затем, - объём данного модуля:

$$V \approx (V^*)^2 / \overline{\lambda} . \tag{16}$$

Далее предположим справедливость «уравнения длины программы» (5) и определим из него длину программы (модуля) N, решив предварительно вытекающее из него и (6) уравнение

$$\eta \cdot \log^2 \eta = V. \tag{17}$$

Оценим среднюю длину линейных участков данного модуля

$$\beta \approx b \cdot \overline{\lambda}$$

и, в соответствии с (14),

$$\nu = N/\beta - 1 \approx N/\frac{1}{\lambda} - 1. \tag{18}$$

Оценка грубая, но дальнейшие прикидки не точнее. Требуется «назначить» априорную параметризованную топологию управляющего графа. Неопределённые параметры топологии уточняются на основе (18). И вот, окончательно получив гипотетический вид управляющего графа, оцениваем минимальное число путей, полностью покрывающих ребра графа (самый практичный критерий полноты в тестировании). Теперь относительную трудоёмкость работы с тестами определяем числом их разновидностей, то есть числом покрывающих граф путей, умножить на кратность тестирования. Её получим из обычно применяемой [11] модели Шумана

$$\theta = c/\sqrt{K} \implies K = (c/\theta)^2,$$
 (19)

где θ - уровень ошибок, не выявленных кратным тестированием, причём для программных систем характерно $0.004 \le c \le 0.006$ [11], а для учебных и прочих малых программ – на 1-2 порядка больше.. При этом выбираем

$$\theta < 0.5 \cdot B^{-1}, \tag{20}$$

где B - предполагаемое число подлежащих выявлению ошибок (оценкой может служить (13)). Точность прогноза будет не более, чем по порядку величины. Но лучше даст только богатый опыт, какой обычно отсутствует.

4. Как мерить уровни языков программирования?

Оценивание предыдущего раздела серьёзно зависит от точности оценки уровня языка на программе (10), который приходится заменять средним уровнем (11) по подходящему классу программ. Уровни мерить сложно. Но можно информацию о них извлекать косвенно.

«Экономика программ» Боэма, представленна системой оценивания СОСОМО (см., напр., [12]). Ей тоже нужна статистика. Так СОСОМО ІІ использует пересчёт показателя функциональности программ UFP в строки программного кода SLOC при помощи таблицы типа Джонса [13], приписывающей популярным языкам программирования средние значения SLOC/UFP. По видимому, эти величины находятся в обратном отношении к уровню языка (11). При этом работу [13] и оценки уровня языков Звибеном-Холстедом [7] разделяет более 10 лет. Приходится сопоставить каждому «старому» «звибенскому» языку его образ - один или несколько «новых» языков так, чтобы образы (в совокупности) и прообразы соответствовали друг другу по назначению, происхождению и (в интуитивном смысле) своему уровню:

Табл. 1. Сравнение двух характеристик языков программирования

Язык с	Компас	Пилот	Фортран	Алгол-58	ПЛ/1
известным					
уровнем λ					
Язык с	Assembly,	C	Fortran 77,	Pascal	Basic-
известным	Assembly		Basic-		Compiled,
SLOC/UFP	(Macro)		Compiled		Ada,Cobol-
					85
Уровень λ	0.88	0.92	1.14	1.21	1.53
ПО					
Холстеду					
Коэффиц.µ	(320+213)/2	128	(105+91)/2 =98	91	(91+71+91)/3
=SLOC/UFP	=265.5		=98		=84

Для произведений исследуемых характеристик получается последовательность значений $\lambda\mu=233$, 118, 112 . 110 , 129 . Оценка 118 (по медиане) согласуется с критерием знаковых рангов на уровне значимости не хуже 10%. Собственная оценка данного критерия есть 120,5. Теперь можно дать оценки уровня таких языков, как Ада и C++. Например,

$$\mu_{Ada} = 71 \Rightarrow \tilde{\lambda} = 1.62$$
, $\mathcal{R}_{Ada} = 1.70$ (21)

(если в СОСОМО II данные по Аде в сравнении с [13] не обновлялись, то оценки относятся к языку Ада 83).

5. Интерпретация параметров и характеристик для структурно сложных программ.

Спецификационная энергия программной системы обобщает (12) и определяется по *схеме программной системы* (сокр. *СПС*) [6]. Для практических приложений необходима интерпретация построения СПС

программных систем, разработанных на конкретных языках. Такая интерпретация осуществлена нами для языка Ада 95, что облегчалось полнотой и сбалансированностью средств структуризации и объектной ориентации этого языка. Для C++ пока имеются только примеры [6].

СПС программной системы состоит из модулей СПС и отношений родства, связи и подчинения между ними. Для языка Ада всякий модуль СПС является компилируемым модулем, за исключением *остаточного* модуля, роль которого незначительна. Важнейшую роль играет множество *самостоятельных модулей* СПС, которыми в Ада-системах являются все библиотечные описания пакетов (включая настраиваемые), и тела библиотечных (обычных или настраиваемых) подпрограмм.

Модулям СПС сопоставляются *блоки*, объединяемые в *группы*. По смыслу группируются блоки, являющиеся телами подпрограмм и задачами без входов. Обязательно образуют группу подпрограммы и задачи без входов из описания внутреннего пакета (рекурсивно), а также входы задачи со входами и защищенные операции защитных модулей. Все эти конструкции принимаются во внимание, если находятся непосредственно в видимых разделах описаний программных модулей.

Спецификационная энергии программной системы определяется как сумма спецификационных энергий всех самостоятельных модулей её СПС. Но нами в связи с надёжностью рассматривалась только энергия отдельного модуля, которая определяется как сумма спецификационных энергий групп

$$E(M) = \sum_{j} E(G_{j})$$
 $(M \in L, G_{j} = \{B_{j,i}\})$ (22)

В свою очередь, спецификационная энергия j —й группы в обозначениях $B_1 = B_{j,1}$, $B_2 = B_{j,2}$, ... $B_i = B_{j,i}$... определяется в зависимости от статуса группы [6]. Для автономной группы (блоки слабо связаны) она есть сумма энергий:

$$E(\lbrace B_i \rbrace) = \sum_i E(B_i) = \sum_i E(V_i^*, \lambda_i)$$
 (23)

Если же группа имеет более популярный статус структурной, то:

$$E(\lbrace B_i \rbrace) = E^*(\sum_i V_i^*, \lambda). \tag{24}$$

Работа программирования *системы* полагается равной сумме робот программирования модулей соответствующей СПС [6]. Это возможно постольку, поскольку взаимные связи модулей СПС учитываются внутри них самих. Поэтому при подсчёте работы модуля программной системы в (9) необходимо заменить объём V (6) на *объём разработки* $W = W_M$

$$A_{M} = A(W_{M}, V^{*}) = W_{M}^{2} / V_{M}^{*}, \qquad (25)$$

который, если говорить, упрощая (строго – в [6]), приплюсовывает себе объёмы в смысле (6) описаний тех модулей, от которых он декларативно зависит и которые разработаны раньше него. Также и алфавит символов при подсчёте считается расширенным за счёт символов из описания «старшего» модуля (так для тела модуля «старшим» является описание этого модуля).

В формулу (4) входит ещё потенциальный объём модуля СПС, тогда как при определении спецификационной энергии он, в общем случае не требовался. Причём теперь потенциальный объём следует знать и для субмодулей. При вычислении потенциального объёма модуля СПС группировать блоки не нужно, причём в учёт принимаются все блоки его описания, а не только из видимой части.. По таком рассмотрении блоков, потенциальный объём модуля полагается суммой по всем блокам.

6. О применении и развитии результатов.

Оценки в стиле науки о программах позволяют довольно реалистично определять трудоёмкость разработки прикладных программ, основанных на МДО [5]. Однако затраты на создание кода этих программ — верхушка айсберга полных трудозатрат. Приступая к разработке стандартных библиотек реализации МДО, нужно иметь в виду, что каждая погрешность в библиотечной подпрограмме множится на число её пользователей. Поэтому вопрос об обязательности процедур систематического тестирования всех компонент такой библиотеки является принципиальным, а планирование выделения соответствующих ресурсов на базе адекватных математических моделей совершенно необходимо. Результаты данной работы можно применить при создании стандартов такого планирования. Но тема ещё не закрыта. Так актуален контроль межмодульных связей с точки зрения объектно-ориентированного программирования. Его ошибки: не ловятся прогоном обычных тестов, но обнаруживаются при модификации системы.

Литература

- 1. Белоцерковский С.М, Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях М.: Наука, 1985.- 256 с.
- 2. Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в математической физике» (МДОЗМФ-2005).-Харьков-Херсон, 2005, ISBN 966-623-211-1, 407 с.
- 3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. Москва: «Янус-К». 2001.-508 с.
- 4. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учеб. пособие, Ч. 1, Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков-Херсон: изд. ХНУ, 2001. 92 с.
- 5. Мищенко В.О. Применение математического моделирования в системном анализе проекта программного обеспечения методом дискретных особенностей // Труды VII Международного «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Феодосия, 1997. С. 117-120.
- 6. Мищенко В.О. Математическая модель стиля Software Science для наукоёмких метрического анализа сложных программ //Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне Інформаційні технології. Автоматизовані моделювання. системи

- управління». № 629, 2004. С. 70-85.
- 7. Холстед М.Х. Начала науки о программах М.:, Финансы и статистика, 1981,- 128 с.
- 8. Харченко В.С., Скляр В.В., Тарасюк О.М. Методы моделирования и оценки качества и надёжности программного обеспечения. учеб. пособие.- Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк.авиац.ин-т». 2004.- 159 с.
- 9. Gahov A.V. Testin a New Approach to the Analysis of the Projects Development Using Generalization Parameters Offered by Software Science //Procedins of SCALNET-2004, KSPU, Kremenchug.- 2004. –P. 118-120.
- 10. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика. 1983.
- 11. Проблемы совершенствования синтеза, тестирования, верификации и отладки программ: // Тезисы докладов всесоюзной научной конференции. Том II/ Отв. ред. Я.М. Барздинь.- Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1986, 152 с.
- 12. Орлов С.А. Технологии разработки программного обеспечения. Учеб. пособие, СПБ.: Питер, 2003. 480 с.
- 13. Jones, Capers: Applied Software Measurement: Assuring Productivity and Quality, McGraw Hill, New York, NY, 1991.

УДК. 517.91

ИЗОБИЛИЕ ПАР ЛАКСА ПО КАЛОДЖЕРО ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

А.С. Московских

Россия, Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Рассмотрим одномерное нелинейное эволюционное уравнение (НЭУ)

$$U(u) \equiv u_t - K(t, x, u, u_1, \dots, u_n) = 0$$

$$u = u(x, t) : G = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}, \quad u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}; \quad \mathbf{R}^+ = (0; \infty),$$
(1)

которое является условием совместности переопределённой (число уравнений превышает число искомых функций, подлежащих определению) относительно собственной функции $\psi(x,t)$ системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\psi_{xx}(x,t) = A\psi(x,t) + B\psi_x(x,t),$$

$$\psi_t(x,t) = C\psi(x,t) + D\psi_x(x,t).$$
 (2)

Здесь A,B,C,D — функции, зависящие от $t,x,u,u_1,u_2,...$ и спектральных параметров; u=u(x,t) — функция, удовлетворяющая НЭУ (1). Под парой Лакса по Калоджеро для НЭУ (1) будем понимать переопределённую систему (2).

Утверждение 1. Для совместности переопределённой системы уравнений (2) достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$A_t = DA_x + 2D_x A + C_{xx} - BC_x, \tag{3}$$

$$B_t = DB_x + D_x B + D_{xx} + 2C_x, \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, дифференцируя первое уравнение системы (2) по t получаем:

$$\psi_{xxt} = (A_t + AC + BC_x + ABD)\psi + (AD + B_t + BC + BD_x + B^2D)\psi_x.$$

Дифференцируем второе уравнение системы (2) дважды по х:

$$\psi_{txx} = (C_{xx} + 2AD_x + A_xD + AC + ABD)\psi + (2C_x + AD + D_{xx} + B_xD + 2BD_x + BC + B^2D)\psi_x.$$

Используя условие совместности системы (2) $\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ и приравнивая коэффициенты при ψ и ψ_x , получаем соотношения (3), (4). Утверждение доказано.

Выражая из (4) функцию C_x и подставляя ее в (3), заключаем, что соотношение (3) принимает вид:

$$H_t = DH_x + 2D_x H - \frac{1}{2}D_{xxx},$$
 (5)

где

$$H = A + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} B^2 - B_x \right). \tag{6}$$

Таким образом, достаточные условия совместности переопределённой системы (2) принимают вид (5) - (6). Соотношение (5) будем называть "разрешающим" уравнением.

Следуя работе [5], предположим, что НЭУ (1) допускает представление в форме локального закона сохранения:

$$f_l(t,x,u,u_1,...,u_k)=g_x(t,x,u,u_1,...,u_l),$$
 (7)

где f – сохраняющаяся плотность, а g – ассоциированный с ней поток.

Утверждение 2. НЭУ (1), допускающее представление в форме локального закона сохранения (7) обладает парой Лакса по Калоджеро (2), причем:

$$A = \frac{1}{2} [f_x - \frac{1}{2} (f + \lambda)^2], \quad B = f + \lambda,$$

$$C = \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) (f + \lambda) - \alpha x + \sigma - \frac{\beta}{2},$$

$$D = \alpha x^2 + \beta x + \gamma; \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \sigma \in \mathbf{C}.$$

$$(8)$$

Доказательство. Полученное выше "разрешающее" уравнение (5) будет выполняться, если

$$A + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} B^2 - B_x) = 0, D_{xxx} = 0.$$

Запишем уравнение (4) в форме локального закона сохранения (7):

$$B_t = (DB + D_x + 2C)_x$$

Полагая

$$B=f+\lambda$$
, $DB+D_x+2C=g+2\sigma$, (9)

где $\lambda, \sigma \in C$, приходим к справедливости формул (8). Утверждение доказано.

Утверждение 3. Пусть функция $\psi(x,t) \in C_{xt}^{(3,1)}(G)$, тогда НЭУ (1) допускающее представление в форме локального закона сохранения (7) обладает следующими парами Лакса по Калоджеро (2):

$$A = \alpha (f+\tau)^{2} - \frac{1}{4} (f+\sigma)^{2} + \frac{3}{4} (f+\tau)^{-2} f_{x}^{2} - \frac{1}{2} (f+\tau)^{-1} f_{xx} + \frac{1}{2} f_{x}, \quad B = f+\sigma,$$

$$C = \frac{1}{2} \left[1 - (f+\sigma)(f+\tau)^{-1} + (f+\tau)^{-2} f_{x} \right] g - \frac{1}{2} (f+\tau)^{-1} g_{x} + \lambda,$$

$$D = (f+\tau)^{-1} g;$$
(10)

$$A = \alpha (f+\tau)^{2} - \frac{1}{4} (\gamma f+\beta)^{2} + \frac{1}{2} [\gamma - (\gamma f+\beta)(f+\tau)^{-1}] f_{x},$$

$$B = (f+\tau)^{-1} f_{x} + \gamma f+\beta, \quad C = \frac{1}{2} [\gamma - (\gamma f+\beta)(f+\tau)^{-1}] g+\mu,$$

$$D = (f+\tau)^{-1} g, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \tau, \sigma, \mu \in \mathbf{C}.$$
(11)

Так как $\psi(x,t) \in C_{rt}^{(3,1)}(G)$, Доказательство. то выполняются достаточные условия совместности (3)-(6) переопределенной относительно собственной функции системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными (2). Чтобы найти решение уравнения (5), предположим, что $D = (f + \tau)^{-1} g$, тогда функцию H будем искать в виде:

$$H=\alpha(f+\tau)^p+\beta(f+\tau)^r f_x^s+\gamma(f+\tau)^k f_{xx}^n+\lambda(f+\tau)^m f_x^l$$

подставив эту функцию в уравнение (5), получим, что

$$p=2, \beta=\frac{3}{4}, r=-2, s=2, \gamma=-\frac{1}{2}, k=-1, n=1, \lambda=m=l=0.$$

В итоге функция H принимает вид:

$$H = \alpha (f + \tau)^2 + \frac{3}{4} (f + \tau)^{-2} f_x^2 - \frac{1}{2} (f + \tau)^{-1} f_{xx}.$$
 (12)

Если предположить, что

$$B = f + \sigma, \quad DB + D_x + 2C = g + 2\lambda, \quad \lambda, \sigma \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

то уравнение (4) допускает представление в форме локального закона сохранения (7). Из (13) с учетом (12) определяется C (см. 10). С другой стороны, принимая во внимание формулы (12), (13) из соотношения (6) получаем вид функции A. Итак, имеют место формулы (10).

Теперь докажем справедливость формул (11). Так как функции H,Dнами определены, то рассмотрим уравнение (4). Легко проверить, что с учетом вида D и свойства (7) выполняется соотношение:

$$D_{xx} = [(f+\tau)^{-1}f_x]_t - [(f+\tau)^{-2}f_xg]_x.$$

Тогда исследуемое уравнение (4) представимо в форме локального закона сохранения:

 $[B-(f+\tau)^{-1}f_x]_t = [DB-(f+\tau)^{-2}f_xg+2C]_x.$ Пусть $B-(f+\tau)^{-1}f_x = \gamma f+\beta$, $DB-(f+\tau)^{-2}f_xg+2C = \gamma g+2\mu$, тогда из этих соотношений определяются функции B,C (см. 11), а из (6) — функция A. Таким образом, справедливы формулы (11). Утверждение доказано.

Утверждение 4. НЭУ (1) допускающее представление в форме локального закона сохранения (7) обладает следующими парами Лакса по Калоджеро (2):

$$A = (\alpha - \frac{1}{4}\gamma^{2})f^{2} + \frac{3}{4}f^{-2}f_{x}^{2} - \frac{1}{2}f^{-1}f_{xx} + \frac{1}{2}\gamma f_{x} - \frac{1}{2}\gamma \eta f - \frac{1}{4}\eta^{2}, \quad B = \gamma f + \eta,$$

$$C = -\frac{1}{2}\eta f^{-1}g - \frac{1}{2}(f^{-1}g)_{x} + \mu, \quad D = f^{-1}g;$$
(14)

$$A = \alpha (f+\tau)^{2} - \frac{1}{4} (\gamma f+\beta)^{2} - \frac{1}{2} (\gamma f+\beta)(f+\tau)^{-1} f_{x} + \frac{1}{2} \gamma f_{x},$$

$$B = (f+\tau)^{-1} f_{x} + \gamma f+\beta, \quad C = -\frac{1}{2} (\gamma f+\beta)(f+\tau)^{-1} (g+\xi) + \frac{1}{2} \gamma g+\mu,$$

$$D = (f+\tau)^{-1} (g+\xi), \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \tau, \sigma, \mu, \xi \in \mathbf{C}.$$
(15)

Доказательство. Для поиска решения разрешающего уравнения (5), предположим, что $D=f^{-1}g$ (в случае (14)) или $D=(f+\tau)^{-1}(g+\zeta)$ (в случае (15)), тогда функцию H будем искать в виде:

$$H = \alpha (f+\tau)^p + \beta (f+\tau)^r f_x^s + \gamma (f+\tau)^k f_{xx}^{n} + \lambda (f+\tau)^m f_x^{l},$$

подставив эту функцию в уравнение (5), получим, что

$$p=2, \beta=\frac{3}{4}, r=-2, s=2, \gamma=-\frac{1}{2}, k=-1, n=1, \lambda=m=l=0.$$

В итоге функция H принимает вид:

$$H = \alpha (f + \tau)^2 + \frac{3}{4} (f + \tau)^{-2} f_x^2 - \frac{1}{2} (f + \tau)^{-1} f_{xx}.$$
 (16)

Дополнительно предположим (для представления (14)), что τ =0. Запишем уравнение (4) в форме локального закона сохранения (7):

$$B_t = (DB + D_x + 2C)_x$$
.

Отсюда получаем соотношения:

$$B=f+\lambda$$
, $DB+D_x+2C=g+2\sigma$. (17)

Из которых с учетом вида функции D определяется функция C (см. 14). С другой стороны, принимая во внимание формулы (16), (17) из соотношения (6) получаем вид функции A. Итак, имеют место формулы (14).

Теперь докажем справедливость формул (15). Так как функции H,D нами определены, то рассмотрим уравнение (4). Легко проверить, что с учетом вида D и свойства (7) выполняется соотношение:

$$D_{xx} = [(f+\tau)^{-1}f_x]_t - [(f+\tau)^{-2}f_x(g+\zeta)]_x.$$

Тогда исследуемое уравнение (4) представимо в форме локального закона сохранения:

 $[B-(f+\tau)^{-1}f_x]_t=[DB-(f+\tau)^{-2}f_x(g+\zeta)+2C]_x.$

Пусть $B-(f+\tau)^{-1}f_x=\gamma f+\beta$, $DB-(f+\tau)^{-2}f_x(g+\xi)+2C=\gamma g+2\mu$, тогда из этих соотношений определяются функции B,C (см. 15), а из (6) — функция A. Таким образом, справедливы формулы (15). Утверждение доказано.

Теорема 1. Пусть r=r(x), s=s(x) — фундаментальная система решений уравнения Шредингера

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)-(h(x)+\alpha)\varphi(x)=0, \tag{18}$$

при заданной достаточно гладкой функции h=h(x) и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда НЭУ (1), допускающее представление в форме локального закона сохранения (7), обладает парой Лакса по Калоджеро (2) с функциями A,B,C,D следующего вида:

$$A = h + \frac{1}{2} [f(x) - \frac{1}{2} (f + \lambda)^{2}], \quad B = f + \lambda,$$

$$C = \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} (\alpha r^{2} + \beta r s + \gamma s^{2}) (f + \lambda) - \frac{1}{2} (2 \alpha r_{x} + \beta r_{x} s + \beta r s_{x} + 2 \gamma s_{x}) + \sigma,$$

$$D = \alpha r^{2} + \beta r s + \gamma s^{2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \sigma \in \mathbb{C}.$$
(19)

Доказательство. Пологая $A + \frac{1}{2} (\frac{1}{2}B^2 - B_x) = h + \alpha$, преобразуем

"разрешающее" уравнение (5) к виду

$$D_{xxx}$$
-4 $(h+\alpha)D_x$ -2 h_xD =0.

Предположим, что функция D не зависит от t, тогда исследуемое уравнение запишется в виде

$$\frac{d^3}{dx^3}D-4(h+\alpha)\frac{d}{dx}D-2h_xD=0,$$

и будет иметь общее решение вида $D=\alpha r^2+\beta \ rs+\gamma \ s^2$, где r=r(x), s=s(x) — фундаментальная система решений уравнения (18). С учетом формул (17) запишем (4) в форме локального закона сохранения

$$B_t = (DB + D_x + 2C)_x = (g + 2\sigma)_x$$

где $B=f+\lambda$; $\lambda,\sigma\in\mathbb{C}$. При этом $C=\frac{1}{2}(g-BD-D_x)+\sigma$. Итак, имеют место соотношения (19). Теорема доказана.

