

Орловский государственный университет

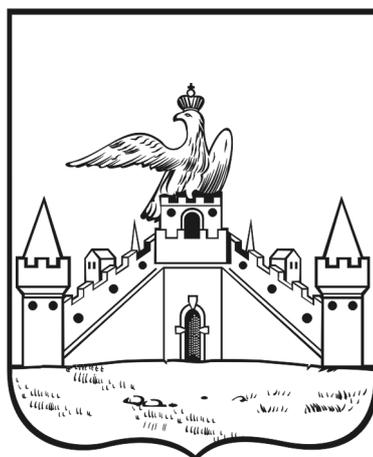
Харьковский национальный  
университет им. В.Н. Каразина

Институт вычислительной математики РАН

Военно-воздушная инженерная академия  
им. проф. Н.Е. Жуковского

**Т Р У Д Ы**  
**МЕЖДУНАРОДНЫХ**  
**ШКОЛ-СЕМИНАРОВ**  
**«МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ**  
**ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

**Выпуск 5**



Орёл • 2007

УДК 511.11+517.5 +517.9 + 519.6 +519.634 + 532.546 + 621.362.1 + 629.735.015

Печатается по решению организационного комитета Международных школ-семинаров молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

### **Организационный комитет**

профессор Лифанов И.К. (Россия) – почётный председатель  
профессор Гандель Ю.В. (Украина) – сопредседатель  
профессор Пивень В.Ф. (Россия) – сопредседатель  
профессор Сетуха А.В. (Россия)  
доцент Мищенко В.О. (Украина)  
доцент Никольский Д.Н. (Россия)  
доцент Федяев Ю.С. (Россия) – учёный секретарь

### **Редакционная коллегия**

профессор Пивень В.Ф. – ответственный редактор  
профессор Гандель Ю.В.  
профессор Сетуха А.В.  
доцент Федяев Ю.С. – учёный секретарь

Труды Международных школ-семинаров «**Методы дискретных особенностей в задачах математической физики**». Выпуск 5. – Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2007. – 128 с.

В сборнике представлены статьи участников Международных школ-семинаров молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школ-семинаров. Школы-семинары «МДОЗМФ» проводятся с 2000 года.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем теории фильтрации, аэро- и гидродинамики, теплопроводности, электродинамики и других областей механики и физики, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, численных методов и других методов математической физики

Компьютерная вёрстка Федяев Ю.С.

Сборник трудов Международных школ-семинаров «МДОЗМФ» издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-96303) и Федерального агентства по образованию.

© Оргкомитет Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», 2007 г.  
© Авторы статей, 2007 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Аксютин А.А.	Численное решение двумерной задачи о дебите скважины в неоднородных степенных слоях .....	5
2. Булыгин В.С.	Третья краевая задача теории дифракции на плоском экране и дискретная математическая модель для кругового диска .....	12
3. Ганиев Ш.Ф., Гуляев В.В.	Балансировка поврежденного самолета с минимизацией сопротивления.....	17
4. Гладышев Ю.А.	О построении и свойствах степеней поли- комплексного переменного .....	22
5. Гладышев Ю.А., Гинзгеймер С.А., Голубева М.С.	Обобщение теоремы о прямой для случая процесса теплопередачи в системе контакти- рующих оболочек .....	25
6. Голубев Г.В.	Применение дискретных особенностей для определения коэффициента проницаемости в трещиновато-пористой среде.....	29
7. Гром А.С., Еременко С.М.	Исследование аэродинамических характери- стик прямоугольного крыла вблизи поверх- ности раздела сред.....	34
8. Гром А.С., Еременко С.М.	Исследование аэродинамических характери- стик стреловидных крыльев вблизи поверх- ности раздела сред.....	38
9. Гуляев В.В., Джаскбаев В.А.	Об учете влияния ускорения на аэродинами- ческие характеристики тел .....	43
10. Духопельников С.В.	Метод дискретных особенностей в аксиаль- но-симметричных волноведущих структурах с диэлектрическими вставками.....	48
11. Иванисова О.В.	Вращательные колебания пластинки под свободной поверхностью весомой жидкости .....	53
12. Квасов А.А.	Плоскопараллельная задача о работе водоза- бора в поступательном потоке с источником загрязнения.....	58

13. <i>Липован П.С.</i>	Методика решения задачи о колебательном движении профиля в ограниченном сжимаемом потоке .....	62
14. <i>Марков О.И.</i>	Математическое моделирование предельных возможностей низкотемпературного охлаждающего термоэлемента .....	66
15. <i>Никольская Т.А.</i>	Эволюция границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном грунте .....	70
16. <i>Никольский Д.Н.</i>	Фильтрационное течение от источника на окружности или прямой .....	75
17. <i>Никольский Д.Н., Деткова Ю.В.</i>	Математическое моделирование источника на непроницаемой границе методом дискретных вихревых пар .....	78
18. <i>Ноздрина Е.В.</i>	Распространение загрязнения от источника к водозабору в анизотропном грунте .....	81
19. <i>Ноздрина Л.Г.</i>	Исследование работы водозабора при наличии источника загрязнения и поступательного потока грунтовых вод в анизотропном грунте .....	86
20. <i>Пивень В.Ф.</i>	Решение граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды .....	91
21. <i>Федяев Ю.С.</i>	Первый интеграл движения границы раздела жидкостей в неоднородном грунте .....	101
22. <i>Ходотова М.И.</i>	Разностные уравнения в задаче с косой производной для оператора Лапласа в плоском угле .....	109
23. <i>Шестерин Д.Е.</i>	Математическое моделирование продвижения границы раздела разноцветных жидкостей в анизотропно-однородном грунте от источника вблизи бассейна жидкости в присутствии поступательного потока .....	114
24. <i>Шпилевой А.Я., Зайцев А.А., Шелудкевич Е.Ю.</i>	Построение фильтрационных течений в области, ограниченной сторонами угла .....	119
Авторский указатель .....		124