Литература

- 1. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М. Наука. 1986. 274 с.
- 2. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М. Мир. 1989. 324 с.
- 3. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М. Мир. 1987. 480 с.
- 4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния// Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8. Вып. 3. с. 43 53.
- 5. Calogero F., Nucci M.C. Lax pairs galore// J. Math. Phys. 1991. V.32. № 1. P. 72-74.
- 6. Рудых Г.А. Пары Лакса для одномерного нелинейного эволюционного уравнения и обобщенное преобразование Миуры. // Докл. РАН 1998. Т. 358. № 6. С. 749-751.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ НАИВЫГОДНЕЙШЕГО РАСПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СКВАЖИН, РАБОТАЮЩИХ В ОДНОРОДНОМ БЕЗГРАНИЧНОМ ГРУНТЕ¹

Д.Н. Никольский, Ю.В. Деткова Россия, Орловский государственный университет

Установлено наивыгоднейшее расположение системы χ эксплуатационных скважин в однородном изотропном и безграничном грунте с подвижным контуром нефтеносности. Вода и нефть в рассматриваемой задаче моделируются жидкостями различной вязкости. Исследованы случаи, когда число эксплуатационных скважин равно двум и трём.

1. Задача об эволюции контура нефтеносности Γ_t к системе эксплуатационных скважин в однородном, изотропном и безграничном грунте описывается системой интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода и дифференциального уравнения [1]:

$$g(M,t) - 2\lambda \int_{\Gamma_{t}} g(N) \frac{\partial \Phi_{1}(M,N)}{\partial n_{N}} dl_{N} = 2\lambda \varphi_{0}(M,t), \ N(\xi,\eta), M(x,y) \in \Gamma_{t},$$

$$\lambda = \frac{\mu_{2} - \mu_{1}}{\mu_{2} + \mu_{1}}$$

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = \nabla_{M} \varphi_{0}(M,t) + \int_{\Gamma_{t}} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_{N}} \left(\frac{\partial \psi_{2}(M,N)}{\partial y_{M}} \vec{i} - \frac{\partial \psi_{2}(M,N)}{\partial x_{M}} \vec{j} \right) dl_{N}, \ M \in \Gamma_{t},$$

$$\Phi_{1}(M,N) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^{2} + (y-\eta)^{2}},$$

$$\psi_{2}(M,N) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^{2} + (y-\eta)^{2}},$$

$$\varphi_{0}(M,t) = \sum_{j=1}^{\chi} \frac{-q_{j}}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_{j})^{2} + (y-y_{j})^{2}},$$

$$(1)$$

где μ_2 и μ_1 - вязкости нефти и воды, q_j – дебит j -й скважины, (x_j,y_j) – координаты центра j -й скважины. Систему уравнений (1) решаем при начальных условиях: заданном в начальный момент времени t=0 контуре нефтеносности Γ_0 :

$$\vec{r}(0,\sigma) = \vec{r}_0(\sigma), \ \sigma - napamemp.$$
 (2)

Для численного решения контур Γ_0 представляется системой точек $(x_m, y_m), m = 1, 2, ..., n$, вычисленных по формуле (2). Интегральное уравнение в системе (1) заменяется системой линейных алгебраических уравнений, а дифференциальное уравнение в системе (1) заменяется разностным аналогом [1]:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433)

$$g_{m} - 2\lambda \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} g_{K} \left(\frac{\partial \Phi_{1}(M,N)}{\partial n_{N}} \right)_{m,k} \Delta l_{k} = 2\lambda \varphi_{0m}, m = 1,2,...,n,$$

$$\frac{\Delta \vec{r}_{m}}{\Delta t} = \vec{v}_{0m} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n} \left(\left(\frac{\partial \psi_{2}(M,N)}{\partial y} \right)_{m,k} \vec{i} - \left(\frac{\partial \psi_{2}(M,N)}{\partial x} \right)_{m,k} \vec{i} \right) \Delta g_{k}, m = 1,2,...,n.$$

2. В качестве первоначального контура нефтеносности Γ_0 выберем эллипс, с параметрическими уравнениями:

$$x = a \cos \Theta$$
, $y = b \sin \Theta$,

где a > b для определенности.

За характеристическое расстояние L_0 примем полуось b эллипса. За характерное время T_0 примем время заводнения скважины, расположенной в центре эллипса в случае "разноцветных" жидкостей, когда $\lambda = 0$ [1]:

$$T_0 = \frac{\pi L_0^2}{q}.$$

Наивыгоднейшее расположение скважин будем определять по объему откаченной нефти. Объем откаченной нефти можно определить исходя из физического смысла дебита — объем жидкости, выкаченной за единицу времени, с учетом того, что толщина слоя равна единице. В случае системы числа К скважин

$$\Delta V_j = \sum_{j=1}^{\chi} q_j T_j,$$

где T_i время заводнения j-й скважины.

Для контроля проделанных численных расчетов будем вычислять изменение площади ΔS нефтяного месторождения численно, по точкам контура Γ_t в момент отключения последней скважины:

$$\Delta S \approx \pi a b - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(y_i + y_{i-1}).$$

Выберем a=2, b=1, $\lambda=0.5$. Рассмотрим случай 2-х скважин. Будем располагать скважины на оси ОХ симметрично относительно начала координат. Такое положение скважин предпочтительно в силу симметрии эллипса. Это предположение подтвердили и практические эксперименты.

На первом этапе расположим скважины вблизи границ эллипса. Например, возьмем точки с координатами (-1.49, 0) и (1.49, 0). В данном случае граница тут же попадет в скважину. Следовательно, далее необходимо продолжить исследование, постепенно приближая скважины к началу координат. Перебираем возможные варианты с шагом $|\Delta x| = 0.1$.

Начиная с точек (-1.3, 0) и (1.3, 0) объем откаченной нефти постепенно возрастает. При расположении скважин в точках (-0.5, 0) и (0.5, 0) объем откаченной нефти достигает максимума.

Далее продолжим исследование, смещая скважины относительно точки максимума на сотые доли. При смещении на 0.01 к центру эллипса (точки (-0.49, 0) и (0.49, 0)) объем откаченной нефти начинает сокращаться. При смещении же на 0.01 от центра эллипса продолжаем выкачивать максимальный объем вплоть до точек (-0.57, 0), (0.57, 0). При этом время заводнения первой и второй скважин совпадает в силу их симметрии $T_1 = T_2 = T = 0,606$, а объем максимально откаченной нефти V = 3.81 (смотри рисунок 1), а $\Delta S = 3.81$.

Рассмотрим поведение системы в случае трех эксплуатационных скважин $\chi=3$. Расположим одну скважину в начале координат, а две другие будем симметрично передвигать по оси ОХ относительно первой. Такое расположение скважин является наилучшим в силу симметрии эллипса, и было подтверждено экспериментальными исследованиями.

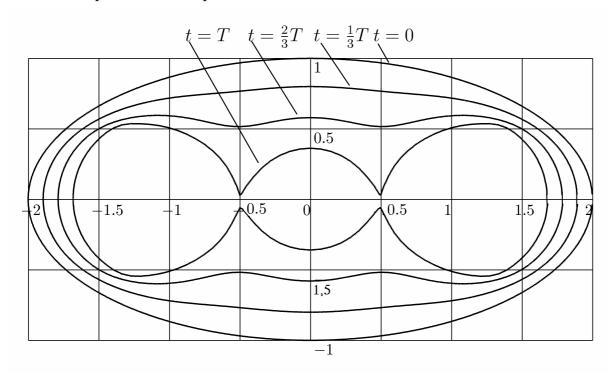


Рис. 1: Стягивание контура нефтеносности к двум скважинам.

Вначале расположим скважины ближе к границе эллипса. При таком расположении граница тут же попадает в скважину. Начинаем постепенно перемещать скважины ближе к центру. В точках (-0.9, 0), (0.9, 0) и (0, 0) объем откаченной нефти максимален. Продолжаем дальнейшее исследование, смещая скважины на сотые доли относительно найденного оптимального расположения. Максимальный результат сохраняется при смещении скважин к центру эллипса вплоть до точек (-0.83, 0), (0.83, 0) и (0, 0). При этом время заводнения первой и второй симметричных скважин

 $T_1 = T_2 = T = 0,454$, время заводнения третьей скважины (расположенной в начале координат) T = 0.55. Объем максимально откаченной нефти V = 4.58 (смотри рисунок 2), а $\Delta S = 4.58$.

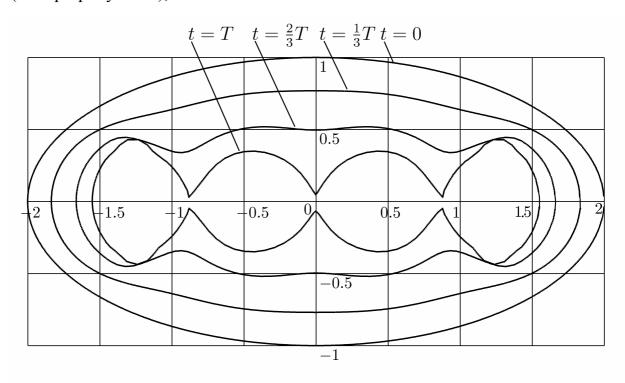


Рис. 2: Стягивание контура нефтеносности к трем скважинам.

Литература

1. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважина в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Орел. ОГУ. 2001.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О РАБОТЕ НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ С ПОДВИЖНЫМ КОНТУРОМ НЕФТЕНОСНОСТИ 1

Д.Н. Никольский^{*}, Т.А. Никольская^{**} Россия, ^{*}Орловский государственный университет ^{**}Орловский государственный технический университет

Найден дебит скважины, при котором время безводной эксплуатации скважины стремится к бесконечности. При этом дебите вычислено время, по истечению которого контур нефтеносности займёт положение равновесия, а так же время, по истечению которого контур вернётся в исходное положение, в случае выключения скважины.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433).

1. Задача об эволюции первоначально плоского контура нефтеносности к линейной скважине, расположенной вертикально, является осесимметричной (рис. 1) и описывается следующими уравнениями [1]:

$$g(M,t) - 2\lambda \int_{\Gamma_{t}} g(N,t) \frac{\partial \Phi_{1}(M,N)}{\partial n_{N}} dl_{N} = 2\lambda \varphi_{0}(M,t) + 2\alpha x_{M}, \quad M \in \Gamma_{t},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla \varphi_{0}(M,t) + \int_{\Gamma_{t}} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_{N}} \frac{1}{y_{M}} \left[\frac{\partial \Psi_{2}(M,N)}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial \Psi_{2}(M,N)}{\partial x} \vec{j} \right] dl_{N}, \quad M \in \Gamma_{t}$$

$$(1)$$

Здесь $\Phi_1(M,N) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y_M\ y_N}} \int\limits_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega-2\cos\varphi}}$ — потенциал осесимметричного стока расход, которого равен -1,

ного стока расход, которого равен -1, $\Psi_2(M,N) = -\frac{\sqrt{y_M\ y_N}}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\cos\varphi\ d\varphi}{\sqrt{2\omega-2\cos\varphi}} \quad \text{функция тока осесимметричного}$

вихря с циркуляцией равной -1, $\omega = \frac{(x_M - x_N)^2 + y_M^2 + y_N^2}{2y_M y_N}$, $\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$,

 $\alpha = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\mu_2 + \mu_1}$, μ_2 , ρ_2 — вязкость и плотность нефти, μ_1 , ρ_1 — вязкость и

плотность воды,
$$\varphi_0(M,t) = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{x_M + \sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{x_M - L + \sqrt{(x_M - L)^2 + y_M^2}}$$
 — потенциал

линейной вертикальной скважины, декартовы координаты концов которой (0,0) и (L,0), где L длина фильтра.

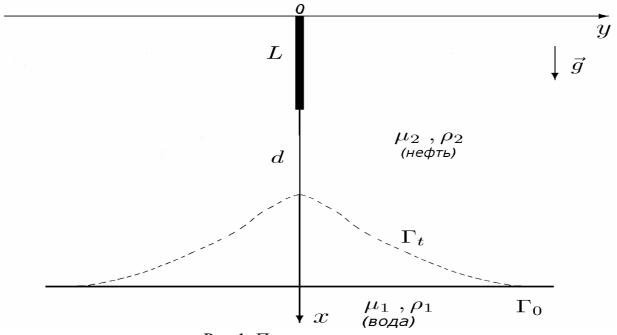


Рис.1: Постановка задачи.

Для решения системы уравнений (1) используем схему приведённую в [1].

2. За характерное расстояние примем расстояние d от первоначального контура нефтеносности Γ_0 до контура скважины. За характерное время T_0 примем время заводнения системы при $\lambda = 0$ и $\alpha = 0$ [1]:

$$T_0 = \frac{2\pi d^2 (3L + 2d)}{3Lq} \tag{2}$$

В ходе численных расчётов было найден критический дебит q_* — наибольший дебит, при котором время безводной эксплуатации скважины стремится к бесконечности. Так на рис. 2 построена зависимость времени Т от q при $\lambda=0.5,\ \alpha=0.1$, $L=\frac{d}{2}$.

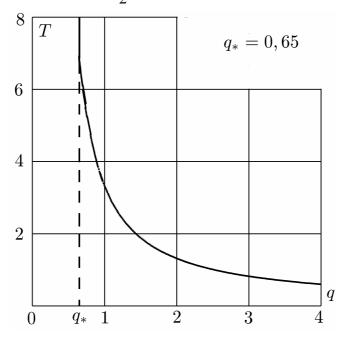


Рис. 2. Отыскание критического дебита.

Критический дебит на рис. 2 определяется графически, построением асимптоты и кривой.

На рисунке 3 построены последовательные положения контура нефтеносности в различные моменты времени при $\lambda=0.5,~\alpha=0.1$, $L=\frac{d}{2}$ и $q=q_*=0.65$ На рисунке 3 время T, по истечению которого контур нефтеносности перестаёт перемещаться и занимает устойчивое положение, сохраняющееся в течение очень продолжительного промежутка времени.

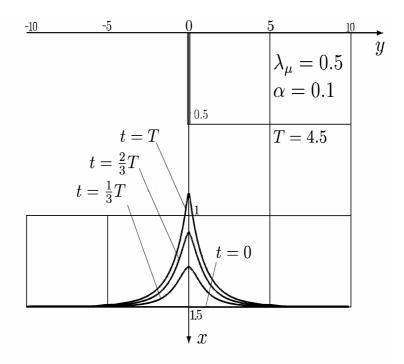


Рис. 3. Поднятие контура нефтеносности.

Продолжим исследование и проследим опускание контура нефтеносности под действием силы тяжести в случае отключения скважины (положим q=0 в последней просчитанной задаче (рис. 3)). За время опускания конуса примем время, по истечению которого контур нефтеносности опустится так, что его высота станет равной $\frac{1}{10}d$ (рис. 4).

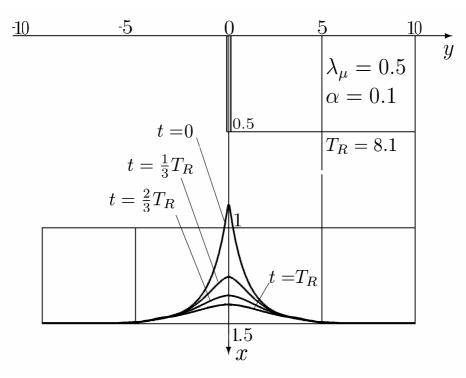


Рис.4: Опускание контура нефтеносности.

Характерное время на рис. 4 оставим равным (2), чтобы сравнить между собой время поднятия и время опускания конуса. Видим, что время опускания больше чем время поднятия в 1.8 раз.

Литература

1. Никольский Д.Н. Никольская Т.А. Решение осесимметричной задачи о поднятии конуса подошвенной воды к линейной скважине в бесконечном пласте. Сб. трудов Межд. шк. - сем. «МДОЗМФ». Орел. 2004. С. 38-42.

УДК 532.546

ЗАДАЧА ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЙ СКОРОСТИ¹

В.Ф. Пивень

Россия, Орловский государственный университет

Ставиться для комплексной скорости двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в неоднородном слое. Это позволяет обосновать выражения предельных значений скорости на этой границе и исследование задачи эволюции свести к решению системы интегрального и дифференциального уравнений. Указываются пути упрощения этой системы.

1. Нестационарную двумерную фильтрацию несжимаемой жидкости вязкости μ и плотности ρ в недеформируемом тонком слое проницаемости K и толщины H описывает поле скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$, которое как функция координат (x, y) плоского основания слоя и времени t удовлетворяет всюду в области течения (за исключением особых точек \vec{v}) системе уравнений [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v_y(x, y, t)}{K(x, y)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v_x(x, y, t)}{K(x, y)} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[H(x, y) v_x(x, y, t) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[H(x, y) v_y(x, y, t) \right] = 0.$$
(1.1)

Здесь K(x,y) и H(x,y) - непрерывно дифференцируемые (хотя бы один раз) функции x,y. Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах.

Рассмотрим течение двух несмешивающихся жидкостей вязкостей μ_1 , μ_2 и плотностей ρ_1 , ρ_2 , когда одна из них полностью замещает другую («поршневое» вытеснение). На подвижной границе Γ_t раздела жидкостей выполняются условия непрерывности давления (если пренебречь капиллярными силами) и расхода жидкостей, которые для касательной $v_{\tau}(x,y,t)$ и нормальной $v_{n}(x,y,t)$ составляющих скорости имеют вид [1]

_

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433).

$$\mu_{1}v_{\tau}^{+}(x,y,t) - \mu_{2}v_{\tau}^{-}(x,y,t) = (\rho_{2} - \rho_{1})K(x,y)\frac{\partial \Pi(x,y,t)}{\partial \tau},$$

$$v_{n}^{+}(x,y,t) = v_{n}^{-}(x,y,t), \quad (x,y) \in \Gamma_{t}.$$
(1.2)

Здесь и далее «+» («-») обозначают предельные значения соответствующих функций при подходе к границе со стороны (противоположенной стороны) орта \vec{n} нормали к ней. Орт \vec{n} к границе Γ_t направлен в область, занятой первой жидкостью. $\Pi(x,y,t)$ - потенциал массовых сил, действующих на жидкости.

Если область течения ограничена сингулярной линией σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$), на которой проницаемость K обращается в бесконечность (линия σ_{01}) и проницаемость K и толщина H обращаются в ноль (одновременно или порознь на линии σ_{02}), то выполняются условия [1]

$$v_{\tau}^{+}(x, y, t) = 0, \qquad (x, y) \in \sigma_{01},$$

$$[H(x, y)v_{n}(x, y, t)]^{+} = 0, \qquad (x, y) \in \sigma_{02}.$$
(1.3)

Введем вектор приведенной скорости $\vec{V} = (V_x, V_y)$, связанный со скоростью \vec{v} равенством $\vec{V} = \vec{v}/_{K}$.

Течение жидкостей будем описывать в комплексной плоскости z = x + iy комплексной приведенной скоростью

$$V(z,t) = V_x(z,t) + iV_y(z,t) = \frac{v_x(z,t) + iv_y(z,t)}{K(z)}.$$
 (1.4)

Относительно скорости (1.4) уравнения (1.1) запишем:

$$\frac{\partial \overline{V}(z,t)}{\partial \overline{z}} + A(z)\overline{V}(z,t) + \overline{A}(z)V(z,t) = 0, \qquad (1.5)$$

где
$$A(z) = \frac{\partial \ln \sqrt{P(z)}}{\partial \overline{z}}$$
, $\overline{A}(z) = \frac{\partial \ln \sqrt{P(z)}}{\partial z}$ ($P(z) = K(z)H(z)$ - проводимость слоя), $2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$, $2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$.

Для касательной $V_{\tau}(z,t)$ и нормальной $V_{n}(z,t)$ составляющих приведенной скорости к границе Γ_{t} имеем

$$V_{\tau}(z,t) = V_{x}(z,t)\cos\Theta_{z} + V_{y}(z,t)\sin\Theta_{z},$$

$$V_{n}(z,t) = V_{x}(z,t)\sin\Theta_{z} - V_{y}(z,t)\cos\Theta_{z}$$

или, учитывая (1.4),

$$V_{\tau}(z,t)+iV_{n}(z,t)=\left(V_{x}(z,t)-iV_{y}(z,t)\right)\left(\cos\Theta_{z}+i\sin\Theta_{z}\right)=\overline{V}(z,t)e^{i\Theta_{z}}$$
, $z\in\Gamma_{t}$, (1.6) где Θ_{z} - угол между ортом касательной $\vec{\tau}_{z}\in\Gamma_{t}$ и осью Ox .

Второе из условий (1.2) умножим на i и почленно сложим с первым. Учитывая (1.4), (1.6), находим условия для комплексной скорости V(z,t) на границе Γ_t :

$$\left(\overline{V}^{+}(z,t) - \overline{V}^{-}(z,t)\right)e^{i\Theta_{z}} - \lambda_{\mu}\operatorname{Re}\left[\left(\overline{V}^{+}(z,t) + \overline{V}^{-}(z,t)\right)e^{i\Theta_{z}}\right] = 2\alpha \frac{\partial \Pi(z,t)}{\partial \tau_{z}}$$

$$\left(\lambda_{\mu} = \frac{\mu_{2} - \mu_{1}}{\mu_{2} + \mu_{1}}, \alpha = \frac{\rho_{2} - \rho_{1}}{\mu_{2} + \mu_{1}}\right), \qquad z \in \Gamma_{t}.$$
(1.7)

Так как $v_{\tau} = KV_{\tau}$, $v_n = KV_n$, то с учетом (1.6) условия (1.3) запишем для V(z,t) в виде

$$\left[K(z)\operatorname{Re}\left(\overline{V}(z,t)e^{i\Theta_z}\right)\right]^{+} = 0, \qquad z \in \sigma_{01},
\left[P(z)\operatorname{Im}\left(\overline{V}(z,t)e^{i\Theta_z}\right)\right]^{+} = 0, \qquad z \in \sigma_{02}.$$
(1.8)

жидкостей вызвано источниками (стоками), которые Течение (особыми) точками скорости моделируем сингулярными расположенными в области D плоскости z. Пусть $V_0(z,t)$ - комплексная приведенная скорость течения жидкости вязкости $\mu = 1$ и плотности $\rho = 1$ в области Dзаданными сингулярностями. Тогда комплексную приведенную скорость течения (первой жидкости - в области D_1 , второй жидкости – в области D_2 , $D = D_1 \cup D_2$) запишем

$$V(z,t) = V_0(z,t) + V_*(z,t), z \in D.$$
 (1.9)

Здесь $V_*(z,t)$ - комплексная приведенная скорость возмущений, обусловленных различием вязкостей и плотностей этих жидкостей.

Так как скорость $V_0(z,t)$ непрерывна на границе Γ_t $\Big(V^+(z,t)\!=\!V^-(z,t)\!=\!V_0(z,t),\ z\in\Gamma_t\Big)$, то с учетом (1.9) условие (1.7) запишем для $V_*(z,t)$:

$$\left(\overline{V}_{*}^{+}(z,t) - \overline{V}_{*}^{-}(z,t)\right)e^{i\Theta_{z}} - \lambda\mu\operatorname{Re}\left[\left(\overline{V}_{*}^{+}(z,t) + \overline{V}_{*}^{-}(z,t)\right)e^{i\Theta_{z}}\right] =
= 2\alpha \frac{\partial\Pi(z,t)}{\partial\tau_{z}} + 2\lambda_{\mu}\operatorname{Re}\left[\overline{V}_{0}(z,t)e^{i\Theta_{z}}\right], \qquad z \in \Gamma_{t}.$$
(1.10)

Пусть скорость $V_0(z,t)$ удовлетворяет условиям (1.8). Тогда согласно (1.9) этим же условиям будет удовлетворять скорость $V_*(z,t)$.

Полагаем, что на бесконечности (если область D неограничена) возмущения затухают:

$$V_*(z,t) \to 0$$
 при $|z| \to \infty$. (1.11)

Учтем, что физическая скорость $\vec{U} = (U_x, U_y) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right)$ и скорость фильтрации $\vec{v} = K\vec{V}$ взаимосвязаны равенством $\vec{U} = K\vec{V}$ (в безразмерных величинах) или в комплексной форме $\frac{dz}{dt} = K(z)V(z,t)$. Тогда согласно [1] с учетом (1.9) и непрерывности $V_0(z,t)$ на границе Γ_t получаем дифференциальное уравнение движения этой границы в комплексной форме

$$\frac{dz}{dt} = K(z) \left[V_0(z,t) + \frac{V_*^+(z,t) + V_*^-(z,t)}{2} \right], \qquad z \in \Gamma_t.$$
 (1.12)

Уравнение границы Γ_t представляем параметрически (s - параметр)

$$z = z(t,s) \qquad (x = x \ (t,s), \ y = y \ (t,s)), \qquad z \in \Gamma_t. \tag{1.13}$$

Полагаем, что в момент времени t=0 эта граница известна $(\Gamma_t = \Gamma_0)$ и согласно (1.13) и её уравнение имеет вид:

$$z_0 = z(0,s)$$
 $(x_0 = x(0,s), y_0 = y(0,s)), z \in \Gamma_0.$ (1.14)

Таким образом, задача эволюции границы Γ_t в слое проводимости P(z) состоит в том, чтобы по заданным источникам (стокам) течения (задано $V_0(z,t)$) и её начальному положению в момент времени t=0 найти положение этой границы в моменты времени t>0. Исследование этой задачи сводится к решению системы уравнений (1.5), (1.12) при условиях (1.8), (1.10), (1.11), (1.14).

2. Уравнение (1.5) имеет два решения $\overline{V}_1(z,\zeta)$ и $\overline{V}_2(z,\zeta)$, обладающих асимптотикой (в точке $z=\zeta$ они имеют простые полюсы)

$$\overline{V}_1(z,\zeta) \sim -\frac{1}{2\pi P(\zeta)(z-\zeta)}, \qquad \overline{V}_2(z,\zeta) \sim -\frac{1}{2\pi i(z-\zeta)}$$
 при $z \to \zeta$. (2.1)

Назовем $\overline{V_1}(z,\zeta)$ и $\overline{V_2}(z,\zeta)$ первым и вторым главными решениями уравнения (1.5). $\overline{V_1}(z,\zeta)$ и $\overline{V_2}(z,\zeta)$ описывают поля скоростей от нормированного стока (полной мощности - 1) и нормированного вихря (интенсивности - 1). Сток (вихрь) расположен в точке $z=\zeta$.

Учтем, что на границе Γ_t в соответствии с условием (1.2) нормальная составляющая поля скорости непрерывна, а его касательная составляющая терпит разрыв. Поэтому комплексную приведенную скорость $\overline{V}_*(z,t)$ ищем виде вихревого слоя, непрерывно распределенного с плотностью $f(\zeta,t)$ на границе Γ_t :

$$\overline{V}_*(z,t) = \int_{\Gamma_t} f(\zeta,t) \overline{V}_2(z,\zeta) dl_{\zeta}, \qquad z \in D.$$
 (2.2)

Полагаем, что $\overline{V}_2(z,\zeta)$ удовлетворяет условиям (1.8). Тогда этим же условиям будет удовлетворять скорость (2.2).

В силу (2.1) скорость (2.2) также удовлетворяет условию (1.11).

Удовлетворим скорость (2.2) условию (1.10). Для этого найдем её предельные значения на границе Γ_t . Запишем (2.2) с учетом $d\zeta = e^{i\Theta_\zeta}$, $\zeta \in \Gamma_t$ в виде

$$\overline{V}_*(z,t) = \int_{\Gamma_t} g(\zeta,t)\overline{V}_2(z,\zeta)d\zeta \qquad (g(\zeta,t) = f(\zeta,t)e^{-i\Theta_\zeta}), \ z \in D.$$
 (2.3)

В силу асимптотики (2.1) для $\overline{V}_2(z,\zeta)$ интеграл в (2.3) существует в смысле главного значения по Коши, если в любой момент времени $t \ge 0$ кривая Γ_t -гладкая и функция $g(\zeta,t),\ \zeta \in \Gamma_t$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|g(\zeta_1,t)-g(\zeta_2,t)| \le A|\zeta_1-\zeta_2|^{\mu},$$
 (2.4)

где A и μ - положительные постоянные $(\mu \in (0,1]), \zeta_1$ и ζ_2 - две любые точки Γ_t .

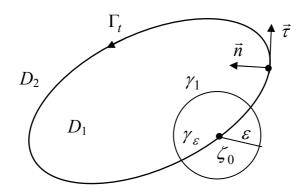


Рис. Контуры интегрирования.

Из точки $\zeta_0\in\Gamma_t$ проведем окружность γ малого радиуса ε , которая вырежет отрезок γ_ε границы Γ_t (см. рисунок). Интеграл по кривой $\Gamma'_t=\Gamma_t\setminus\varepsilon$:

$$J_{\varepsilon}(\zeta_0, t) = \int_{\Gamma_t'} g(\zeta, t) \overline{V}_2(\zeta, \zeta_0) d\zeta$$
 (2.5)

существует в обычном смысле. Предел этого интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(\zeta_0, t) = \int_{\Gamma_t} g(\zeta, t) \overline{V}_2(\zeta_0, \zeta) d\zeta$$
 (2.6)

назовем сингулярным интегралом Коши.

Интеграл (2.5) представим в виде:

$$J(\zeta_{0},t) = \int_{\Gamma_{t}}^{\tau} [g(\zeta,t) - g(\zeta_{0},t)] \overline{V_{2}}(\zeta_{0},\zeta) d\zeta + g(\zeta_{0},t) \int_{\Gamma_{t} \cup \gamma_{2}} \overline{V_{2}}(\zeta_{0},\zeta) d\zeta - g(\zeta_{0},t) \int_{\gamma_{2}} \overline{V_{2}}(\zeta_{0},\zeta) d\zeta ,$$

$$(2.7)$$

где γ_2 - часть окружности γ , лежащая в области D_2 (другая ее часть γ_1 лежит в области D_1 , $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$).

Согласно (1.6) запишем

$$\overline{V}_{2}(\zeta_{0},\zeta)e^{i\Theta_{\zeta}} = V_{2\tau}(\zeta_{0},\zeta) + iV_{2n}(\zeta_{0},\zeta),$$

где $V_{2\tau}(\zeta_0,\zeta)$ и $V_{2n}(\zeta_0,\zeta)$ - касательная и нормальная составляющие к контуру интегрирования скорости нормированного вихря. Тогда

$$\int_{\Gamma'_t \cup \gamma_2} \overline{V}_2(\zeta_0, \zeta) d\zeta = \int_{\Gamma'_t \cup \gamma_2} V_{2\tau}(\zeta_0, \zeta) dl_{\zeta} + i \int_{\Gamma'_t \cup \gamma_2} V_{2n}(\zeta_0, \zeta) dl_{\zeta}.$$

Стоящий в этом равенстве первый интеграл определяет циркуляцию, а второй интеграл – поток скорости нормированного вихря, вычисленные для замкнутого контура $\Gamma'_t \cup \gamma_2$. Так как контур $\Gamma'_t \cup \gamma_2$ охватывает расположенный в точке $\zeta_0 \in \Gamma_t$ вихрь, который согласно (2.1) имеет асимптотику (интенсивность вихря +1):

$$\overline{V}_2(\zeta_0,\zeta) \cong \frac{1}{2\pi i(\zeta-\zeta_0)}$$
 при $\zeta \to \zeta_0$, (2.8)

то в соответствие с обобщенной теоремой о вычитах [2] имеем

$$\int_{\Gamma'_t \cup \gamma_2} V_{2\tau}(\zeta_0, \zeta) dl_{\zeta} = 1, \qquad \int_{\Gamma'_t \cup \gamma_2} V_{2n}(\zeta_0, \zeta) dl_{\zeta} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma_t' \cup \gamma_2} \overline{V_2}(\zeta_0, \zeta) d\zeta = 1.$$
(2.9)

Так как $g(\zeta,t)$ - функция Гёльдера, то с учетом (2.4), (2.8) имеем асимптотическую оценку выражения в (2.7):

$$\|[g(\zeta,t)-g(\zeta_0,t)]\overline{V}_2(\zeta_0,\zeta)\|\lesssim \frac{A}{2\pi}|\zeta-\zeta_0|^{\mu-1}$$
 при $\zeta\to\zeta_0$.

Тогда согласно [3] следует существование несобственного интеграла

$$\int_{\Gamma_t} [g(\zeta,t) - g(\zeta_0,t)] \overline{V}_2(\zeta_0,\zeta) d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_t'} [g(\zeta,t) - g(\zeta_0,t)] \overline{V}_2(\zeta_0,\zeta) d\zeta,$$

являющегося непрерывной функцией $\zeta_0 \in \Gamma_t$.

Так как кривая Γ_t - гладкая и на части γ_2 окружности γ : $\zeta - \zeta_0 = \varepsilon e^{i\vartheta}$, $d\zeta = i\varepsilon e^{i\vartheta}d\vartheta = i(\zeta - \zeta_0)d\vartheta$, $\vartheta \in [0,\pi]$, то с учетом (2.8) имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_2} \overline{V_2}(\zeta_0, \zeta) d\zeta \sim \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} d\vartheta = \frac{1}{2}.$$
 (2.11)

Переходя в равенстве (2.7) к пределу и учитывая (2.6), и (2.9)-(2.11), получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(\zeta_{0}, t) = \int_{\Gamma_{t}} g(\zeta, t) \overline{V_{2}}(\zeta_{0}, \zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_{t}} [g(\zeta, t) - g(\zeta_{0}, t)] \overline{V_{2}}(\zeta_{0}, \zeta) d\zeta + \frac{g(\zeta_{0}, t)}{2},$$

$$\zeta_{0} \in \Gamma_{t}. \tag{2.12}$$

Теперь запишем (2.3) следующим образом

$$\overline{V}_*(z,t) = \int_{\Gamma_t} [g(\zeta,t) - g(\zeta_0,t)] \overline{V}_2(z,\zeta) d\zeta + g(\zeta_0,t) \int_{\Gamma_t} \overline{V}_2(z,\zeta) d\zeta, \ z \notin \Gamma_t, \ \zeta_0 \in \Gamma_t.$$

(2.13)

На основании обобщенной теоремы о вычетах [2] с учетом для $\overline{V}_2(z,\zeta)$ асимптотики (2.1) имеем (по аналогии с выводом формулы (2.9))

$$\int_{\Gamma_c} \overline{V_2}(z,\zeta) d\zeta = \begin{cases} 1, & z \in D_1, \\ 0, & z \in D_2. \end{cases}$$

Тогда согласно (2.13) имеем ($\zeta_0 \in \Gamma_t$):

$$\overline{V}_{*}(z,t) = \int_{\Gamma_{t}} [g(\zeta,t) - g(\zeta_{0},t)] \overline{V}_{2}(z,\zeta) d\zeta + g(\zeta_{0},t), \qquad z \in D_{1},$$

$$\overline{V}_{*}(z,t) = \int_{\Gamma_{t}} [g(\zeta,t) - g(\zeta_{0},t)] \overline{V}_{2}(z,\zeta) d\zeta, \qquad z \in D_{2}.$$
(2.14)

Поскольку $g(\zeta,t)$ - функция Гёльдера, и имеет место для $\overline{V}_2(z,\zeta)$ асимптотика (2.1), то интеграл в равенствах (2.14) при $z \to \zeta_0 \in \Gamma_t$ из области D_1 или D_2 является согласно [3] непрерывной функцией при переходе через кривую Γ_t . Следовательно, существуют предельные значения равенств (2.14):

$$\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in D_1}} V_*(z,t) = \overline{V}_*^+(\zeta_0,t) = \int_{\Gamma_t} [g(\zeta,t) - g(\zeta_0,t)] \overline{V}_2(\zeta_0,\zeta) d\zeta + g(\zeta_0,t),$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in D_2}} V_*(z,t) = \overline{V}_*^-(\zeta_0,t) = \int_{\Gamma_t} [g(\zeta,t) - g(\zeta_0,t)] \overline{V}_2(\zeta_0,\zeta) d\zeta, \qquad \zeta_0 \in \Gamma_t,$$

которые при учете (2.12) запишем

$$\overline{V}_{*}^{\pm}(\zeta_{0},t) = \int_{\Gamma_{t}} g(\zeta,t)\overline{V}_{2}(\zeta_{0},\zeta)d\zeta \pm \frac{g(\zeta_{0},t)}{2}, \qquad \zeta \in \Gamma_{t}.$$
 (2.15)

Тогда с учетом (2.3) и (2.15) имеем предельные значения скорости (2.2):

$$\overline{V}_{*}^{\pm}(\zeta_{0},t) = \int_{\Gamma_{t}} f(\zeta,t)\overline{V}_{2}(z,\zeta)dl_{\zeta} \pm \frac{f(z,t)}{2}e^{-i\Theta_{z}}, \quad z \in \Gamma_{t}.$$
 (2.16)

Напоминаем, что в (2.15) и (2.16) интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Отметим, что поскольку $\overline{V}_* = V_{*_X}(z,t) - iV_{*_Y}(z,t)$ и $\overline{V}_2(z,\zeta) = V_{2_X}(z,\zeta) - iV_{2_Y}(z,\zeta)$, то согласно (2.16) имеем для вектора скорости возмущений $\vec{V}_*(z,t) = \left(V_{*_X}(z,t),V_{*_Y}(z,t)\right)$ предельные значения (если $f(\zeta,t)$ - вещественная функция ζ):

$$\vec{V}_*^{\pm}(z,t) = \int_{\Gamma_t} f(\zeta,t) \vec{V}_2(z,\zeta) dl_{\zeta} \pm \frac{f(z,t)}{2} \vec{\tau}_z, \qquad z \in \Gamma_t,$$

где $\vec{V}_2(z,\zeta) = (V_{2x}(z,\zeta), V_{2y}(z,\zeta)), \ \vec{\tau}_z = (\cos\Theta_z,\sin\Theta_z)$ - орт касательной в точке $z \in \Gamma_t$.

Воспользуемся (2.16) и удовлетворяем скорость (2.2) условию (1.10). Получаем равенство

$$\frac{f(z,t)}{2} - \lambda_{\mu} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_{t}} f(\zeta,t) \overline{V}_{2}(z,\zeta) e^{i\Theta_{z}} dl_{\zeta} = \alpha \frac{\partial \Pi(z,t)}{\partial \tau_{z}} + \lambda_{\mu} \operatorname{Re} \left[\overline{V}_{0}(z,t) e^{i\Theta_{z}} \right], \ z \in \Gamma_{t}.$$

Отсюда следует, что функция f(z,t) вещественная. Так как согласно (1.6)

$$\operatorname{Re}\left[\overline{V}_{2}(z,\zeta)e^{i\Theta_{z}}\right] = V_{2\tau}(z,\zeta) = \overrightarrow{V}_{2}(z,\zeta) \cdot \overrightarrow{\tau}_{z},
\operatorname{Re}\left[\overline{V}_{0}(z,t)e^{i\Theta_{z}}\right] = V_{0\tau}(z,t) = \overrightarrow{V}_{0}(z,t) \cdot \overrightarrow{\tau}_{z}, \ z \in \Gamma_{t},$$

то относительно f(z,t) имеем вещественное неоднородное интегральное уравнение второго рода

$$\frac{f(z,t)}{2} - \lambda_{\mu} \int_{\Gamma_{t}} f(\zeta,t) \vec{V}_{2}(z,\zeta) \cdot \vec{\tau}_{z} dl_{\zeta} = \left[\alpha \nabla \Pi(z,t) + \lambda_{\mu} \vec{V}_{0}(z,t) \right] \cdot \vec{\tau}_{z}, \quad z \in \Gamma_{t}.$$
 (2.17)

Учитывая (2.16), комплексное дифференциальное уравнение (1.12) запишем

$$\frac{dz}{dt} = K(z) \left[V_0(z,t) + \int_{\Gamma_t} f(\zeta,z) V_2(z,\zeta) dl_{\zeta} \right], \qquad z \in \Gamma_t.$$
 (2.18)

В уравнениях (2.17), (2.18) интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, исследование задачи эволюции границы Γ_t сводится к решению системы уравнений (2.17), (2.18) (всего три вещественных уравнения) при начальном условии (1.14).

3. Упростим систему уравнений (2.17), (2.18). Умножим на $e^{i\Theta_z}$, $z\in\Gamma_t$ комплексно сопряженное (2.18) выражение. Получаем равенство

$$\frac{d\overline{z}}{dt}e^{i\Theta_z} = K(z) \left[\overline{V_0}(z,t)e^{i\Theta_z} + \int_{\Gamma_t} f(\zeta,t)\overline{V_2}(z,\zeta)e^{i\Theta_z} dl_{\zeta} \right], \qquad z \in \Gamma_t.$$
 (3.1)

Возьмем действительную часть равенства (3.1) и, учитывая уравнение (2.17), находим

$$f(z,t) = 2 \left[\frac{\lambda_{\mu}}{K(z)} \operatorname{Re} \left(\frac{d\overline{z}}{dt} e^{i\Theta_{z}} \right) + \alpha \nabla \Pi(z,t) \cdot \vec{\tau}_{t} \right], \qquad z \in \Gamma_{t}.$$
 (3.2)

Подставляя (3.2) в уравнение (2.18), получаем комплексное интегродифференциальное уравнение границы Γ_t :

$$\frac{dz}{dt} - 2\int_{\Gamma_t} \left[\frac{\lambda_{\mu}}{K(\zeta)} \operatorname{Re} \left(\frac{d\overline{\zeta}}{dt} e^{i\Theta_{\zeta}} \right) + \alpha \nabla \Pi(\zeta, t) \cdot \vec{\tau}_{\zeta} \right] V_2(z, \zeta) dl_{\zeta} = K(z) V_0(z, t), \ z \in \Gamma_t.$$
(3.3)

Это уравнение надлежит интегрировать при условии (1.14).

Таким образом, исследование задачи эволюции границы Γ_t сводиться к решению задачи Коши (3.3), (1.14).

Укажем еще одни путь уменьшения числа уравнений системы (2.17), (2.18), которые надлежит решать. Согласно (1.6) для скорости частиц жидкости границы Г,:

$$U_{\tau}(z,t) + iU_{n}(z,t) = \overline{U}(z,t)e^{i\Theta_{z}}, \qquad z \in \Gamma_{t},$$
(3.4)

 $U_{\tau}(z,t)+iU_{n}(z,t)=\overline{U}(z,t)e^{i\Theta_{z}}\,,\qquad z\in\Gamma_{t}\,, \tag{3.4}$ где $U_{\tau}(z,t)$ и $U_{n}(z,t)$ - касательная и нормальная составляющие скорости $U(z,t) = \frac{dz}{dt}, \ z \in \Gamma_t, \ \Theta_z$ - угол орта касательной $\vec{\tau}_z \in \Gamma_t$ с осью Ox. Учитывая (3.4), из (3.2) находим касательную составляющую скорости границы Γ_t :

$$U_{\tau}(z,t) = \frac{K(z)}{\lambda_{tt}} \left[\frac{f(z,t)}{2} - \alpha \nabla \Pi(z,t) \cdot \vec{\tau}_z \right], \quad z \in \Gamma_t.$$
 (3.5)

Возьмем от равенства (3.1) мнимую часть, учтем (3.4) и равенства ${\rm Im} \Big[\overline{V_0}(z,t) e^{i\Theta_z} \, \Big] = V_{0n}(z,t) = \vec{V_0}(z,t) \cdot \vec{n}_z \,, \quad {\rm Im} \Big[\overline{V_2}(z,t) e^{i\Theta_z} \, \Big] = V_{2n}(z,\zeta) = \vec{V_2}(z,\zeta) \cdot \vec{n}_z \,,$ \vec{n}_z - орт нормали в точке $z \in \Gamma_t$. Находим нормальную составляющую скорости границы Γ_t :

$$U_n(z,t) = K(z) \left[\vec{V}_0(z,t) \cdot \vec{n}_z + \int_{\Gamma_t} f(\zeta,t) \vec{V}_2(z,\zeta) \cdot \vec{n}_z dl_{\zeta} \right], \quad z \in \Gamma_t.$$
 (3.6)

Таким образом, исследование задачи эволюции границы Γ_t сводится нахождению в каждый момент времени $t \ge 0$ решения f(z,t)интегрального уравнения (2.17) при условии (1.14). Тогда скорости $U_{\tau}(z,t)$ и $U_n(z,t)$ границы Γ_t в моменты $t \ge 0$ определяются из равенств (3.5) и (3.6). Следовательно, согласно равенств $U_{\tau}(z,t) = \frac{dl_z}{dt}$ и $U_n(z,t) = \frac{dn_z}{dt}$ (dl_z и dn_z смещения за время dt границы Γ_t по ортам $\vec{\tau}_z$ и \vec{n}_z к этой границе)

Отметим, что уравнения (2.17), (2.18) и (3.3) можно решать численно на основе метода дискретных особенностей.

определяется положение границы в моменты t > 0.

Литература

1. Пивень В.Ф. Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном слое при наличии массовой силы // Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Харьков – Херсон. 2003. C. 203-208.

- 2. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел. Изд-во Орловского пединститута. 1994. 148 с.
- 3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М:. Наука, 1977. 640 с.

УДК 519.64

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИППМАНА-ШВИНГЕРА

Л.Ю. Плиева

Россия, Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет e-mail: plieva-21@mail.ru

Рассматривается уравнение Липпмана-Швингера квантовой теории поля. Применяется квадратурная формула, построенная Д. Г. Саникидзе. Вычисляются узлы и коэффициенты для различных m, p, α указанной квадратурной формулы. Полученные результаты используются для численного решения уравнения Липпмана-Швингера. Оценивается погрешность вычислений.

В 1965 г. Д.Г. Саникидзе [1] построил квадратурную формулу с наивысшей степенью точности для вычисления несобственных интегралов вида:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{\alpha} f(x)dx, \qquad (1)$$

где $\alpha > -1$ и $|x|^{\alpha}$ — весовая функция, f(x) — дифференцируемая до определенного порядка функция.

Данная квадратурная формула имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{\alpha} f(x)dx = \sum_{\nu=1}^{m} A_{\nu}(\alpha)[f(x_{\nu}) + f(-x_{\nu})] + \sum_{s=0}^{p-1} B_{s}(\alpha) \cdot f^{(2s)}(0) + R_{m,p}(\alpha), \quad (2)$$
 где

$$A_{\nu}(\alpha) = \frac{1}{x_{\nu}^{2p} H_{\nu}(x_{\nu})} \int_{0}^{1} x^{2p+\alpha} H_{\nu}(x) dx,$$

$$H_{\nu}(x) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m} (x^{2} - x_{k}^{2}), H_{\nu}(x_{\nu}) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m} (x_{\nu}^{2} - x_{k}^{2}),$$

$$B_{s}(\alpha) = \frac{2}{(2s)!} \left[\frac{1}{2s + \alpha + 1} - \sum_{\nu=1}^{m} x_{\nu}^{2s} A_{\nu}(\alpha) \right],$$

$$R_{m,p} = \frac{2 \cdot f^{(4m+2p)}(\xi)}{(4m+2p)!} \int_{0}^{1} x^{2p+\alpha} \prod_{\nu=1}^{m} (x^{2} - x_{\nu}^{2})^{2} dx.$$

 x_{ν} являются узлами квадратурной формулы, $A_{\nu}(\alpha)$, $B_{s}(\alpha)$ — коэффициенты, а $R_{m,p}(\alpha)$ — остаточный член квадратурной формулы.

Д. Г. Саникидзе [1] были вычислены узлы и коэффициенты для случая m=1. Наша задача заключалась в том, чтобы вычислить узлы и коэффициенты для различных значений m.

В [1] x_{ν} вычисляются из следующей системы нелинейных уравнений:

$$\int_{0}^{1} x^{2p+\alpha} \prod_{\nu=1}^{m} (x^{2} - x_{\nu}^{2}) \prod_{\substack{\nu=1 \ \nu \neq \lambda}}^{m} (x^{2} - x_{\nu}^{2}) dx = 0 \quad (\lambda = 1, 2, ..., m).$$
 (3)

Используя свойство ортогональности многочленов, можно (3) заменить следующей эквивалентной системой:

$$\int_{0}^{1} x^{2p+\alpha} \prod_{\nu=1}^{m} (x^2 - x_{\nu}^2) x^{2(\lambda-1)} dx = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots m).$$
 (4)

Из (4) для любого λ мы будем получать формулы Виета, т. е. наша задача сведется к решению обыкновенного алгебраического уравнения m ой степени:

$$z^{m} + \sum_{\nu=1}^{m} c_{m}^{\nu} (-1)^{\nu} z^{(m-\nu)} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} \frac{2p + \alpha + 1 + 2(m-j)}{2p + \alpha + 1 + 2(2m-j)} = 0,$$
 (5)

где $z=x^2$. Используя любой язык программирования, можно найти узлы x_{ν} и коэффициенты.

Приведем полученные результаты для случая: $\alpha = -0.9$ и p = 1: $x_1^2 = 0.021010252334716897$ $A_1(\alpha) = 1,018984571918536970$ $x_2^2 = 0,103866983666919520$ $A_2(\alpha) = 0.481159060055772372$ $x_3^2 = 0.239874720072333520$ $A_3(\alpha) = 0.304701660614504889$ $x_4^2 = 0.410803984491100701$ $A_4(\alpha) = 0.210697676646705469$ $x_5^2 = 0.593708243717703457$ $A_5(\alpha) = 0.148242465067985048$ $x_6^2 = 0.764030577337008023$ $A_6(\alpha) = 0.100794530327821750$ $x_7^2 = 0.898906161681775344$ $A_7(\alpha) = 0.061185532509305821$ $x_8^2 = 0.980260135888473404$ $A_8(\alpha) = 0.025642390273945643$ $B_0(\alpha) = 15,297184223170844100$ m = 11 $x_1^2 = 0.011538570831164812$ $A_1(\alpha) = 0.992093361560775528$ $x_2^2 = 0.057797996308034946$ $A_2(\alpha) = 0.475206996405231443$ $x_3^2 = 0.136691350037226988$ $A_3(\alpha) = 0.309481687628868688$ $x_4^2 = 0,242410221548385496$ $A_{\Delta}(\alpha) = 0.224182021687137567$

$$x_5^2 = 0,367149993172128210$$
 $A_5(\alpha) = 0,170025942566687891$ $x_6^2 = 0,501699747781751390$ $A_6(\alpha) = 0,131105212017457282$ $x_7^2 = 0,636123814574765828$ $A_7(\alpha) = 0,100675698014444633$ $x_8^2 = 0,760495808704081177$ $A_8(\alpha) = 0,075350705067579744$ $x_9^2 = 0,865631994733214915$ $A_9(\alpha) = 0,053206548788294829$ $x_{10}^2 = 0,943770905120913118$ $A_{10}(\alpha) = 0,033031548416791457$ $x_{11}^2 = 0,989161252517134264$ $A_{11}(\alpha) = 0,014001581712479520$ $B_0(\alpha) = 14,843217392368502800$

Рассмотрим теперь уравнение Липпмана-Швингера

$$T(x,x_0) + \lambda \int_0^\infty \frac{K(x,y)}{y^2 - x_0^2} T(y,x_0) dy = K(x,x_0), \quad (x \ge 0),$$
 (6)

где λ и $x_0 \in (0, \infty)$ — параметры, K(x, y) — заданная функция, определяемая потенциалом взаимодействия частиц. В частности в качестве K(x, y) можно рассмотреть потенциал Юкавы:

$$K(x,y) = \frac{V_0}{4} \ln \frac{(x+y)^2 + \eta^2}{(x-y)^2 + \eta^2},$$
 (6*)

где $V_0 = -\frac{50}{41.47}$, или потенциал Рида:

$$K(x,y) = \frac{1}{4\eta} \left\{ -\frac{10,46}{41,47} \ln \frac{(x+y)^2 + \eta^2}{(x-y)^2 + \eta^2} - \frac{1650,6}{41,47} \ln \frac{(x+y)^2 + (4\eta)^2}{(x-y)^2 + (4\eta)^2} + \frac{6484,3}{41,47} \ln \frac{(x+y)^2 + (7\eta)^2}{(x-y)^2 + (7\eta)^2} \right\},$$

где $\lambda = 2/\pi$ и $\eta = 0.7$.

Через решение $T(x,x_0)$ уравнения (6) определяется физическая фаза нуклон-нуклонного рассеяния, которая вычисляется по формуле

$$\Theta_0 = -\operatorname{arctg}\left(T(x_0, x_0)/x_0\right). \tag{7}$$

Используя подстановку $y = -1 + 1/\tau$, x = -1 + 1/t, $x_0 = -1 + 1/t_0$, сведем (6) к виду:

$$T_1(t,t_0) + \lambda \int_0^1 p(t_0,\tau) \frac{K_1(t,\tau)T_1(\tau,t_0)}{\tau - t_0} d\tau = K_1(t,t_0), \tag{8}$$
 где
$$p(t_0,\tau) = \frac{t_0^2}{(2t_0-1)\tau - t_0}, \ K_1(t,\tau) = K\left(-1 + \frac{1}{t}, -1 + \frac{1}{\tau}\right),$$

$$T_1(t,t_0) = T\left(-1 + \frac{1}{t}, -1 + \frac{1}{t_0}\right).$$

В [2] использованы 3 метода для решения (8): 1) метод квадратур с использованием квадратурных формул, построенных Д. Г. Саникидзе; 2) использование представления Д. Г. Саникидзе для плотностей сингулярных интегралов; 3) метод дискретных особенностей. Нас интересует первый метод.

Введем весовую функцию $|\tau|^{\alpha}$, $(\alpha > -1)$, тогда (8) примет вид:

$$T_{1}(t,t_{0}) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} |\tau|^{\alpha} \left(p(t_{0},|\tau|) \frac{|\tau|^{-\alpha} K_{1}(t,|\tau|) T_{1}(|\tau|,t_{0})}{|\tau|-t_{0}} \right) d\tau = K_{1}(t,t_{0}).$$

Используя (2) и полагая p = 1, получим

$$T_{1n}(t,t_0) + \lambda \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu}(\alpha) p(t_0,|\tau_{\nu}|) \frac{|\tau_{\nu}|^{-\alpha} K_1(t,|\tau_{\nu}|)}{|\tau_{\nu}| - t_0} T_{1n}(|\tau_{\nu}|,t_0) = K_1(t,t_0).$$
 (9)

Для погрешности справедлива оценка

$$\begin{split} & \int_{0}^{\infty} \frac{K(x,y)T(y,x_{0})}{y^{2}-x_{0}^{2}} dy - \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu}(\alpha)p(t_{0},|\tau_{\nu}|) \times \\ & \times \frac{|\tau_{\nu}|^{-\alpha} K_{1}(t,|\tau_{\nu}|)T_{1n}(|\tau_{\nu}|,t_{0})}{|\tau_{\nu}|-t_{0}} \bigg| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) M(T), \end{split}$$

где
$$M(T) = \sup_{x \ge 0} |T(x,x_0)| + \sup_{x_1,x_2 \in [0,2x_0]} \frac{|T(x_1,x_0) - T(x_2,x_0)|}{|x_1 - x_2|^{\beta}}, (0 < \beta \le 1, x_1 \ne x_2).$$

Придавая t значения τ_{v} , где $v=\overline{1,n}$, мы получим систему линейных алгебраических уравнений n-го порядка с n неизвестными $T_{1n}(\mid \tau_{v}\mid,t_{0})$ ($v=\overline{1,n}$). Фиксируя значение $t_{0}\neq\mid \tau_{v}\mid$ и решая систему относительно $T_{1n}(\mid \tau_{v}\mid,t_{0})$ ($v=\overline{1,n}$), мы $T_{1n}(t_{0},t_{0})$ определим из (9) следующим образом

$$T_{1n}(t_0,t_0) = K_1(t_0,t_0) - \lambda \sum_{\nu=1}^n A_{\nu}(\alpha) p(t_0,|\tau_{\nu}|) \frac{|\tau_{\nu}|^{-\alpha} K_1(t_0,|\tau_{\nu}|) T_{1n}(|\tau_{\nu}|,t_0)}{|\tau_{\nu}| - t_0}.$$

Искомую фазу находим по формуле (7).

Так как ранее не были известны коэффициенты и узлы квадратурной формулы, Ш.С. Хубежты [2] использовал узлы Чебышева. Но используя теперь полученные данные, мы придем к более точным результатам.

Приведем таблицу численных расчетов, когда ядро K(x,y) имеет вид (6*):

$$n = 10, \ \alpha = -0.5, \ t_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$$

 $T_{1n}(\tau_1, t_0) = -0.7879483332936980$ $T_{1n}(\tau_3, t_0) = -0.4160231114365238$
 $T_{1n}(\tau_2, t_0) = -0.8755697351806623$ $T_{1n}(\tau_4, t_0) = -0.2323910053838186$

$$T_{1n}(\tau_5, t_0) = -0.1334940766919148$$

 $T_{1n}(\tau_6, t_0) = -0.0738812458907306$
 $T_{1n}(\tau_7, t_0) = -0.0366509938731281$
 $T_{1n}(\tau_8, t_0) = -0.0141418950942039$
 $T_{1n}(\tau_9, t_0) = -0.0026090803119171$
 $T(x, x_0) = -1.3887736961196131$
 $\Theta_0 = -0.3790775145196858$
 $n = 11, \ \alpha = -0.9, \ t_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$
 $T_{1n}(\tau_1, t_0) = -0.7730563667020829$
 $T_{1n}(\tau_2, t_0) = -0.9159808431349807$
 $T_{1n}(\tau_3, t_0) = -0.4408917492666308$

$$\begin{split} T_{1n}(\tau_4,t_0) &= -0.2598427943766252 \\ T_{1n}(\tau_5,t_0) &= -0.1624857850830996 \\ T_{1n}(\tau_6,t_0) &= -0.1025408755704835 \\ T_{1n}(\tau_7,t_0) &= -0.0631078761800030 \\ T_{1n}(\tau_8,t_0) &= -0.0364573225574636 \\ T_{1n}(\tau_9,t_0) &= -0.0185879951944667 \\ T_{1n}(\tau_{10},t_0) &= -0.0072938668984711 \\ T_{1n}(\tau_{11},t_0) &= -0.0135742029508371 \\ T(x,x_0) &= -1.5738250013939261 \\ \Theta_0 &= -0.3199518301112529 \end{split}$$

Литература

- 1. Саникидзе Д. Г. О приближенном вычислении некоторых несобственных интегралов // Труды Тбилисского мат. университета, 1965. Т.110. С.255-267.
- 2. Khubezhty Sh.S On the Numerical Solution of Lippmann Schwinger Equation // Differentions Equations. 2004. Vol.40, №1. P.111-119.
- 3. Плиева Л. Ю. О вычислении коэффициентов и узлов одной квадратурной формулы. // Труды молодых ученых, 2004. №4. г.Владикавказ. Изд-во «Терек», СКГТУ. С.11-14.

УДК 531.55:521.2

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА И МОМЕНТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

А.Л. Рачинская

Украина, Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления. Момент сил сопротивления предполагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера-Пуансо, в случае быстрых вращений.

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, сопротивления и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1-6].

Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1,2]. Система координат $Ox_i(i=\overline{1,3})$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 — вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 — нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oy_i(i=\overline{1,3})$ связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента G [1-3]. Оси системы координат $Oz_i(i=\overline{1,3})$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера ϕ , ψ , θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента G относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ , как показано в [1-3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\phi\cos\phi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \left(\frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G}\right)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\phi}{A_1} - \frac{\cos^2\phi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\phi}{A_1} + \frac{\cos^2\phi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\cot\phi - \frac{L_2}{G}\cot\phi$$
(1)

Здесь L_i - моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G - величина кинетического момента, A_i ($i=\overline{1,3}$) - главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

Проекции L_i момента внешних сил, складывающихся из гравитационных моментов и момента сил внешнего сопротивления, на оси Oy_i записываются в виде [2,5]

$$L_{1} = \frac{3\omega_{0}^{2}(1 + e\cos\theta)^{3}}{(1 - e^{2})^{3}} \sum_{j=1}^{3} (\beta_{2}\beta_{j}S_{3j} - \beta_{3}\beta_{j}S_{2j}) - G\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{I_{i1}\alpha_{1i}\alpha_{31}}{A_{1}} + \frac{I_{i2}\alpha_{1i}\alpha_{32}}{A_{2}} + \frac{I_{i3}\alpha_{1i}\alpha_{33}}{A_{3}}\right)$$
(2)

Здесь L_2 , L_3 выражаются аналогичным образом. Согласно [2]

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^{3} A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \ \beta_1 = \cos(\theta - \lambda) \cos \delta,$$

$$\beta_2 = \sin(\theta - \lambda), \ \beta_3 = \cos(\theta - \lambda) \sin \delta,$$
 (3)

 ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты.

В некоторых случаях удобно вместо угла θ использовать в качестве переменной кинетическую энергию T, производная которой имеет вид

$$\dot{T} = \frac{2T}{G}L_3 + G\sin\theta \left[\cos\theta \left(\frac{\sin^2\phi}{A_1} + \frac{\cos^2\phi}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)(L_2\cos\psi - L_1\sin\psi) + \\ + \sin\phi\cos\phi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)(L_1\cos\psi + L_2\sin\psi)\right]$$
(4)

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0 (1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}.$$
 (5)

Рассматривается спутник, моменты инерции которого произвольны $(A_1 > A_2 > A_3)$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G <<1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами внешних сил.

В работе предполагается, что момент сопротивления $\mathbf{L}^{(c)}$ может быть представлен в виде $\mathbf{L}^{(c)} = I\mathbf{m}$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1,5]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε : $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon <<1$, где $\|I\|$ - норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 — кинетический момент спутника в начальный момент времени. Исследуем решение системы (1), (5) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи будем применим метод усреднения [7].

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера-Пуансо. Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ , λ , T, ν , а быстрыми – углы Эйлера ϕ , ψ , θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \ge G^2 \ge 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось $Oz_1[8]$. Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера-Пуансо [8] в правые части уравнений (1), (4) и проведем усреднение по

переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости ϕ , θ от t [2]. При этом для медленных переменных сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 (1 + e\cos\nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 (1 + e\cos\nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin\delta} \beta_1 \beta_3 N$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{G}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3) \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) + I_{33}(A_1 - A_2) \times \left(\frac{E(k)}{K(k)} + k^2 - 1\right) + I_{11}(A_2 - A_3) \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \tag{6}$$

Усредненное уравнение для кинетической энергии записывается аналогично. Здесь k- модуль эллиптических функций,

$$N = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right], \quad E(k) \quad \text{if} \quad K(k) - \frac{1}{2}\left[K(k) - \frac{1}{2}\left(K(k) - \frac{1}{2}\left($$

полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Из уравнений (6) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция величины кинетического момента. Непосредственно видно, что в первом приближении на изменение G оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Изменения углов λ , δ зависят как от действия силы сопротивления, так и гравитационного притяжения.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (6) для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1-k^2)K \le E \le K$ [8]. Поэтому dG/dt < 0 при G>0, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0,1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает.

Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений системы (6) и уравнения (5). Их можно записать следующим образом

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \ \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \ \dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2$$
 (7)

Здесь $h(e) = (1 - e^2)^{3/2}$

Получена система вида [9], для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [9].

$$\left\langle \dot{\delta} \right\rangle = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu \,, \quad \left\langle \dot{\lambda} \right\rangle = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu \tag{8}$$

После усреднения получим

$$\left\langle \dot{\delta} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \dot{\lambda} \right\rangle = \frac{3\omega_0 \cos \delta N}{4G(1 - e^2)^{3/2}}$$
 (9)

Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. Отметим, что действие приложенных сил не приводит к изменению угловой скорости δ и отклонение вектора \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

В случае малых k^2 аналитические выражения для величины кинетического момента и кинетической энергии можно получить в явном виде

$$G = G_0 \exp \left\{ -\frac{I_{11}}{A_1} t + b \exp \left[-\frac{A_3 \chi_1 + A_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)}{A_1 A_2 A_3} t \right] \right\}$$

$$T = T_0 \exp \left\{ -\frac{2I_{11}}{A_1} t + a \exp \left[-\frac{A_3 \chi_1 + A_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)}{A_1 A_2 A_3} t \right] \right\}$$
(10)

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_1 &= I_{22}A_1 - I_{11}A_2 \\ b &= 0.5C_2 \frac{A_2A_3}{\left[A_3(I_{22}A_1 - I_{11}A_2) + A_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)\right]A_1(A_2 - A_3)} \times \\ &\times \left[I_{22}A_1(A_1 - A_3) + I_{33}A_1(A_1 - A_2) - I_{11}(A_1A_2 + A_1A_3 - 2A_2A_3)\right] \\ a &= \frac{C_2}{A_2 - A_3} \cdot \frac{I_{22}(A_1 - A_3)A_1A_3 + I_{33}(A_1 - A_2)A_1A_2 - I_{11}A_2A_3(2A_1 - A_2 - A_3)}{A_3(I_{22}A_1 - I_{11}A_2) + A_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)} \end{aligned}$$

Уравнение (9) для $\dot{\lambda}$ с учетом (13) записывается следующим образом

$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha \exp\{\beta t - b \exp[-\rho t]\} \cdot \{d + \mu(\eta \exp[(a - 2b)\exp(-\rho t)] - 1\}\}$$

где

$$\alpha = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{4(1 - e^2)^{3/2} G_0}; \quad \beta = \frac{I_{11}}{A_1}; \rho = \frac{A_3 \chi_1 + A_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)}{A_1 A_2 A_3};$$

$$\mu = \frac{3}{2}(A_2 + A_3); \quad \eta = \frac{2A_1T_0}{G_0}; \quad d = A_2 + A_3 - 2A_1;$$

Его решение имеет следующий вид

$$\lambda = \frac{\alpha}{\rho} \left\{ (\mu - d)b^k \left[-\gamma(-k, b) + \gamma(-k, be^{\tau}) \right] - \mu \eta h^k \left[-\gamma(-k, h) + \gamma(-k, he^{\tau}) \right] \right\}$$
 (11) при Re $b > 0$, Re $h > 0$.

Здесь $\gamma(n,x) = \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$ - неполная гамма функция, $k = \frac{\beta}{\rho}$, h = 3b - a, $\tau = -\rho t$.

Таким образом, получено решение системы (9) при малых k^2 в аналитической форме.

Автор благодарит Д.Д. Лещенко за ценные советы и полезные обсуждения.

Литература

- 1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
- 2. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474 483.
- 3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ. 1975. 308 с.
- 4. Белецкий В.В, Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка. 1984. 188 с.
- 5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 3. С. 5 -13.
- 6. Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 2. С. 3-14.
- 7. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
- 8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1108 с.
- 9. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66. вып.2. С. 165-176.

УДК 532. 546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ В ВИДЕ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Н.В. Севостьянова, А.Я. Шпилевой Россия, Калининград, Российский государственный университет им. И. Канта, e-mail: theory@albertina.ru

Для исследования фильтрационных течений жидкости в области, ограниченной равносторонним треугольником, используется метод изображения особых точек. Определены комплексные потенциалы течений с различными граничными условиями. В случае точечного источника решения выражены через сигма-функцию Вейерштрасса.

1. Для исследования фильтрационных течений жидкости в условиях функцию удобно использовать аналитическую Дарси $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$ называемую По комплексным потенциалом. известному комплексному потенциалу фильтрационного потока

определяются поля скоростей и давлений [1]. Если границами раздела областей фильтрации являются прямые или окружности, то при решении некоторых задач математической физики используется метод изображения особых точек [2,3,4,5,6].

2. Рассмотрим область фильтрации, ограниченную равносторонним треугольником (рис. 1)

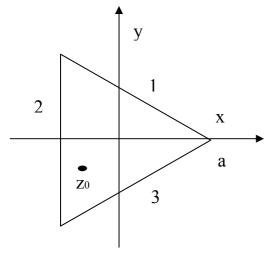


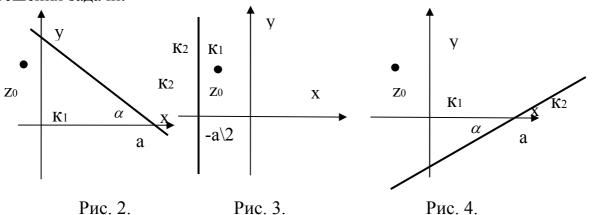
Рис. 1. Область фильтрации, ограниченная равносторонним треугольником.

Пусть аналитическая функция f(z)описывает течение однородной среде, а особые точки этой неограниченной функции располагаются во внутренней области треугольника. Необходимо комплексный потенциал W(z), описывающий определить фильтрационное течение в области, ограниченной треугольником (рис.1) при различных граничных условиях.

Аналогичная задача для случаев, когда границами раздела являются прямоугольник или равнобедренный прямоугольный треугольник рассмотрена в работах [5,6].

Для решения поставленной задачи используем теорему о прямой, являющуюся аналитическим выражением метода изображений в случае прямолинейной границы раздела [1,3,7].

Рассмотрим три варианта теоремы о прямой, необходимых для решения задачи.



Различные положения прямолинейной границы раздела сред.

Для областей, изображенных на рис.2,3,4 согласно теореме о прямой комплексные потенциалы течений в областях с коэффициентом проницаемости k_1 соответственно имеют вид:

$$W_1(z) = f(z) - \lambda \bar{f}(zm + a\overline{m}), \qquad (1)$$

$$W_2(z) = f(z) - \lambda \bar{f}(-z - a),$$
 (2)

$$W_3(z) = f(z) - \lambda \bar{f}(z\overline{m} + am), \qquad (3)$$

где

$$m = e^{2i\alpha}$$
, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$.

При $k_2 = 0$ ($\lambda = -1$) или $k_2 = \infty$ ($\lambda = 1$) соседняя область фильтрации соответственно будет непроницаемой или заполнена свободной жидкостью. Учитывая эти условия и применяя последовательно теоремы (1)-(3) можно определить комплексный потенциал W(z) течения, вызванного особыми точками функции f(z) в треугольной области с различными граничными условиями.

3. Пусть границы области фильтрации являются непроницаемыми. В этом случае в выражениях (1)-(3) полагаем λ =-1. Применяя последовательно теорему о прямой в виде (1)-(3), получаем комплексный потенциал фильтрационного течения в области, ограниченную равносторонним треугольником с непроницаемыми границами.

$$W(z) = \sum_{k,j=-\infty}^{\infty} [f(z-T) + f(-zm - am + a\overline{m} + T) + f(-z\overline{m} - am - a + T) + f(-zm - am - a + T) + f(-$$

4. Пусть за границами области фильтрации находится свободная жидкость. Полагаем в выражениях (1)-(3) теоремы о прямой λ =1. Применяя последовательно теорему о прямой в виде (1)-(3), получаем:

$$W(z) = \sum_{k,j=-\infty}^{\infty} [f(z-T) + f(-zm + a\overline{m} - am + T) + f(-z\overline{m} - a - a\overline{m} + T) - (5)$$

$$-\bar{f}(z\overline{m}+am-T)-\bar{f}(zm-2a\overline{m}-T)-\bar{f}(-z-a+T)$$
].

Комплексный потенциал (5) описывает различные фильтрационные течения в треугольной области, ограниченной жидкостью (остров).

5. Рассмотрим случай, когда точечный источник находится внутри области фильтрации, а за границами области находится свободная жидкость (источник на треугольном острове). Пусть источник находится в точке z_0 и описывается функцией $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_0)$. Записывая выражение (5) для функции f(z), получаем:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \sum_{k,j=-\infty} \frac{(\Phi_1 - T)(\Phi_2 - T)(\Phi_3 - T)}{(\Phi_4 - T)(\Phi_5 - T)(\Phi_6 - T)},$$

$$z_0, \qquad \Phi_2 = zm + am - a\overline{m} + z_0, \qquad \Phi_3 = z\overline{m} + am + a + z_0,$$
(6)

ГДе
$$\Phi_1 = z - z_0 , \qquad \Phi_2 = zm + am - a\overline{m} + z_0 , \qquad \Phi_3 = z\overline{m} + am + a + z_0 ,$$

$$\Phi_4 = z + a + \overline{z}_0 , \Phi_5 = z\overline{m} + am - \overline{z}_0 , \quad \Phi_6 = zm - 2a\overline{m} - \overline{z}_0 .$$

Преобразуем (6), используя представление сигма-функции Вейерштрасса:

$$\sigma(z) = z \prod_{k,j} \left(1 - \frac{z}{T} \right) \exp\left(\frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2} \right).$$

После преобразований выражение (6) принимает вид:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sigma(\Phi_1)\sigma(\Phi_2)\sigma(\Phi_3)}{\sigma(\Phi_4)\sigma(\Phi_5)\sigma(\Phi_6)}.$$

6. Пусть в области фильтрации, ограниченной непроницаемыми стенками находится точечный источник, описываемый функцией $f_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_0)$ и точечный сток, описываемый функцией $f_2(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z-z_1)$. определим комплексный потенциал течения в рассматриваемой треугольной области. Записывая выражение (4) для функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ и преобразуя полученный результат, имеем

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sigma(\Phi_1)\sigma(\Phi_2)\sigma(\Phi_3)\sigma(\Phi_4)\sigma(\Phi_5)\sigma(\Phi_6)}{\sigma(D_1)\sigma(D_2)\sigma(D_3)\sigma(D_4)\sigma(D_5)\sigma(D_6)},$$

где выражения для D_i имеют такой же вид, как и для Φ_i , только вместо z_0 ставиться z_1 .

7. Аналогично могут быть получены комплексные потенциалы течений для случаев смешанных граничных условий, т.е. когда одни стенки непроницаемы, а другие ограничены свободной жидкостью.

Полученные результаты могут быть использованы для решения практических задач теории фильтрации, а также в теории электричества, магнетизма, теплопроводности.

Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М., 1972. 368 с.
- 2. Зайцев А.А, Шпилевой А.Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах.// Калининград: изд-во КГУ, 2001. 126 с.
- 3. Шпилевой А.Я. Метод изображения особых точек в задачах исследования фильтрационных течений в кусочно-однородных средах. // Труды IX международного симпозиума " МДОЗМФ-2000". Орел. 2000. с. 471-474.
- 4. Зайцев А.А, Шпилевой А.Я. Фильтрационные течения в среде с границами раздела в виде двух концентрических окружностей // Труды международных школ-семинаров " МДОЗМФ". Выпуск 2. Орел. 2003. с. 28-32.
- 6. Шпилевой А.Я. Моделирование фильтрационных течений жидкости в кусочно-однородных средах методом изображения особых точек. // Материалы всероссийской научно-практической конференции: "Вклад земляков-орловцев в развитие и становление российской науки, культуры и образования". т.ІІІ. Орел. 2003. с.134-136.
- 7. Васильева Е.И., Шпилевой А.Я. Моделирование фильтрационных течений жидкости в области с границей в виде равнобедренного прямоугольного треугольника // Труды международных школ-семинаров " МДОЗМФ". Выпуск 3. . Орел. 2004. с. 15-17.

8. Голубева О.В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения.// Изв. АНСССР, МЖГ, т.1, 1966.

УДК 517.968.53

О СХОДИМОСТИ В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА ДВУХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Н.В. Снижко

Украина, Запорожский национальный университет, e-mail: n snizhko@mail.ru

Рассматриваются квадратурные формулы для интегралов специального вида, часто встречающихся при решении бисингулярных интегральных уравнений. Изучается случай, когда подынтегральные функции принадлежат обобщённому пространству Гёльдера, а контур интегрирования — единичный бикруг. Сходимость квадратурных формул устанавливается в обобщённых пространствах Гёльдера, а также в пространствах Лебега и непрерывных функций.

Пусть $\gamma_0 = \gamma_{01} \times \gamma_{02}$ — единичный бикруг, $t \in \gamma_{01}$, $\tau \in \gamma_{02}$; $\omega(\delta_1, \delta_2)$ — некоторый модуль непрерывности, $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ — соответствующие ему простые модули непрерывности, удовлетворяющие условию Зигмунда — Бари — Стечкина [1]. Обозначим через $H_{\omega}(\gamma_0) \equiv H_{\omega}$ обобщённое пространство Гёльдера, т. е. пространство непрерывных на γ_0 функций $\phi(t,\tau)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{split} H(\phi;\omega) &= \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega(\delta_1, \delta_2; \phi)}{\omega(\delta_1, \delta_2)} \leq C_1(\phi) \,, \\ H^{t\tau}(\phi; \omega) &= \sup_{\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0} \frac{\omega_{1,1}(\delta_1, \delta_2; \phi)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)} \leq C_2(\phi) \,, \end{split}$$

где $C_1(\phi)$, $C_2(\phi)$ – вполне определённые постоянные, зависящие только от функции $\phi(t,\tau)$. Норма в H_{ω} определяется следующим образом:

$$\left\| \left. \phi(t,\tau) \right\|_{H_{\omega}} = \left\| \left. \phi(t,\tau) \right\|_{C} + H(\phi;\omega) + H^{t\tau}(\phi;\omega). \right.$$

Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа функции $\phi(t,\tau)$ по системе узлов $\left\{t_p\right\}_{p=0}^{2m},\, \left\{\tau_q\right\}_{q=0}^{2n}$:

$$(L_{mn}\varphi)(t,\tau) = \sum_{p=0}^{2m} \sum_{q=0}^{2n} \varphi(t_p,\tau_q) l_p(t) l_q(\tau) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} \lambda_{kl} t^k \tau^l,$$
 (1)

где

$$l_{p}(t) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{2m} \frac{t - t_{k}}{t_{p} - t_{k}} \left(\frac{t_{p}}{t}\right)^{m} = \sum_{\substack{k=-m}}^{m} \lambda_{l,k}^{(p)} t^{k} , \quad l_{q}(\tau) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq q}}^{2n} \frac{\tau - \tau_{j}}{\tau_{q} - \tau_{j}} \left(\frac{\tau_{q}}{\tau}\right)^{n} = \sum_{\substack{j=-n}}^{n} \lambda_{2,j}^{(q)} \tau^{j} . \quad (2)$$

Учитывая, что γ_0 – бикруг, в качестве узлов интерполяции выберем систему равноотстоящих точек:

$$t_p = \exp\left\{\frac{2\pi i}{2m+1}(p-m)\right\}, \ \tau_q = \exp\left\{\frac{2\pi i}{2n+1}(q-n)\right\}, \ p = 0,...,2m, \ q = 0,...,2n.$$
 (3)

Рассмотрим интегралы специального вида, встречающиеся при решении бисингулярных интегральных уравнений с ядром Коши:

$$(T\varphi)(t,\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} K(t,\tau;s,\sigma)\varphi(s,\sigma)dsd\sigma, \tag{4}$$

$$(T\phi_{mn})(t,\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} fK(t,\tau;s,\sigma) \phi_{mn}(s,\sigma) ds d\sigma,$$
 (5)

где $\phi(t,\tau) \in H_{\omega^{(1)}}(\gamma_0)$, $K(t,\tau;s,\sigma)$ принадлежит пространству $H_{\omega^{(1)}}(\gamma_0)$ по первым двум переменным и по двум последним (т.е. $K(t,\tau;s,\sigma) \in H_{\omega^{(1)}}(\gamma_0 \times \gamma_0)$), а

$$\phi_{mn}(t,\tau) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} c_{kl} t^{k} \tau^{l}$$
 (6)

- бирациональная функция.

Теорема 1. Пусть $\omega^{(2)}$ таков, что $H_{\omega^{(1)}} \subset H_{\omega^{(2)}}$; $\Omega_1^{(1)}(\delta)/\Omega_1^{(2)}(\delta)$,

$$\Omega_2^{(1)}(\delta)/\Omega_2^{(2)}(\delta)$$
 — возрастающие функции и $\ln \delta_1 \ln \delta_2 \frac{\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2)}{\Omega_1^{(2)}(\delta_1)\Omega_2^{(2)}(\delta_2)} \to 0$,

 $\ln \delta_1 \ln \delta_2 \omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2) \to 0$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$. Тогда для любых функций $\phi(t, \tau) \in H_{\omega^{(1)}}$ и $K(t, \tau; s, \sigma) \in H_{\omega^{(1)} \omega^{(1)}}$ справедлива оценка:

$$\left\| \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma - \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} L_{mn}^{s\sigma} [K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma)] ds d\sigma \right\|_{H_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} \int_{\gamma_{02}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} \int_{\gamma_{02}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} \int_{\gamma_{02}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} \int_{\gamma_{02}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi(s, \sigma) ds d\sigma \right]_{L_{\omega}(2)} \le C_{mn}^{s\sigma} \left[\int_{\gamma_{01$$

$$\leq d_1 \ln m \ln n \Phi \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \| \phi(t, \tau) \|_{H_{\omega}(1)},$$

где $L_{mn}^{s\sigma}$ — интерполяционный многочлен Лагранжа функции $K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma)$ по узлам (3), построенный по переменным s,σ , а $\Phi(\delta_1,\delta_2)$

— та из функций
$$\omega^{(2)}(\delta_1, \delta_2)$$
 и $\frac{\omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2)}{\Omega_1^{(2)}(\delta_1)\Omega_2^{(2)}(\delta_2)}$, которая при $\delta_1, \delta_2 \to 0$

стремится к нулю медленнее.

Теорема 2. Пусть $\ln \delta_1 \ln \delta_2 \omega^{(1)}(\delta_1, \delta_2) \to 0$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$. Тогда для любых функций $\phi(t,\tau) \in H_{\omega^{(1)}}$ и $K(t,\tau;s,\sigma) \in H_{\omega^{(1)}}$ справедлива оценка:

 $[\]overline{}^*$ Здесь и далее ниже d_i – вполне определённые постоянные, не зависящие от m и n.

$$\left\| \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} K(t,\tau;s,\sigma) \phi(s,\sigma) ds d\sigma - \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} L_{mn}^{s\sigma} \left[K(t,\tau;s,\sigma) \phi(s,\sigma) \right] ds d\sigma \right\|_{C} \leq d_2 \ln m \ln n \, \omega^{(1)} \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right).$$

Теорема 3. Для любых функций $\phi(t,\tau) \in H_{\omega^{(1)}}$ и $K(t,\tau;s,\sigma) \in H_{\omega^{(1)},\omega^{(1)}}$ справедлива оценка (p > 1):

$$\begin{split} \left\| \frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\gamma_{01}} \oint\limits_{\gamma_{02}} K(t,\tau;s,\sigma) \phi(s,\sigma) ds d\sigma - \frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\gamma_{01}} \oint\limits_{\gamma_{02}} L^{s\sigma}_{mn} \big[K(t,\tau;s,\sigma) \phi(s,\sigma) \big] ds d\sigma \right\|_{L_p} \leq \\ \leq d_3 \omega^{(1)} \bigg(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \bigg). \end{split}$$

Доказательство теоремы 1 производится по методике работы [2], но с учётом результатов, полученных в [1, 3] для пространства $H_{\omega}(\gamma_0)$ (в частности, с использованием теоремы 3 из [3]).

При доказательстве теоремы 3 учитываем принадлежность функции $K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma)$ пространству $H_{\omega^{(1)}}$ по переменным s,σ , а также результаты теоремы 5 из [3] и неравенство Гёльдера для интегралов (полагаем q таким, что 1/p+1/q=1); получаем:

$$\begin{split} &\left\|\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}}K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma)dsd\sigma - \frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}}L^{s\sigma}_{mn}\big[K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma)\big]dsd\sigma\right\|_{L_p} \leq \\ &\leq &\left\|\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}}\big\{K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma) - L^{s\sigma}_{mn}\big[K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma)\big]\big\}dsd\sigma\right\|_{L_p} \leq \\ &\leq &\left\|K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma) - L^{s\sigma}_{mn}\big[K(t,\tau;s,\sigma)\phi(s,\sigma)\big]\right\|_{L_p}\cdot d_3(q) \leq d_3\omega^{(1)}\bigg(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\bigg). \end{split}$$

Совершенно аналогичным образом (с учётом теоремы 1 из [3]) устанавливается справедливость теоремы 2.

Выпишем теперь явный вид квадратурной формулы приближённого вычисления интеграла (4). В самом деле:

$$\begin{split} &-\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}}L_{mn}^{s\sigma}\big[K\big(t,\tau;s,\sigma\big)\phi\big(s,\sigma\big)\big]ds\,d\sigma = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}}\bigg[\sum_{r=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n}K\big(t,\tau;s_r,\sigma_j\big)\phi\big(s_r,\sigma_j\big)l_r\big(s\big)l_j\big(\sigma\big)\bigg]ds\,d\sigma = \\ &= \sum_{r=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n}K\big(t,\tau;s_r,\sigma_j\big)\phi\big(s_r,\sigma_j\big)\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_{01}}l_r\big(s\big)ds\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_{02}}l_j\big(\sigma\big)d\sigma = \end{split}$$

$$= \sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} K(t,\tau;t_r,\tau_j) \phi(t_r,\tau_j) \lambda_{1,-1}^{(r)} \lambda_{2,-1}^{(j)},$$

где интерполяционные постоянные Лебега для единичных окружностей $\lambda_{1.-1}^{(r)}$, $\lambda_{2.-1}^{(j)}$ определены формулами (2).

Считая, что функция $\phi_{mn}(t,\tau)$, определённая формулой (6), является интерполяционным многочленом Лагранжа функции $\phi(t,\tau)$ по узлам (3), из равенства $\phi(t_r,\tau_j)=\phi_{mn}(t_r,\tau_j)$, r=0,...,2m, j=0,...,2n, получаем равенство

$$\sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} K(t,\tau;t_r,\tau_j) \varphi(t_r,\tau_j) \lambda_{1,-1}^{(r)} \lambda_{2,-1}^{(j)} = \sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} K(t,\tau;t_r,\tau_j) \varphi_{mn}(t_r,\tau_j) \lambda_{1,-1}^{(r)} \lambda_{2,-1}^{(j)}.$$
 (7)

Отсюда непосредственно получаем квадратурную формулу для интеграла (5):

$$-\frac{1}{4\pi^{2}} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} L_{mn}^{s\sigma} [K(t,\tau;s,\sigma)\phi_{mn}(s,\sigma)] ds d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} K(t,\tau;t_{r},\tau_{j})\phi_{mn}(t_{r},\tau_{j})\lambda_{1,-1}^{(r)}\lambda_{2,-1}^{(j)}, \qquad (8)$$

или в развёрнутом виде:

$$-\frac{1}{4\pi^{2}} \oint_{\gamma_{01}} \int_{\gamma_{02}} L_{mn}^{s\sigma} [K(t,\tau;s,\sigma)\phi_{mn}(s,\sigma)] ds d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} c_{kl} K(t,\tau;t_{r},\tau_{j}) t_{r}^{k} \tau_{j}^{l} \lambda_{1,-1}^{(r)} \lambda_{2,-1}^{(j)}.$$
(9)

Заметим, что для квадратурной формулы (8), (9) имеют место утверждения теорем 1-3. Заметим также, что для интеграла (5) можно построить другую квадратурную формулу. В самом деле:

$$-\frac{1}{4\pi^{2}} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} L_{mn}^{s\sigma} \left[s\sigma K(t,\tau;s,\sigma) \right] \frac{\varphi_{mn}(s,\sigma)}{s\sigma} ds d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^{2}} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} \left[\sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} K(t,\tau;s_{r},\sigma_{j}) s_{r} \sigma_{j} \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} c_{kl} s^{k-l} \sigma^{l-l} l_{r}(s) l_{j}(\sigma) \right] ds d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} c_{kl} K(t,\tau;t_{r},\tau_{j}) t_{r} \tau_{j} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{01}} l_{r}(s) s^{k-l} ds \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{02}} l_{j}(\sigma) \sigma^{l-l} d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} c_{kl} K(t,\tau;t_{r},\tau_{j}) t_{r} \tau_{j} \lambda_{l,-k}^{(r)} \lambda_{2,-l}^{(r)}. \tag{10}$$

Следует отметить, что для квадратурной формулы (10) также справедливы утверждения теорем 2 и 3. В условиях же теоремы 1 для квадратурной формулы (10) получаем следующую оценку:

$$\left\| \frac{1}{4\pi^{2}} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} K(t, \tau; s, \sigma) \phi_{mn}(s, \sigma) ds d\sigma - \frac{1}{4\pi^{2}} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} L_{mn}^{s\sigma} \left[s\sigma K(t, \tau; s, \sigma) \right] \frac{\phi_{mn}(s, \sigma)}{s\sigma} ds d\sigma \right\|_{H_{\omega}(2)} \leq d_{4} \ln m \ln n \frac{\omega^{(1)} \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right)}{\Omega_{1}^{(2)} \left(\frac{1}{m} \right) \Omega_{2}^{(2)} \left(\frac{1}{n} \right)}.$$

$$(11)$$

Доказательство этих утверждений проводится аналогично доказательствам теорем 1-3.

Замечание 1. Как видим, оценка погрешности квадратурной формулы (10) в пространствах H_{ω} лучше, чем оценка погрешности квадратурной формулы (9). Но в силу наивысшей тригонометрической степени точности квадратурной формулы левых прямоугольников для случая единичного бикруга эти квадратурные формулы совпадают [2]. Следовательно, погрешность любой из этих квадратурных формул в пространствах H_{ω} в случае единичного бикруга будет та же, что и в оценке (11).

Замечание 2. Если функции $\phi(t,\tau)$ и $K(t,\tau;s,\sigma)$ обладают непрерывными частными производными порядка μ и ν по переменным t и τ (s и σ) соответственно, принадлежащими пространству $H_{\omega^{(1)}}(\gamma)$ (τ . е. $\phi(t,\tau) \in H_{\omega^{(1)}}^{(\mu,\nu)}$ и $K(t,\tau;s,\sigma) \in H_{\omega^{(1)},\omega^{(1)}}^{(\mu,\nu),(\mu,\nu)}$), то в условиях теорем 1, 2, 3 оценки скорости сходимости квадратурных формул могут быть существенно улучшены [3]. Например, оценка (11) в этом случае приобретает вид:

$$\begin{split} & \left\| \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} K(t,\tau;s,\sigma) \phi_{mn}(s,\sigma) ds \, d\sigma - \\ & \left. - \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_{01}} \oint_{\gamma_{02}} L^{s\sigma}_{mn} \left[s\sigma \, K(t,\tau;s,\sigma) \right] \frac{\phi_{mn}(s,\sigma)}{s\sigma} ds \, d\sigma \right\|_{H_{\omega}(2)} \leq \\ & \leq d_5 \left(\frac{1}{m^{\mu}} + \frac{1}{n^{\nu}} \right) \ln m \ln n \frac{\omega^{(1)} \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right)}{\Omega_1^{(2)} \left(\frac{1}{m} \right) \Omega_2^{(2)} \left(\frac{1}{n} \right)}. \end{split}$$

Литература

1. Сніжко Н.В. Класифікація узагальнених просторів Гельдера функцій двох змінних // Вісник Київського університету. — 1999. — Вип. 3. — С. 124—128.

- 2. Габдулхаев Б.Г. О приближённом решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Матем. -1965. -№ 5. C. 43 51.
- 3. Snizhko N.V. Approximation of functions of two variables in generalized Hölder spaces // Studii în metode de analiză numerică și optimizare. Chișinău, 2000. Vol. 2. Nr. 2(4) P. 204 215.

УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ¹

С.Л. Ставцев

Россия, Москва, Институт вычислительной математики РАН, e-mail: stav@inm.ras.ru

В статье описаны особенности численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений, возникающих при моделировании высокочастотных звуковых полей в слое воды. Данный метод является развитием метода дискретных особенностей, используемого при решении задачи Неймана для скалярного уравнения Гельмгольца.

1. Пусть слой воды D ограничен поверхностью воды σ_1 и морским дном σ_2 . Таким образом, область распространения звука D ограничена эквипотенциальной поверхностью σ_1 , и непроницаемой поверхностью σ_2 . В наших исследованиях будем считать поверхность σ_1 плоскостью z=0, а поверхность σ_2 – гладкая поверхность (рисунок 1).

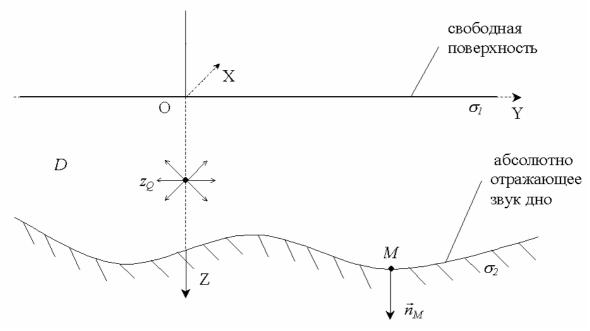


Рис. 1. Область распространения звука.

 $^{^1}$ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00951-а, № 05-01-00721-а и № 03-01-96433-р2003цчр а)

Избыточное акустическое давление монохроматического точечного источника мощности Q в точке M вычисляется по формуле

$$p_{Q}(M, M_{Q}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{e^{ikr_{MM_{Q}}}}{r_{MM_{Q}}},$$
 (1.1)

где ${\cal M}_O(0,\!0,\!z_O)$ — точка, в которой расположен источник.

В данной работе рассчитаем давление p(M), которое представим в виде:

$$p(M) = p_O(M, M_O) + P(M), M \in D,$$
(1.2)

где P(M) — возмущенное давление, которое удовлетворяет уравнению (см. [1])

$$\Delta P(M) + k^2 P(M) = 0, M \in D$$
 (1.3)

и граничным условиям

$$P(M) = -p_Q(M, M_Q), M \in \sigma_1,$$
 (1.4)

$$\frac{\partial P(M)}{\partial n_M} = -\frac{\partial p_Q(M, M_Q)}{\partial n_M}, M \in \sigma_2.$$
 (1.5)

В (1.3) волновое число k = const , \vec{n}_M — единичный вектор нормали к поверхности σ_2 в точке M .

Так как σ_1 – плоскость z=0, то можно учесть граничное условие (1.4), если искать давление p(M) в виде

$$p(M) = p_Q(M, M_Q) - p_Q(M, M_Q^*) + P^*(M), M \in D,$$
(1.6)

где $M_Q^*(0,0,-z_Q)$, а возмущенное давление $P^*(M)$ удовлетворяет уравнению (1.3) и граничному условию

$$\frac{\partial P^*(M)}{\partial n_M} = -\frac{\partial \left(p_Q(M, M_Q) - p_Q(M, M_Q^*)\right)}{\partial n_M}, M \in \sigma_2.$$
 (1.7)

Будем искать $P^*(M)$ в виде потенциала двойного слоя (см. [4]):

$$P^{*}(M) = \int_{\sigma_2} g(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, \qquad (1.8)$$

где функция Грина $G(M,N) = F(M,N) - F(M,N^*)$, $N(x_N,y_N,z_N)$, $N^*(x_N,y_N,-z_N)$, F(M,N) — фундаментальное решение уравнения (1.3):

$$F(M,N) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr_{MN}}}{r_{MN}}.$$
 (1.9)

В статье [4] показано, что давление p(M), вычисленное по формуле (1.6) и (1.8) удовлетворяет граничному условию (1.4). Согласно теории потенциала двойного слоя [2,3] удовлетворяя (1.8) граничному условию (1.7), получаем

$$\int_{\sigma_2} g(N) \frac{\partial^2 G(M,N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N = -\frac{\partial \left(p_Q(M,M_Q) - p_Q(M,M_Q^*) \right)}{\partial n_M}, M \in \sigma_2. \quad (1.10)$$

Таким образом, задача (1.2)–(1.5) сводится к гиперсингулярному интегральному уравнению (1.10) относительно неизвестной функции g(N). Искомое давление рассчитывается по формулам (1.6), (1.8).

2. Известны различные численные методы решения интегрального уравнения (1.10). Например, в монографии [2] на поверхности σ_2 строится сетка и в точках коллокации M_i , $i=1,\ldots,n$ для каждой ячейки σ^i применяется формула

$$\int_{\sigma^{i}} \frac{\partial^{2} F(M_{i}, N)}{\partial n_{M} \partial n_{N}} d\sigma_{N} = k^{2} \int_{\sigma^{i}} F(M_{i}, N) \vec{n}_{M} \cdot \vec{n}_{N} d\sigma_{N} - \int_{L_{\sigma^{i}}} \vec{n}_{M} \cdot \left(d\vec{l}_{N} \times \nabla_{N} F(M_{i}, N) \right), i = 1, \dots, n$$
(1.11)

где L_{σ^i} — граница ячейки σ^i , считая, что функция g(N) постоянная в пределах каждой ячейки.

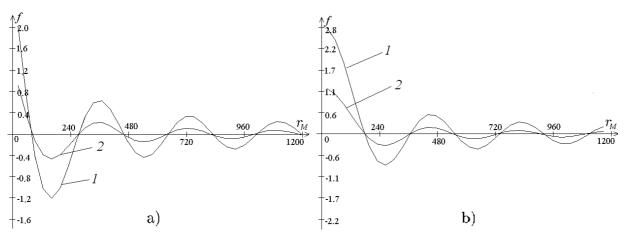


Рис. 2. Графики 1: $g(r_M)$; 2: $p_Q(r_M)$ для действительной (a) и мнимой (b) частей.

Как показывает исследование решения интегрального уравнения $(1.10),\ g(N)$ является осциллирующей функцией с частотой $f \sim \frac{kc}{2\pi}$ (c-c) скорость распространения звука в воде). Результаты численного эксперимента приведены на рисунке 2, линия 1 (а), (b). Поэтому для высоких частот $f \sim 1\kappa \Gamma u$ и при значительных размерах области D (>100m) мы должны построить очень мелкую сетку на поверхности σ_2 . Поэтому при применении стандартного метода, описанного в [2], возникают системы из порядка 10^5 уравнений.

Предположим, что решение уравнения (1.10) представимо в виде $g(N) = \varphi(N) \cdot h(N)$, (1.12)

где $\varphi(N)$ известная функция. Тогда после подстановки (1.12) в (1.10) мы получим уравнение относительно неизвестной функции h(N). Выберем функцию $\varphi(N)$ таким образом, чтобы функция h(N) не являлась сильно осциллирующей функцией.

Построим функцию $\varphi(N)$. Вначале рассмотрим частный случай, когда σ_2 представляет собой плоскость, параллельную плоскости OXY. Тогда в силу осесимметричности задачи, решение интегрального уравнения (1.10) $g(M)=g(r_M)$, $r_M=\sqrt{x_M^2+y_M^2}$. На рисунке 2 изображены функциональные зависимости $g(r_M)$ и $p_Q(r_M)$, $M\in\sigma_2$ при $f=4 \Gamma u$, $c=1450\frac{M}{c}$, $z_Q=50 M$. Сравнивая построенные графики, мы можем положить $\varphi(N)=p_Q(N)$. Очевидно, что в этом случае h(N) не является осциллирующей функцией. Поэтому возникающая система алгебраических уравнений имеет значительно меньшее число уравнений (порядка 10^3), величина которого определяется уже гладкой функцией h(N).

Также как и в [2] построим сетку на поверхности σ_2 . Также как и в [2] заменим каждую ячейку плоским четырехугольником $\widetilde{\sigma}_k$, k=1,2,...,n. Будем считать, что в пределах каждой ячейки постоянна функция h(N). В результате получим следующую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} h_k \int_{\widetilde{\sigma}^k} \varphi(N) \frac{\partial^2 G(M_j, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N = f(M_j), j = 1, ..., n.$$
 (1.13)

Построим функцию $\varphi(N)$ на произвольной гладкой поверхности σ_2 . Для этого также как для плоскости разобьем поверхность на ячейки и заменим каждую из ячеек на плоский четырехугольник $\widetilde{\sigma}_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Для каждой k-ой ячейки проведем плоскость α_k так чтобы ячейка $\widetilde{\sigma}_k$ лежала в этой плоскости. Обозначим через $g_k^0(N)$ решение интегрального уравнения

$$\int_{\alpha_k} g_k^0(N) \frac{\partial^2 G(M,N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N = -\frac{\partial \left(p_Q(M,M_Q) - p_Q(M,M_Q^*)\right)}{\partial n_M}, M \in \alpha_k.$$

В качестве $\varphi(N)$ для k -ой ячейки возьмем $g_k^0(N)$ и при решении интегрального уравнения (1.10) воспользуемся формулой аналогичной (1.13).

Таким образом, для численного решения уравнения (1.10) возникает система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой вычисляются по формулам

$$a_{jk} = \int_{\widetilde{\sigma}^k} \varphi(N) \frac{\partial^2 G(M_j, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N, \ j, k = 1, 2, \dots n.$$
 (1.14)

Интегралы в (1.14) являются гиперсингулярными. Формулы для их вычисления приведены в работе [5].

3. Результаты численного эксперимента приведены на рисунках 3,4.

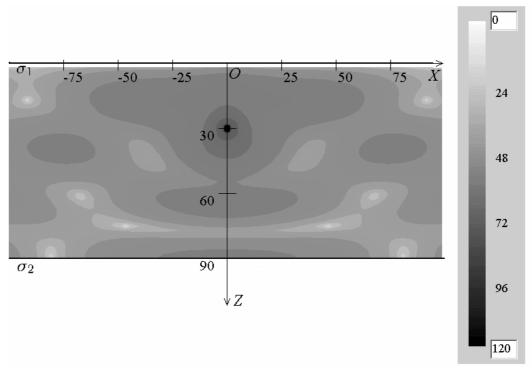


Рисунок 3. Поле избыточного звукового давления (в децибелах) для плоской поверхности σ_2 . Параметры расчета: $z_Q=30 \, {\it m}$, $f=30 \, {\it \Gamma} u$.

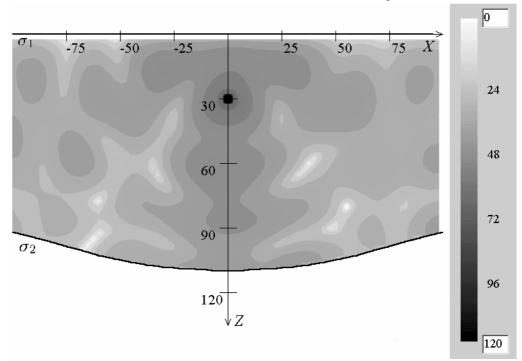


Рисунок 4. Поле избыточного звукового давления (в децибелах) для изогнутой поверхности σ_2 . Параметры расчета: $z_Q = 30 M$, $f = 30 \Gamma u$.

Литература

- 1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР. 1957. 504 с.
- 2. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Киев, Наукова думка, 2002, 344 с.
- 3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеивания. М. Мир, 1987. 311 с.
- 4. Ставцев С.Л., Лифанов И.К. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море. Дифференциальные уравнения, том 40, № 9, 2004 г., с. 1256-1270.
- 5. Ставцев С.Л. Вычисление некоторых типов гиперсингулярных интегралов с весовой функцией. // Настоящий сборник.

УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ВЕСОВОЙ Φ УНКЦИЕЙ 1

С.Л. Ставцев

Россия, Москва, Институт вычислительной математики РАН, e-mail: stav@inm.ras.ru

В данной работе описано вычисление гиперсингулярного интеграла с весовой функцией. Рассмотрен случай, когда весовая функция и ядро удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца.

Пусть функция F(M,N) является фундаментальным решением скалярного уравнения Гельмгольца (см. [1]):

$$F(M,N) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr_{MN}}}{r_{MN}},$$
 (1)

а функция $\varphi(N)$ скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi(N) + k^2\varphi(N) = 0, N \in \mathbb{R}^3$$
 (2)

При решении задачи Неймана для скалярного уравнения Гельмгольца (см. [3]) возникает необходимость вычисления гиперсингулярного интеграла вида

$$I(M) = \int_{\sigma} \varphi(N) \frac{\partial^2 G(M, N)}{\partial n_M \partial n_N} d\sigma_N.$$
 (3)

Представим интеграл (3) в виде $I(M) = \vec{n}_M \cdot \vec{\Phi}(M)$, где $\vec{\Phi}(M) = \Phi_x(M)\vec{i} + \Phi_y(M)\vec{j} + \Phi_z(M)\vec{k}$, $\vec{n}_M = \cos\alpha_M\vec{i} + \cos\beta_M\vec{j} + \cos\gamma_M\vec{k}$. Здесь $\cos\alpha_M$, $\cos\beta_M$, $\cos\gamma_M$ — направляющие косинусы вектора \vec{n}_M , а также введены обозначения

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00951-а, № 05-01-00721-а и № 03-01-96433-р2003цчр а).

$$\Phi_{x}(M) = \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial x_{M} \partial n_{N}} d\sigma_{N};$$

$$\Phi_{y}(M) = \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial y_{M} \partial n_{N}} d\sigma_{N};$$

$$\Phi_{z}(M) = \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial z_{M} \partial n_{N}} d\sigma_{N}.$$
(4)

Пусть $\vec{n}_N = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора \vec{n}_N . Из (1) получаем $\nabla_M F(M,N) = -\nabla_N F(M,N)$,

тогда

$$\Phi_{x}(M) = -\int_{\sigma} p_{Q}(N) \cos \alpha \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial x_{N}^{2}} d\sigma_{N} - \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial x_{N} \partial y_{N}} \times$$

 $imes \cos eta d\sigma_N - \int\limits_{\sigma} p_Q(N) rac{\partial^2 F(M,N)}{\partial x_N \partial z_N} \cos \gamma d\sigma_N$. Представим $\Phi_x(M)$ в следую-

щем виде

$$\Phi_{x}(M) = -I_{1}(M) - I_{2}(M) - I_{3}(M), \tag{5}$$

где через $I_1(M), I_2(M), I_3(M)$ обозначены следующие интегралы

$$I_{1}(M) = \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial x_{N}^{2}} \cos \alpha d\sigma_{N};$$

$$I_{2}(M) = \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial x_{N} \partial y_{N}} \cos \beta d\sigma_{N};$$

$$I_{3}(M) = \int_{\sigma} p_{Q}(N) \frac{\partial^{2} F(M, N)}{\partial x_{N} \partial z_{N}} \cos \gamma d\sigma_{N}.$$
(6)

Так как F(M,N) — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (1), то справедливо следующее соотношение

$$\frac{\partial^2 F(M,N)}{\partial x_N^2} = -\frac{\partial^2 F(M,N)}{\partial y_N^2} - \frac{\partial^2 F(M,N)}{\partial z_N^2} - k^2 F(M,N)$$

или после умножения правой и левой частей на $p_Q(N)$, приходим к

$$p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial x_{N}^{2}} = -p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial y_{N}^{2}} - p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial z_{N}^{2}} - -k^{2}p_{Q}(N)F(M,N).$$

$$(7)$$

Докажем, что для дважды дифференцируемых функций A(x,y) и B(x,y) справедливы соотношения

$$A(x,y)\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x,y) \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}. \tag{8}$$

$$A(x,y)\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x,y) \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} \right) - \frac{\partial A(x,y)}{\partial x} \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}. \tag{9}$$

Действительно, полагая в $\frac{\partial (A(x,y)C(x,y))}{\partial x} = A(x,y)\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} + C(x,y)$.

 $\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} C(x,y) = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}$ и выражая $A(x,y) \frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$, приходим к (8), а по-

лагая $C(x,y) = \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}$ и также выражая $A(x,y) \frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$, приходим к (9).

Применяя (8) для $A(x,y)=p_Q(N)$ и B(x,y)=F(M,N), и заменяя $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial v_N}$, приходим к

$$p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial y_{N}^{2}} = \frac{\partial}{\partial y_{N}} \left(p_{Q}(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}}\right) - \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial y_{N}}\frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}}, \quad (10)$$

а если заменить $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial z_N}$, то приходим к

$$p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial z_{N}^{2}} = \frac{\partial}{\partial z_{N}} \left(p_{Q}(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}}\right) - \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial z_{N}}\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}}. \quad (11)$$

Подставим (10) и (11) в (7) и тогда для интеграла $I_1(M)$ из (6) будет $\int \partial p_{\Omega}(N) \, \partial E(M,N)$

справедливо следующее соотношение $I_1(M) = \int\limits_{\sigma} \left[\frac{\partial p_Q(N)}{\partial y_N} \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_N} + \right]$

$$+\frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial z_{N}}\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} - k^{2}p_{Q}(N)F(M,N) \bigg] \cos\alpha d\sigma + \int_{\sigma} \cos\alpha \bigg[\frac{\partial}{\partial y_{N}} \bigg(-p_{Q}(N) \times \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \bigg) \bigg]$$

$$\times \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_N} - \frac{\partial}{\partial z_N} \left(p_Q(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_N} \right) d\sigma.$$

Применим формулу (9) к $p_Q(N) \frac{\partial^2 F(M,N)}{\partial x_N \partial y_N}$, полагая $A(x,y) = p_Q(N)$

и B(x,y)=F(M,N), и заменяя $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial x_N}$, а $\frac{\partial}{\partial y}$ на $\frac{\partial}{\partial y_N}$ приходим к

$$p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial x_{N}\partial y_{N}} = \frac{\partial}{\partial x_{N}}\left(p_{Q}(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}}\right) - \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial x_{N}}\frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}}.$$
 (12)

Рассуждая аналогичным образом и заменяя в формуле (9) $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial x_N}$, а $\frac{\partial}{\partial z}$

на $\frac{\partial}{\partial z_N}$ приходим к

$$p_{Q}(N)\frac{\partial^{2}F(M,N)}{\partial x_{N}\partial z_{N}} = \frac{\partial}{\partial x_{N}} \left(p_{Q}(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}}\right) - \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial x_{N}}\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}}.$$
 (13)

Таким образом, используя формулы (12) и (13) перепишем интегралы $I_2(M)$ и $I_3(M)$ соответственно в виде $I_2(M) = -\int_{\sigma} \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_N} \times \cos \beta d\sigma_N + \int_{\sigma} \cos \beta \left[-\frac{\partial}{\partial x_N} \left(-p_Q(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_N} \right) \right] d\sigma_N$ и $I_3(M) = \int_{\sigma} \cos \gamma \times \left[-\frac{\partial}{\partial x_N} \left(p_Q(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_N} \right) \right] d\sigma_N - \int_{\sigma} \cos \gamma \frac{\partial p_Q(N)}{\partial x_N} \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_N} d\sigma_N$. Приме-

няя полученные выражения для $I_1(M),\ I_2(M)$ и $I_3(M),$ а также (5) запишем $\Phi_x(M)$ в виде

$$\begin{split} \Phi_{x}(M) &= -\int_{\sigma} \left\{ \cos \alpha \left[\frac{\partial}{\partial y_{N}} \left(-p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} \right) - \frac{\partial}{\partial z_{N}} \left(p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \right) \right] + \\ &+ \cos \beta \left[-\frac{\partial}{\partial x_{N}} \left(p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} \right) \right] + \cos \gamma \left[-\frac{\partial}{\partial x_{N}} \left(p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \right) \right] \right\} d\sigma_{N} - \\ &- \int_{\sigma} \left\{ \left[\frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial y_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} + \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial z_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} - k^{2} p_{Q}(N) F(M,N) \right] \cos \alpha - \\ &- \cos \beta \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial x_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} - \cos \gamma \frac{\partial p_{Q}(N)}{\partial x_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \right\} d\sigma. \end{split}$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся формулой Стокса [2]

$$\int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma =
= \int_{L_{\sigma}} P dx + Q dy + R dz,$$
(14)

где L_{σ} граница поверхности σ .

Полагая в формуле (14) P=0, $Q=p_Q(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_N}$ и $R=-p_Q(N)\times \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_N}$ получаем следующее соотношение $\int\limits_{\sigma} \left[\cos\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_N}\left(-p_Q(N)\times \frac{\partial}{\partial y_N}\right)\right)\right] dy$

$$\times \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} - \frac{\partial}{\partial z_{N}} \left(p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \right) + \cos \beta \left(-\frac{\partial}{\partial x_{N}} \left(-p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} \right) \right) + \\ + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_{N}} \left(p_{Q}(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \right) d\sigma = \int_{L_{\tau}} p_{Q}(N) \left(\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} dy_{N} - \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} dz_{N} \right).$$

Сравнивая это соотношение с выражением для $\Phi_x(M)$, полученным ранее, приходим к формуле

$$\begin{split} \Phi_{x}(M) &= -\int_{L_{\sigma}} p_{\mathcal{Q}}(N) \left(\frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} dy_{N} - \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} dz_{N} \right) - \\ &- \int_{\sigma} \left\{ \left[\frac{\partial p_{\mathcal{Q}}(N)}{\partial y_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} + \frac{\partial p_{\mathcal{Q}}(N)}{\partial z_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} - k^{2} p_{\mathcal{Q}}(N) F(M,N) \right] \cos \alpha - \\ &- \cos \beta \frac{\partial p_{\mathcal{Q}}(N)}{\partial x_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_{N}} - \cos \gamma \frac{\partial p_{\mathcal{Q}}(N)}{\partial x_{N}} \frac{\partial F(M,N)}{\partial z_{N}} \right\} d\sigma_{N} \end{split}$$

или в компактной форме:

$$\Phi_{x}(M) = -\int_{L_{\sigma}} p_{Q}(N) \left(\overrightarrow{dl} \times \nabla_{N} F(M, N) \right)_{x} + k^{2} \int_{\sigma} p_{Q}(N) F(M, N) \cos \alpha d\sigma_{N} - \int_{C} \cos \alpha \left[\nabla_{N} F(M, N) \times \left(\overrightarrow{n}_{N} \times \nabla_{N} p_{Q}(N) \right) \right]_{x} d\sigma_{N},$$
(15)

где $\overrightarrow{dl} = dx \, \overrightarrow{i} + dy \, \overrightarrow{j} + dz \, \overrightarrow{k}$, а под $(\bullet)_x$ понимается координата x соответствующего вектора.

Проводя аналогичные рассуждения для проекций $\Phi_y(M)$ и $\Phi_z(M)$ из (4), получаем, что

$$\begin{split} \Phi_{y}(M) &= -\int_{L_{\sigma}} p_{Q}(N) \left(\overrightarrow{dl} \times \nabla_{N} F(M,N) \right)_{y} + k^{2} \int_{\sigma} p_{Q}(N) F(M,N) \cos \beta d\sigma_{N} - \int_{L_{\sigma}} \cos \beta \left[\nabla_{N} F(M,N) \times \left(\overrightarrow{n}_{N} \times \nabla_{N} p_{Q}(N) \right) \right]_{y} d\sigma_{N}; \\ \Phi_{z}(M) &= -\int_{L_{\sigma}} p_{Q}(N) \left(\overrightarrow{dl} \times \nabla_{N} F(M,N) \right)_{z} + k^{2} \int_{\sigma} p_{Q}(N) F(M,N) \cos \gamma d\sigma_{N} - \int_{L_{\sigma}} \cos \gamma \left[\nabla_{N} F(M,N) \times \left(\overrightarrow{n}_{N} \times \nabla_{N} p_{Q}(N) \right) \right]_{z} d\sigma_{N} \end{split}$$

Таким образом, интеграл (3) вычисляется по формуле

$$I(M) = -\int_{L_{\sigma}} p_{Q}(N) \vec{n}_{M} \cdot \left(\overrightarrow{dl} \times \nabla_{N} F(M, N) \right) + k^{2} \int_{\sigma} p_{Q}(N) F(M, N) \times \left(\vec{n}_{M} \cdot \vec{n}_{N} \right) d\sigma_{N} - \int_{\sigma} \vec{n}_{M} \cdot \left[\nabla_{N} F(M, N) \times \left(\vec{n}_{N} \times \nabla_{N} p_{Q}(N) \right) \right] d\sigma_{N}.$$

$$(16)$$

Литература

- 1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеивания. М. Мир, 1987. 311 с.
- 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974г, 831 с.
- 3. Ставцев С.Л. Некоторые численные решения гиперсингулярных интегральных уравнений в задачах акустики // Настоящий сборник.

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ГРУНТА¹

Ю.С. Феляев

Россия, Орловский государственный университет

Ставится двумерная задача об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в неоднородных слоях грунта с непроницаемыми границами. Её исследование приводит к эволюционной задаче для системы интегральных и дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. Для полученных уравнений предложен численный метод решения, основанный на методе дискретных особенностей. Приводятся результаты решения конкретных задач.

1. Рассмотрим двумерную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости в тонком неоднородном слое проводимости

$$P(M) = K(M)H(M) (P(M) > 0),$$
 (1.1)

M – точка в плоскости основания слоя, K(M) – коэффициент проницаемости слоя, H(M) – его толщина. Основанием слоя является горизонтальная плоскость на которой выбрана декартова система координат xOy. Проводимость слоя P(M) моделируется непрерывной с первыми частными производными функцией координат. Движение жидкости обусловлено работой совершенных нагнетательных и эксплуатационных скважин. Они моделируются источниками и стоками течения, которые являются особыми точками поля скоростей жидкости.

Поле скоростей жидкости $\vec{v}(M,t)$ в каждый момент времени t в области течения D (см. рис. 1), за исключением особых точек, удовлетворяет системе уравнений, которая в безразмерных величинах имеет вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\upsilon_{y}(M,t)}{K(M)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\upsilon_{x}(M,t)}{K(M)} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (H(M)\upsilon_{x}(M,t)) + \frac{\partial}{\partial y} (H(M)\upsilon_{y}(M,t)) = 0, \quad M \in D.$$
(1.2)

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433).

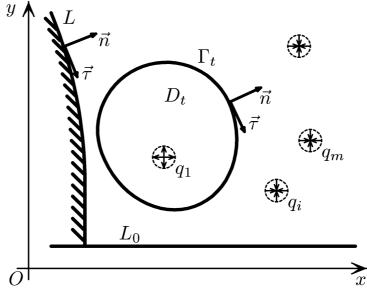


Рис. 1. Область фильтрации.

В области фильтрации D присутствует изменяющаяся с течением времени область D_t , ограничена кривой Γ_t . В области D_t движется жидкость постоянной вязкости μ_2 . Вне области D_t нагодится жидкость постоянной вязкости μ_1 . Скважины в области D_t нагнетают (отбирают) жидкость вязкости μ_2 , а вне этой области — жидкость вязкости μ_1 . Граница Γ_t изменяется так, что её в любой момент времени можно моделировать простой кривой класса Ляпунова. Положение области D_t (границы Γ_t) в начальный момент времени t=0 известно, которое обозначим D_0 (Γ_0). Параметрическое уравнение границы Γ_0 имеет вид (σ — параметр):

при
$$t = 0$$
 $\vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma)$, $M \in \Gamma_0$. (1.3)

В области фильтрации присутствует непроницаемая граница L. Контур L является линий тока и может моделировать границу тектонического сброса (линию сброса). Область течения D может ограничивать сингулярная линия L_0 . Если проводимость слоя на ней обращается в ноль, обозначим её L_{01} . Когда же проводимость слоя на сингулярной линии обращается в бесконечность, обозначим её L_{02} . Таким образом $L_0 = L_{01} \cup L_{02}$.

Контур $C = \Gamma_t \cup L$ обходится по часовой стрелке. Источники (стоки) течения располагаются только в области D, на контуре C их нет.

Пусть известно невозмущённое поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$ течения «разноцветных» жидкостей ($\mu_1=\mu_2=1$) в неоднородной среде, когда отсутствует непроницаемая граница L. Это поле скоростей обусловлено работой скважин, расположенных в точках M_{0i} (i=1,2,...m) области фильтрации D. Скважины моделируются источниками (стоками) мощности q_i (i=1,2,...m). Тогда поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$ имеет вид:

$$\vec{v}_0(M,t) = \sum_{i=1}^m q_i(t) \vec{F}_i(M,M_{0i}), \quad M \in D.$$
(1.4)

Функции $\vec{F}_i(M,M_{0i})$ имеют сингулярность типа $1/|\vec{r}_M - \vec{r}_{M_{0i}}|$ в точках нахождения особенностей M_{0i} , а их вид зависит от закона изменения проводимости слоя (1.1). Скорость $\vec{v}_0(M,t)$ всюду в области D, за исключением особых точек, удовлетворяет основным уравнениям (1.2) и граничному условию на сингулярной линии L_0 [1].

Учтём поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$ и представим искомое поле скоростей $\vec{v}(M,t)$ следующим образом:

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0(M,t) + \vec{V}(M,t), \quad M \in D,$$
 (1.5)

где $\vec{V}(M,t)$ – скорость возмущения, обусловленного наличием границ C. Скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ должна удовлетворять основным уравнениям (1.2) и соответствующим условиям на границах Γ_t , L, L_0 [1].

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы по сравнению с силами гидродинамического давления. Тогда на подвижной границе Γ_t выполняются условия непрерывности расхода жидкости и давления, которые для скорости возмущения имеют вид:

$$V_n^+(M,t) = V_n^-(M,t) ,$$

$$(1 - \lambda_{\mu})V_{\tau}^+(M,t) - (1 + \lambda_{\mu})V_{\tau}^-(M,t) = 2\lambda_{\mu}\nu_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma .$$
(1.6)

Здесь и далее «+» («-») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе со стороны нормали \vec{n} (или противоположной стороны). Параметр $\lambda_{\mu} = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\lambda_{\mu} \in (-1;1)$ и нормаль направлена из области D_t .

На границе L выполняется условие непроницаемости

$$V_n^+(M,t) = -v_{0n}(M,t), \quad M \in L.$$
 (1.7)

Здесь нормаль направлена в область фильтрации $\,D\,.$

На сингулярной линии L_{01} выполняется условие отсутствия расхода жидкости

$$H(M)V_n(M,t) = 0, \quad M \in L_{01},$$
 (1.8)

а на сингулярной линии $L_{02}\,$ выполняется условие постоянства давления

$$V_{\tau}(M,t) = 0, \quad M \in L_{02}.$$
 (1.9)

Если область D содержит бесконечно удалённую точку, то скорость возмущения должна затухать на бесконечности

$$V(M,t) \to 0$$
 при $\rho(M,C) \to \infty$. (1.10)

Здесь $\rho(M,C)$ – расстояние между точкой M и контуром C.

В начальный момент времени t = 0 положение подвижной границы определяется уравнением (1.3). Для нахождения положения границы Γ_t в

последующие моменты времени t > 0 необходимо дифференциальное уравнение её движения. Учитывая связь физической скорости и скорости фильтрации, также следуя [2], это уравнение запишем в виде:

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} = \vec{v}_{0}(M,t) + \frac{1}{2} \left[\vec{V}^{+}(M,t) + \vec{V}^{-}(M,t) \right], \quad M \in \Gamma_{t}.$$
 (1.11)

Таким образом, нахождение поля скоростей $\vec{v}(M,t)$ и положения границы Γ_t сводится к отысканию скорости возмущения $\vec{V}(M,t)$, удовлетворяющей уравнениям (1.2), условиям (1.6) – (1.10), и интегрировании дифференциального уравнения движения границы (1.11) при начальном условии (1.3).

2. Полагаем, что кривые Γ_t и L в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. Будем искать скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ в виде потенциала вихревого слоя, распределённого с плотностью f(N,t) на границе Γ_t и h(N,t) на границе L:

$$\vec{V}(M,t) = \int_{\Gamma_t} f(N,t) \vec{V}_B^* d\ell_N + \int_{L} h(N,t) \vec{V}_B^* d\ell_N, \quad M \in D.$$
 (2.1)

Здесь $\vec{V}_B^* = \vec{V}_B(M,N)/K(N)$, $\vec{V}_B(M,N)$ — скорость в точке M от нормированного вихря, расположенного в точке N. Эта скорость выражается через функцию тока вихря $\Psi(M,N)$ по формуле [2]

$$\vec{V}_B(M,N) = \frac{1}{H(M)} \left[\frac{\partial \Psi(M,N)}{\partial y_M} \vec{i} - \frac{\partial \Psi(M,N)}{\partial x_M} \vec{j} \right], \tag{2.2}$$

где \vec{i} и \vec{j} – орты координатных осей Ox и Oy. При наличии в области фильтрации сингулярной линии L_0 скорость $\vec{V}_B(M,N)$ удовлетворяет граничным условиям (1.8) и (1.9). Поэтому скорость возмущения (2.1) тоже удовлетворяет этим условиям. Для скорости возмущения также выполняется условие на бесконечности (1.10).

Непрерывно продолжим скорость $\vec{V}(M,t)$ на границы Γ_t и L. Следуя [2], получаем её предельные значения:

$$\vec{V}^{\pm}(M,t) = \vec{V}(M,t) \pm \frac{f(M,t)}{2} \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t,$$
(2.3)

$$\vec{V}^{+}(M,t) = \vec{V}(M,t) + \frac{h(M,t)}{2}\vec{\tau}_{M}, \quad M \in L.$$
 (2.4)

Здесь под $\vec{V}(M,t)$ понимается прямое значение скорости возмущения (2.1) на контуре C.

Из (2.3) следует, что нормальные составляющие предельных значений скорости возмущения на границе Γ_t непрерывны. Подставляя (2.3) и (2.4) в условия (1.6) и (1.7) получаем систему интегральных уравнений:

$$f(M,t) - 2\lambda_{\mu}V_{\tau}(M,t) = 2\lambda_{\mu}\upsilon_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma_{t}, \tag{2.5}$$

$$V_n(M,t) = -v_{0n}(M,t), \quad M \in L,$$
 (2.6)

где $V_{\tau}(M,t) = \vec{V}(M,t) \cdot \vec{\tau}_{M}$ и $V_{n}(M,t) = \vec{V}(M,t) \cdot \vec{n}_{M}$ – касательная и нормальная составляющая прямого значения скорости возмущения на соответствующей границе. Уравнение (2.5) представляет собой интегральное уравнения второго рода, а уравнение (2.6) – интегральное уравнение первого рода.

Подставляя (2.3) в (1.11), получим уравнение движения границы Γ_t :

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{\upsilon}_0(M, t) + \vec{V}(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{2.7}$$

Следовательно, для нахождения скорости возмущения $\vec{V}(M,t)$ необходимо решить систему уравнений (2.5) и (2.6) относительно плотности вихревого слоя на контуре C. Вычислив интеграл (2.1) получаем искомую скорость. Положение границы Γ_t находим при решении дифференциального уравнения (2.7) при начальном условии (1.3).

Уменьшим число уравнений в полученной системе. Для этого исключим f(M,t) из уравнения (2.7). Умножив (2.7) скалярно на единичный вектор касательной $\vec{\tau}_M$ в точке M границы Γ_t и используя уравнение (2.5), получим

$$f(M,t) = 2\lambda_{\mu} \frac{d\vec{r}_{M}}{dt} \cdot \vec{\tau}_{M}, \quad M \in \Gamma_{t}.$$
 (2.8)

Следовательно, плотность распределения особенностей f(M,t) по границе Γ_t пропорциональна касательной составляющей скорости движения этой границы в данной точке M. Подставляя (2.8) в (2.7) и (2.6) имеем:

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} - 2\lambda_{\mu} \int_{\Gamma_{t}} \frac{d\vec{r}_{N}}{dt} \cdot \vec{\tau}_{N} \vec{V}_{B}^{*} d\ell_{N} - \int_{L} h(N, t) \vec{V}_{B}^{*} d\ell_{N} = \vec{v}_{0}(M, t), \quad M \in \Gamma_{t}, \quad (2.9)$$

$$\int_{L} h(N,t) V_{Bn}^{*} d\ell_{N} + 2\lambda_{\mu} \int_{\Gamma_{t}} \frac{d\vec{r}_{N}}{dt} \cdot \vec{\tau}_{N} V_{Bn}^{*} d\ell_{N} = -\nu_{0n}(M,t), \quad M \in L, \quad (2.10)$$

где $V_{Bn}^* = \vec{V_B}^* \cdot \vec{n}_M$ — нормальная составляющая скорости нормированного вихря на границе L .

Таким образом, изучение движения границы Γ_t сводится к решению эволюционной задачи для системы интегро-дифференциального (2.9) и интегрального (2.10) уравнений при начальном условии (1.3).

Решение поставленной задачи упрощается, если граница L имеет канонический вид (прямая, окружность). В этом случае поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$ и скорость вихря $\vec{V}_B(M,N)$ выбираем таким образом, чтобы граничные условия на границе L выполнялись. Тогда следует положить h(N,t)=0 и необходимость в уравнении (2.10) отпадает. Интегродифференциальное уравнение (2.9) примет вид

$$\frac{d\vec{r}_{M}}{dt} - 2\lambda_{\mu} \int_{\Gamma_{t}} \frac{d\vec{r}_{N}}{dt} \cdot \vec{\tau}_{N} \vec{V}_{B}^{*}(M, N) d\ell_{N} = \vec{\upsilon}_{0}(M, t), \quad M \in \Gamma_{t}.$$
 (2.11)

При отсутствии границы L интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет тот же вид (2.11). В указанных случаях нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения (2.11) при начальном условии (1.3) [3].

3. Полученная система уравнений (2.9) и (2.10) решена численно. Ядро интегро-дифференциального уравнения (2.9) на подвижной границе Γ_t при N=M имеет сингулярность логарифмического типа. Для его решения применим численный метод, предложенный в работе [4]. На непроницаемой границе L имеет место интегральное уравнение первого рода (2.10). Для решения этого уравнения используем численный метод, предложенный в [5].

В случае, когда граница L замкнута, уравнение (2.10) является сингулярным интегральным уравнением с ядром Гильберта. Для разомкнутой границы L (2.10) является сингулярным интегральным уравнением на отрезке с ядром Коши. Условие выделения единственного решения этого уравнения имеет вид

$$\int_{L} h(N,t)d\ell_{N} = 0, \quad M \in L.$$
(3.1)

Физически это означает, что моделирование непроницаемой границы вихревым слоем не должно приводить к появлению дополнительных источников (стоков) течения в области фильтрации.

Представим уравнения (2.9) и (2.10) в разностном виде с помощью метода дискретных особенностей [5]. Для этого разобьём подвижную границу Γ_t в момент времени t_p ($p=0,1,\ldots$) на n_p частей. Тогда положение границы Γ_t задаётся множеством точек $E_{\Gamma_t}^p = \left\{ x_i^p, y_i^p, i=0,1,\ldots,n_p \right\}$. В случае замкнутой границы Γ_t считаем, что $x_0^p = x_{n_p}^p$, $y_0^p = y_{n_p}^p$. Начальное условие (1.3) примет вид:

при
$$t = 0$$
 $\Gamma_0 : \{x_i^0, y_i^0, i = 0, 1, ..., n_0\}.$ (3.2)

Положение непроницаемой границы L задано уравнением

$$\vec{r}_M = \vec{r}_M(\ell), \quad M \in L, \tag{3.3}$$

где ℓ – параметр (длина кривой). Обозначим координаты точки $M=(\xi,\eta),$ если $M\in L$.

Рассмотрим случай замкнутой кривой L. Выберем на этой границе два множества точек: $E_L = \{\ell_k, k=1,...,m\}$ и $E_{0L} = \{\ell_{0k}, k=1,...,m\}$ таких, что точки $\ell_k, k=1,...,m$ разбивают L на m равных частей, а точка ℓ_{0k} является серединой дуги $\overline{\ell_k\ell_{k+1}}$, где полагаем $\ell_{m+1} = \ell_1$. Выбранные таким образом точки называют каноническим разбиением замкнутой кривой L. В точках множества E_L располагаются особенности, а точки множества E_{0L} являются расчётными точками. Система уравнений (2.9) и (2.10) примет вид:

$$\frac{x_{i}^{p+1}-x_{i}^{p}}{\Delta t_{p+1}}-2\lambda_{\mu}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n_{p}}B_{j}^{p}V_{Bx_{i,j}}^{*}-\sum_{k=1}^{m}h_{k}^{p}V_{Bx_{i,k}}^{*}\Delta\ell_{k}=\upsilon_{0x_{i}}\,,$$

$$\frac{y_{i}^{p+1}-y_{i}^{p}}{\Delta t_{p+1}}-2\lambda_{\mu}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n_{p}}B_{j}^{p}V_{By_{i,j}}^{*}-\sum_{k=1}^{m}h_{k}^{p}V_{By_{i,k}}^{*}\Delta\ell_{k}=\upsilon_{0y_{i}}\,,$$

$$\gamma_{m}+2\lambda_{\mu}\sum_{j=1}^{n_{p}}B_{j}^{p}V_{Bn_{k,j}}^{*}+\sum_{l=1}^{m}h_{l}^{p}V_{Bn_{k,j}}^{*}\Delta\ell_{l}=-\upsilon_{0n_{k}}\,,\,\,\sum_{l=1}^{m}h_{l}^{p}\Delta\ell_{l}=0. \tag{3.5}$$

$$3\text{десь }i=1,\ldots,n_{p},\,\,k=1,\ldots,m\,,\,\,\Delta t_{p+1}=t_{p+1}-t_{p},\,\,p=0,1,\ldots,$$

$$B_{j}^{p}=\frac{\left(x_{j}^{p+1}-x_{j}^{p}\right)\left(x_{j+1}^{p}-x_{j-1}^{p}\right)}{\Delta t_{p+1}}+\frac{\left(y_{j}^{p+1}-y_{j}^{p}\right)\left(y_{j+1}^{p}-y_{j-1}^{p}\right)}{2}\,,$$

$$V_{Bn_{k,\bullet}}^{*}=V_{By_{k,\bullet}}^{*}\frac{\xi_{0_{k+1}}-\xi_{0_{k-1}}}{2\Delta\ell_{0_{k}}}-V_{Bx_{k,\bullet}}^{*}\frac{\eta_{0_{k+1}}-\eta_{0_{k-1}}}{2\Delta\ell_{0_{k}}}\,,$$

$$\upsilon_{0n_{k}}=\upsilon_{0y_{k}}\frac{\xi_{0_{k+1}}-\xi_{0_{k-1}}}{2\Delta\ell_{0_{k}}}-\upsilon_{0x_{k}}\frac{\eta_{0_{k+1}}-\eta_{0_{k-1}}}{2\Delta\ell_{0_{k}}}\,,$$

$$\Delta\ell_{0k}=\left[\sqrt{\left(\xi_{0_{k}}-\xi_{0_{k-1}}\right)^{2}+\left(\eta_{0_{k}}-\eta_{0_{k-1}}\right)^{2}}+\sqrt{\left(\xi_{0_{k+1}}-\xi_{0_{k}}\right)^{2}+\left(\eta_{0_{k+1}}-\eta_{0_{k}}\right)^{2}}}\right]/2\,,$$

$$\Delta\ell_{k}=\left[\sqrt{\left(\xi_{k}-\xi_{k-1}\right)^{2}+\left(\eta_{k}-\eta_{k-1}\right)^{2}}+\sqrt{\left(\xi_{k+1}-\xi_{k}\right)^{2}+\left(\eta_{k+1}-\eta_{k}\right)^{2}}}\right]/2\,,$$

В уравнениях (3.4) под $V_{Bx_{i,i}}^*$ и $V_{By_{i,j}}^*$ понимаются значения проекции скорости \vec{V}_B^* , создаваемой нормированным вихрем в i -ой точке границы Γ_t (L), расположенным в j-ой точке границы Γ_t (L). Под υ_{0x_i} и υ_{0y_i} понимается значение невозмущённого поля скоростей $\vec{\upsilon}_0$ в i-ой точке границы Γ_t . Для замкнутой кривой Γ_t считаем, что $x_{n_p+1}^p = x_1^p$, $y_{n_p+1}^p = y_1^p$. В случае разомкнутой кривой Γ_t в начальной точке следует брать правые, а в конечной – левые разности для вычисления производных по координатам. В уравнениях (3.5) скорости $V_{Bn_k}^*$ и υ_{0n_k} вычисляются в расчётных точках множества E_{0L} , значения плотностей h_l^p находятся в точках множества E_L . Неизвестная γ_m называется регуляризирующей переменной. Без γ_m система переопределена И несовместна. Переменная γ_m делает определённой и при этом $\gamma_m \to 0$ при $m \to \infty$.

 $\xi_k = \xi(\ell_k), \quad \eta_k = \eta(\ell_k), \quad \xi_{0_k} = \xi(\ell_{0_k}), \quad \eta_{0_k} = \eta(\ell_{0_k}).$

В случае разомкнутой кривой L пусть точки $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_m, \ell_{m+1}$ разбивают кривую L на m+1 равных частей. Параметру ℓ_0 соответствует

начало, а параметру ℓ_{m+1} конец кривой L. Точка ℓ_{0j} является серединой отрезка $\overline{\ell_j\ell_{j+1}}$, $j=0,1,\ldots,m$. Точки множества $E_L=\{\ell_k,k=1,\ldots,m\}$ и $E_{0L}=\{\ell_{0k},k=1,\ldots,m\}$ образуют каноническое разбиение кривой L. Уравнение (2.10) в этом случае примет вид

$$2\lambda_{\mu} \sum_{j=1}^{n_{p}} B_{j}^{p} V_{Bn_{k,j}}^{*} + \sum_{l=1}^{m} h_{l}^{p} V_{Bn_{k,l}}^{*} \Delta \ell_{l} = -\nu_{0n_{k}}, \quad \sum_{l=1}^{m} h_{l}^{p} \Delta \ell_{l} = 0, \quad (3.5')$$

где k = 1, ..., m-1, p = 0,1,...

Таким образом, в случае замкнутой кривой L для определения положения границы Γ_t на каждом шаге по времени необходимо решать систему уравнений (3.4) и (3.5) при начальном условии (3.2) относительно неизвестных $\left\{\gamma_m,h_k^p,x_i^{p+1},y_i^{p+1},k=1,\ldots,m,i=1,\ldots,n_p\right\}$. При этом должно выполняться условие $\gamma_m \to 0$ при $m\to\infty$. Для разомкнутой кривой L необходимо решать систему уравнений (3.4) и (3.5') при начальном условии (3.2) относительно неизвестных $\left\{h_k^p,x_i^{p+1},y_i^{p+1},k=1,\ldots,m,i=1,\ldots,n_p\right\}$.

4. Для тестирования предложенной численной схемы исследуем работу нагнетательной скважины постоянного дебита q в однородном слое (K=1) постоянной толщины (H=1). Полагаем, что скважина находится в точке с координатами (x_0, y_0) на характерном расстоянии d от непроницаемой границы L. Тогда невозмущённое поле скоростей (1.4) имеет вид:

$$\nu_{0x} = \frac{q}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \nu_{0y} = \frac{q}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$
 (4.1)

За характерное время выберем время $T = \pi d^2/q$. Тогда при расчётах надо положить $q = \pi$. Первоначальное положение границы Γ_0 представляет собой окружность малого радиуса $R_0 = 0.01d$ с центром в точке (x_0, y_0) .

На рис. 2 показана эволюция границы раздела «разноцветных» жидкостей ($\lambda_{\mu}=0$) от нагнетательной скважины, расположенной в точке с координатами (-1,0). Область фильтрации D ограничена прямолинейной непроницаемой границей L, уравнение которой x=0. Толстой линией нарисованы положения границы Γ_t , полученные при аналитическом учёте границы L [3], а тонкой — при числённом учёте этой границы. Видим, что предложенная численная схема дает хороший результат.

На рис. 3 показана эволюция границы раздела «разноцветных» жидкостей от нагнетательной скважины в точке (-2,0). Непроницаемая граница L представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом R=1. Видим, что положения границы Γ_t , найденные при аналитическом и при численном учёте границы L, практически совпадают.

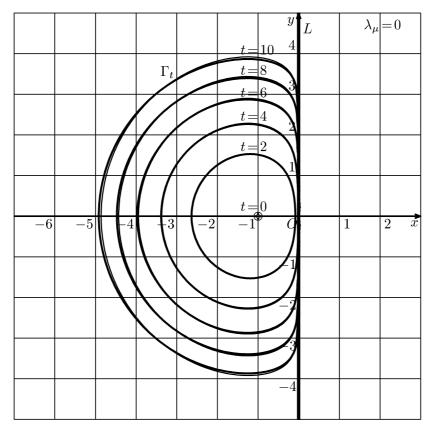


Рис. 2. Обтекание прямой непроницаемой границы.

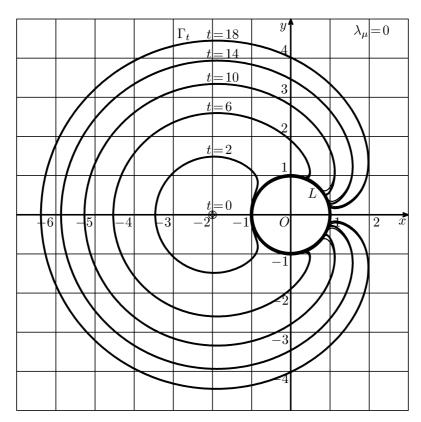


Рис. 3. Обтекание непроницаемого включения в виде окружности.

Литература

- 1. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование двумерной эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородных слоях грунта. // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 3. Орёл. ОГУ. 2004. С. 54-63.
- 2. Пивень В.Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №12. С. 1705–1710.
- 3. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование влияния непроницаемой границы области фильтрации на движение границы раздела жидкостей различной вязкости // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физ.-мат. факультета ГОУ ВПО «ОГУ». Выпуск 3. Орёл: ГОУ ВПО «ОГУ», 2004. С. 135-140.
- 4. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Эволюция двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое грунта // Труды XI Международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков-Херсон. 2003. С. 211–216.
- 5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЕБИТА СКВАЖИНЫ ОТ ФОРМЫ КОНТУРА ПИТАНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

М.А. Фролов

Россия, Орловский государственный институт экономики и торговли

В отличии от работ [1-6], рассматривается двумерная упругая нестационарная фильтрация жидкости к совершенным скважинам. Исследуется интерференция системы скважин в случае прямолинейного контура питания. Производится сопоставление со случаем стационарной фильтрации несжимаемой жидкости.

Рассмотрим нестационарную фильтрацию упругой капельной жидкости.

Основным уравнением движения упругой жидкости в упругой пористой среде является уравнение типа теплопроводности [6] (уравнение Щелкачёва):

$$\chi \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t},\tag{1}$$

где p — давление, $\chi=\frac{kK}{m_0\mu}$ — коэффициент пьезопроводности, k — коэффициент проницаемости среды, μ — вязкость среды, m_0 — пористость при начальном давлении p_0 , $K=\frac{K_{\mathscr{H}}}{1+K_{\mathscr{H}}/m_0\,K_c}$ — приведённый модуль

упругости жидкости в упругой пористой среде, K_{∞} — модуль объёмной упругости жидкости, K_c — модуль упругости пористой среды.

При решении практических задач целесообразно использовать безразмерные величины. Пусть $p'=\frac{p}{p_0}$ — безразмерное давление, $L'=\frac{L}{L_0}$ — безразмерная длина, $\nabla'=L_0\nabla$ — безразмерный оператор, $t'=\frac{t}{t_0}$ — безразмерное время. Здесь p_0 , L_0 , t_0 — характерные значения соответствующих величин, их выбор определяется конкретным видом задачи. Выразим величины, входящие в уравнение (1), через соответствующие им безразмерные величины: $p=p_0p'$, $\nabla=\frac{\nabla'}{L_0}$, $t=t_0t'$.

Подставив последние соотношения в (1) имеем:

$$\chi \frac{p_0}{L_0^2} \nabla^2 p' = \frac{p_0}{t_0} \frac{\partial p'}{\partial t'}.$$

Полагая $t_0 = \frac{L_0^2}{\chi}$ и опуская штрихи, запишем уравнение (1) в безразмерных величинах:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} \,. \tag{1'}$$

Таким образом, уравнение (1), записанное в безразмерных величинах, полностью сохраняет свой вид.

Фундаментальное решение уравнения (1'), описывающее плоскопараллельное течение жидкости к точечному стоку единичной мощности (мощность предполагается постоянной) в однородной среде имеет вид:

$$p = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r^2}{4t} \right), \tag{2}$$

где
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$
, $\mathrm{Ei}\!\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$ — функция интегрального

экспоненциала.

Поставим задачу о дебите системы совершенных скважин, расположенных в некоторой области D .

Пусть в этой области расположено число p совершенных скважин. Работу скважин, обладающих дебитами q_i , будем моделировать точечными стоками [1, 3, 5]. Полагаем, что координаты центра скважин

140

 $^{^{1}}$ Для эксплуатационных скважин дебиты положительны $(q_{i}>0)$, нагнетательных — отрицательны $(q_{i}<0)$.

 $M_{0i} = (x_{0i}, y_{0i})$, а их контуры L_{ci} — окружности радиусов R_{ci} i = 1, ..., n. Контур L_n является контуром питания скважин.

Течение жидкости в слое происходит вследствие разности давлений на контурах питания L_n и на контурах скважин L_{ci} , $i=1,\ldots,n$. Пусть на этих контурах заданы давления. Тогда согласно [2-4], на контурах L_n и L_{ci} , $i=1,\ldots,n$ имеем:

$$p(M,t) = 0, M \in L_n, \tag{3}$$

$$p(M,t) = p_i(t), \qquad M = M_{ci} \in L_{ci}, \ i = 1,...,n,$$
 (4)

где $p_i(t)$, $i=1,\ldots,n$ —давление в какой-либо точке контура $i-\check{u}$ скважины в момент времени t .

Выберем в качестве контура питания L_n прямую линию, уравнение которой x=0. Применим к (2), согласно [2, 4], фильтрационную теорему о прямой. Функция давления (2), учитывая, что мощность отдельного стока равна q_i , а их число равно n примет вид:

$$p = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \left[\operatorname{Ei} \left(-\frac{r_i^2}{4t} \right) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{\widetilde{r}_i^2}{4t} \right) \right], \tag{5}$$

где $r_i = \sqrt{(x-x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2}$, $\widetilde{r_i} = \sqrt{(x+x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2}$, $i=1,\ldots,n$. Видно, что на контуре питания (x=0) $r_i = \widetilde{r_i}$, следовательно, условие (3) выполняется.

Определим дебиты скважин q_i . Удовлетворим (5) условиям (4). Имеем:

$$\begin{cases} p_{1}(t) = -\frac{1}{4\pi} q_{1} \left[\operatorname{Ei} \left(-\frac{R_{c1}^{2}}{4t} \right) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{\widetilde{r}_{c1}^{2}}{4t} \right) \right] \\ \vdots \\ p_{n}(t) = -\frac{1}{4\pi} q_{n} \left[\operatorname{Ei} \left(-\frac{R_{cn}^{2}}{4t} \right) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{\widetilde{r}_{cn}^{2}}{4t} \right) \right] \\ \Gamma \operatorname{DE} \widetilde{r}_{ci} = \sqrt{(x_{ci} + x_{0i})^{2} + (y_{ci} - y_{0i})^{2}}, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$
(6)

Система (6) состоит из n уравнений и имеет n неизвестных — q_i . Решая систему (6), находим неизвестные величины q_i , $i=1,\ldots,n$.

Выберем теперь в качестве контура питания окружность радиуса R_n . Функция давления (2), в случае эксцентричного по отношению к контуру питания расположения скважин, следуя [4] примет вид:

$$p = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \left[\text{Ei} \left(-\frac{r_i^2}{4t} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{R_n^4 - 2R_n^2 x x_{0i} - 2R_n^2 y y_{0i} + \left(x^2 + y^2 \right) R_{0i}^2}{4R_n^2 t} \right) \right], (7)$$

где
$$R_{0i} = \sqrt{x_{0i}^2 + y_{0i}^2}$$
.

Удовлетворяя (7) условиям (4) имеем систему:

$$\begin{cases}
p_{1}(t) = -\frac{1}{4\pi} q_{1} \left[\operatorname{Ei} \left(-\frac{R_{c1}^{2}}{4t} \right) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{R_{n}^{4} - 2R_{n}^{2} x_{c1} x_{01} - 2R_{n}^{2} y_{c1} y_{01} + \left(x_{c1}^{2} + y_{c1}^{2} \right) R_{01}^{2} \right) \right] \\
\vdots \\
p_{n}(t) = -\frac{1}{4\pi} q_{n} \left[\operatorname{Ei} \left(-\frac{R_{cn}^{2}}{4t} \right) - \operatorname{Ei} \left(-\frac{R_{n}^{4} - 2R_{n}^{2} x_{cn} x_{0n} - 2R_{n}^{2} y_{cn} y_{0n} + \left(x_{cn}^{2} + y_{cn}^{2} \right) R_{0n}^{2} \right) \right].
\end{cases} (8)$$

Решая систему (8), определим дебиты q_i , i = 1, ..., n.

Рассмотрим зависимость дебита скважины от формы контура питания при различных значениях параметра t. На рис. представлена зависимость величины η от времени. Здесь q_{np} — дебит скважины в случае прямолинейного контура питания, $q_{o\kappa p}$ — дебит в случае кругового контура питания. Пусть радиус кругового контура питания равен R_{nuu} , скважина расположена в центре кругового пласта. Тогда, для прямолинейного контура питания (x=0), расстояние от скважины до контура питания необходимо выбрать $x_0 = R_{nuu}$. При расчёте принято: $x_0 = R_{num} = 10l_0$, $x_c = x_0 + R_c$, $y_c = y_0$, $R_{ci} = 0.01l_0$, p(t) = 1.

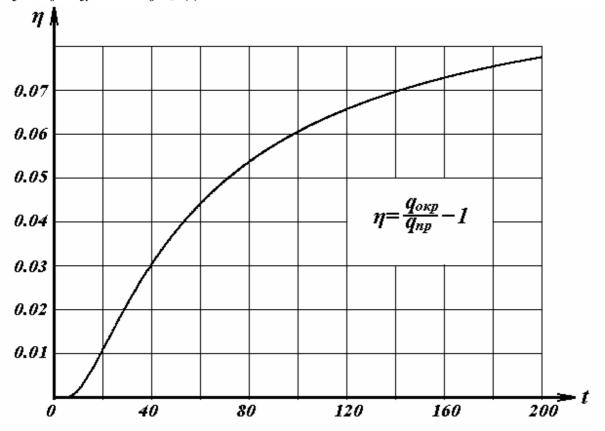


Рис. Зависимость дебита скважины от формы контура питания.

Как показывает зависимость $\eta(t)$ на рис., при малых значениях параметра времени t форма контура питания влияет на дебит слабо. В интервале 0 < t < 10, различие в дебитах $q_{o\kappa p}$ и q_{np} составляет десятые доли процента, а при $t \approx 50$, не превышает 4.5%. При $t \to \infty$, величина η стремится к соответствующему значению установившейся фильтрации [5].

Как видим, упругий характер течения сказывается лишь на первоначальном этапе. При $t \to \infty$ рассмотренные нами характеристики (дебиты, давления) стремятся к соответствующим характеристикам стационарного режима [1, 3-5].

Проведённые исследования показывают, что формулы для стационарной фильтрации несжимаемой жидкости [1, 3-5], могут быть оценочными для упругого режима, вместо более сложных формул упругого режима. Рассмотренные задачи плоскопараллельной фильтрации могут выступать в качестве тестовых, при дальнейшей разработке метода интегральных уравнений для уравнений параболического типа.

Литература

- 1. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Канд. дисс. Орел: Орловский госуниверситет, 2000, 153 с.
- 2. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
- 3. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дисс. Орёл, Орловский гос. ун–т, 1998, 266 с.
- 4. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1967.444 с.
- 5. Фролов М.А. Исследование двумерных граничных задач о дебитах системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Канд. дисс. Орел.: Орловский госуниверситет, 2001, 148 с.
- 6. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, М., 1963, 396 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ¹

Д.Е. Шестерин

Россия, Орловский государственный университет

Приведены основные уравнения, описывающие течение жидкостей в кусочно-анизотропном грунте. Исследована задача о работе водозабора вблизи бассейна свободной жидкости в анизотропном грунте с прямолинейной границей.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-96433).

Стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемой анизотропной пористой среде характеризуется давлением p (или квазипотенциалом скорости φ) и скоростью фильтрации \vec{v} , которые определяются законом Дарси и уравнением неразрывности [1]:

$$\vec{v} = K\nabla \varphi \qquad \left(\varphi = -\frac{p + \rho gz}{\mu}\right),$$

$$\nabla \vec{v} = 0.$$

Здесь ∇ - оператор Гамильтона, μ и ρ - вязкость и плотность жидкости, z - координата, отсчитываемая по вертикали вверх, K - симметричный тензор второго ранга, характеризующий проницаемость грунта.

Двумерную фильтрацию в тонком слое описывают уравнения [3]

$$v_{\xi} = k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$v_{\eta} = k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$
(1)

где ξ , η - декартовы координаты в плоскости основания слоя, $k_{12}=k_{21}$ т.к. тензор K симметричный, H - толщина слоя. Перейдем в плоскости (ξ) к главным направлениям анизотропии p и q которые представляют собой в общем случае ортогональную криволинейную сеть плоскости (ξ) . Динамический процесс в плоскости (ξ) описывается уравнениями в координатах p и q, которые характеризуют главные направления анизотропии:

$$\begin{aligned} v_p &= K_p \frac{\partial \varphi}{\sqrt{E} \partial p}, \\ v_q &= K_q \frac{\partial \varphi}{\sqrt{G} \partial q}, \end{aligned} \tag{2}$$

где v_p , v_q - составляющие вектора \vec{v} вдоль направлений p и q, K_q , K_p - коэффициенты, характеризующие среду вдоль главных направлений анизотропии, E, G - коэффициенты Ламе, которые связаны с квадратом элемента дуги плоскости (ξ) формулами:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^{2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)^{2}}, \quad G = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^{2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)^{2}}$$
$$dS^{2} = Edp^{2} + Gdq^{2}$$

Запишем уравнения (2) в каноническом виде, для чего воспользуемся заменой переменных p и q на x, y, которые связаны уравнениями Бельтрами:

$$\sqrt{\frac{K_p}{K_q}} \frac{G}{E} \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial q}, \qquad \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} \frac{E}{G} \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial p} \quad . \tag{3}$$

Заметим, что частные решения уравнений (3) связаны конформным преобразованием. Выбирая одно из этих решений в качестве новых координат запишем (2) в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4}$$

где $P = H\sqrt{K_p K_q}$.(H - толщина слоя).

Рассмотрим частный случай. Пусть сеть p,q изотермическая, E=G=C т.е.

$$dS^2 = C^2 \Big(dp^2 + dq^2 \Big).$$

 $K_p,\ K_q$ - константы, слой имеет постоянную толщину H =1. В этом случае уравнения (2) примут вид:

$$Cv_p = K_p \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad Cv_q = k_q \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -\frac{\partial \psi}{\partial p}.$$
 (2')

Решения уравнений (3) в этом случае имеют вид:

$$x = \sqrt{\frac{k_q}{k_p}}p, \quad y = q.$$

Вводя обозначения

$$v_x = C \frac{v_p}{\sqrt{k_p k_q}}, \quad v_y = C \frac{v_q}{k_q}, \quad \Phi = \varphi, \quad \Psi = \frac{\psi}{\sqrt{k_q k_p}},$$

запишем уравнения (4) в виде:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$
 (5)

Продвижение границы раздела «разноцветных» жидкостей (жидкостей, не отличающихся физическими характеристиками) описывается уравнением

$$\vec{v} = m \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

где m - пористость. В безразмерных величинах это уравнение принимает вид:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

Положение границы «разноцветных» жидкостей Γ_t будем задавать параметрически

$$p = p(t, S), \quad q = q(t, S) \tag{6}$$

где S - параметр. В начальный момент времени положение границы считаем известным:

при
$$t = 0$$
, $p_0 = p(0, S)$, $q_0 = q(0, S)$. (7)

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид:

$$\frac{\sqrt{E}dp}{dt} = v_p(p,q), \quad \frac{\sqrt{G}dq}{dt} = v_q(p,q). \tag{8}$$

Или, в случае изотермической сети координат $p, q, dS^2 = C^2(dp^2 + dq^2)$

$$\frac{Cdp}{dt} = v_p(p,q), \quad \frac{Cdq}{dt} = v_q(p,q) \tag{8'}$$

Таким образом, для нахождения положения границы Γ_t в любой момент времени t>0 следует интегрировать уравнения (8') при начальных условиях (7).

Пусть главные направления анизотропии совпадают с декартовыми осями координат x и y. Выберем в качестве координат p, q координаты x, y. Ось Oy делит область фильтрации на две подобласти D_1 (x>0) и D_2 . В области D_1 (x>0) свойства среды характеризуют постоянные коэффициенты k_x и k_y , течение описывает квазипотенциал φ . В области D_2 (x<0) находится свободная жидкость. Тогда на прямой Oy для квазипотенциала φ выполняется следующее условие:

$$\varphi|_{y=0} = const$$
.

Полагаем, что течение в безграничной среде с коэффициентами k_x и k_y описывает квазипотенциал φ_0 , особые точки которого лежат в правой полуплоскости (в области D_1 , x>0). Тогда согласно [2] в области D_1 течение опишет квазипотенциал

$$\varphi = \varphi_0 \left(\sqrt{\frac{k_y}{k_x}} x, y \right) - \varphi_0 \left(-\sqrt{\frac{k_y}{k_x}} x, y \right). \tag{9}$$

Пусть в области D_1 находится источник «загрязнения», который моделируем точечным источником дебита Q, расположенным в точке x_0 на оси Ox.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$$
 (10)

В начальный момент времени граница загрязнения находится на контуре скважины.

Определим время T, за которое «загрязнение», нагнетаемое скважиной, достигнет бассейна свободной жидкости:

$$T = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{v_x} \,. \tag{11}$$

Здесь v_x - проекция скорости течения на ось Ox, найденная с помощью первой из формул (5). Подставляя (10), (9) в (5) и используя формулу (11) получим

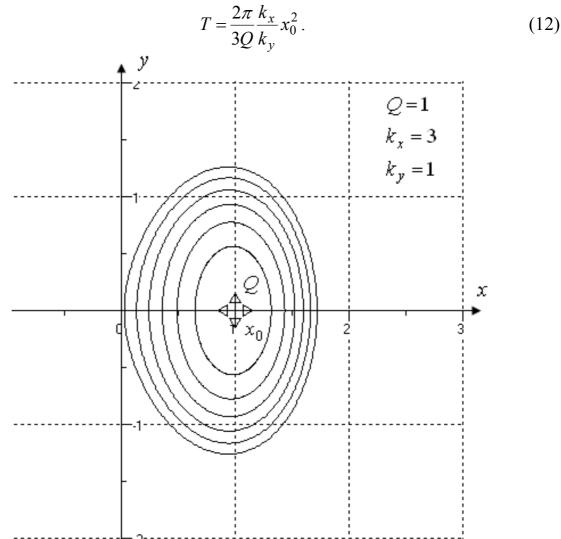


Рис. Эволюция границы «загрязнения» в анизотропной среде вблизи бассейна свободной жидкости. Границы построены через единицу характерного времени.

Литература

- 1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М:. Высшая школа. 1971.
- 2. Пивень В.Ф. О фильтрации в неоднородной анизотропной среде // Движение растворимых примесей в фильтрационных потоках, Тула, 1984. С. 44-49.
- 3. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники. М:. Высшая школа. 1983.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксюхин А.А.	6	Федяев Ю.С.	13
Апаринов А.А.	13	Фомченков В.В.	62
Богомолов Д.В.	17	Фролов М.А.	139
Гахов А.В.	23	Шестерин Д.Е.	14
Голубев Г.В.	30	Шпилевой А.Я.	11
Гуляев В.В.	40		
Деткова Ю.В.	86		
Духопельников С.В.	45, 50		
Еременко С.М.	56		
Желанников А.И.	56		
Зайцев А.А.	62		
Икрянников Е.Д.	40		
Квасов А.А.	67		
Марков О.И.	70		
Мищенко В.О.	73		
Московских А.С.	81		
Некраха С.И.	56		
Никольский Д.Н.	86, 89		
Никольская Т.А.	89		
Пивень В.Ф.	5, 93		
Плиева Л.Ю.	102		
Рачинская А.Л.	106		
Севостьянова Н.В.	111		
Смелтер Ю.В.	40		
Снижко Н.В.	115		
Ставцев С.Л.	120, 125		

Научное издание

ТРУДЫ

Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» Выпуск 4

Посвящается 75-летию Орловского государственного университета

Компьютерная верстка – А.А. Аксюхин

Подписано в печать 22.11.2005 г. Формат 60х84 1/6 Усл. печ. л. 10. Заказ № 1712 от 22.11.2005 г. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО ПФ «Картуш» 302020, г. Орел, ул. Матросова, 5. Тел. 41-65-94