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СТЕПЕННЫХ СЛОЯХ<sup>1</sup>

А.А. Аксюхин

Россия, Орловский государственный институт  
искусства и культуры, e-mail: aksjuhin@au.ru

Предлагается новый метод численного решения двумерных задач фильтрации жидкости в неоднородных слоях грунта, проводимость которых моделируется степенной функцией с произвольным показателем. Задача о дебите скважины, работающей в таких слоях, сводится к серии простых – плоскопараллельных задач сопряжения и решается численно на основе метода дискретных особенностей.

1. В работах [1]-[2] дана общая постановка двумерной задачи о работе совершенной эксплуатационной скважины в неоднородном тонком слое проводимости  $P(M) = K(M) \cdot H(M)$  (здесь  $K(M)$  и  $H(M)$  - проницаемость и толщина слоя в точке  $M(x, y)$  среды с плоским основанием при напорной стационарной фильтрации к ней несжимаемой жидкости. Там же исследованы задачи о дебите скважины в слоях с законом проводимости  $P(M) = y^s$ , где  $s \in \mathfrak{R}$ . Получить точное аналитическое решение такой задачи удаётся лишь в очень частных случаях для чётных значений показателя  $s$  и для канонических форм границ сопряжения и области питания (прямая, окружность, полуокружность). Разработанные численные методы решения подобных задач [2] также ограничены числом известных фундаментальных решений основных уравнений фильтрации в слоях с конкретными видами законов проводимости  $P(M)$ . Расширить класс решённых задач можно путём сведения двумерных задач фильтрации к системе плоскопараллельных задач сопряжения течений, как это уже было предпринято в работах [3]-[4].

Пусть в основании плоскости слоя выбрана декартова система координат  $xOy$  так, что функция проводимости слоя  $P(M)$  меняется только с одной координатой  $P(M) = y_M^s$ . Считая толщину слоя постоянной  $H(M) \equiv 1$ , будем моделировать проницаемость среды  $K(y_M)$  параллельными полосами постоянной проницаемости  $K(y_\nu) = y_\nu^s$ ,  $s \in \mathfrak{R}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m+1$ , здесь  $m$  - число границ сопряжения между полосами. Причём, в каждой такой полосе значение проницаемости среды выбирается на средней линии этой полосы (см. рис. 1).

Пусть потенциал скорости течения, описывающий движение жидкости к скважине, в каждой из полос (область  $D_\nu$ ) равен  $\varphi_\nu(M)$ . Функция  $\varphi_\nu(M)$  удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $D_\nu$ :

$$\Delta \varphi_\nu(M) = 0, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m+1. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

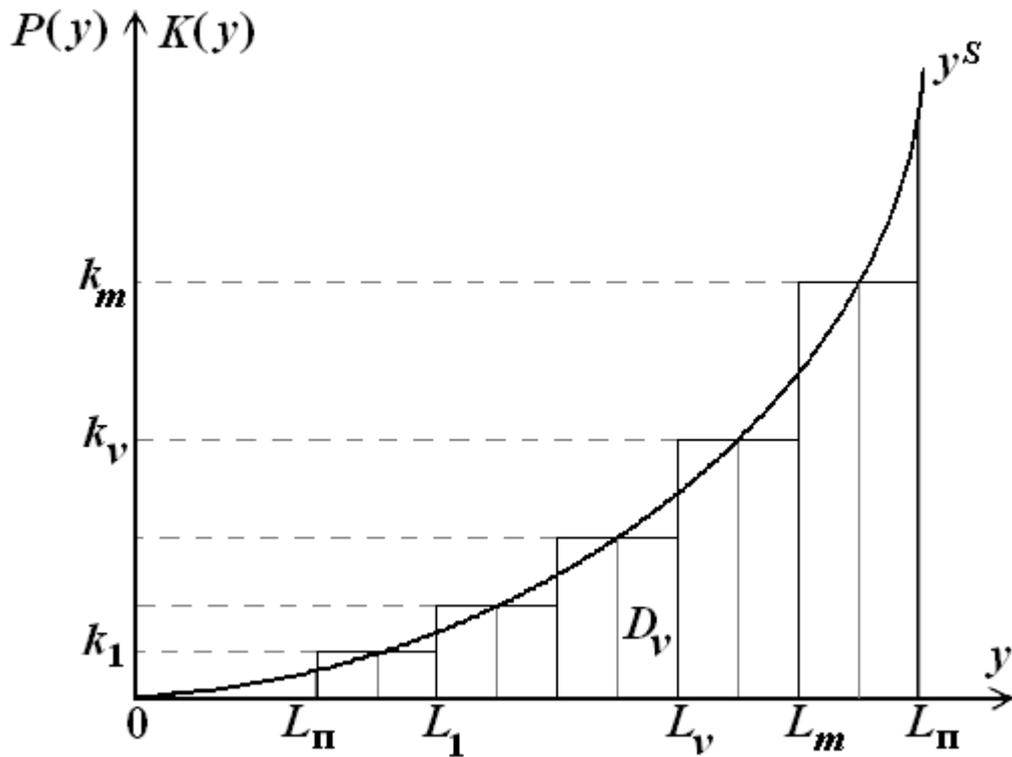


Рис. 1. Моделирование закона проницаемости слоя  $K(y_M) = y^s$

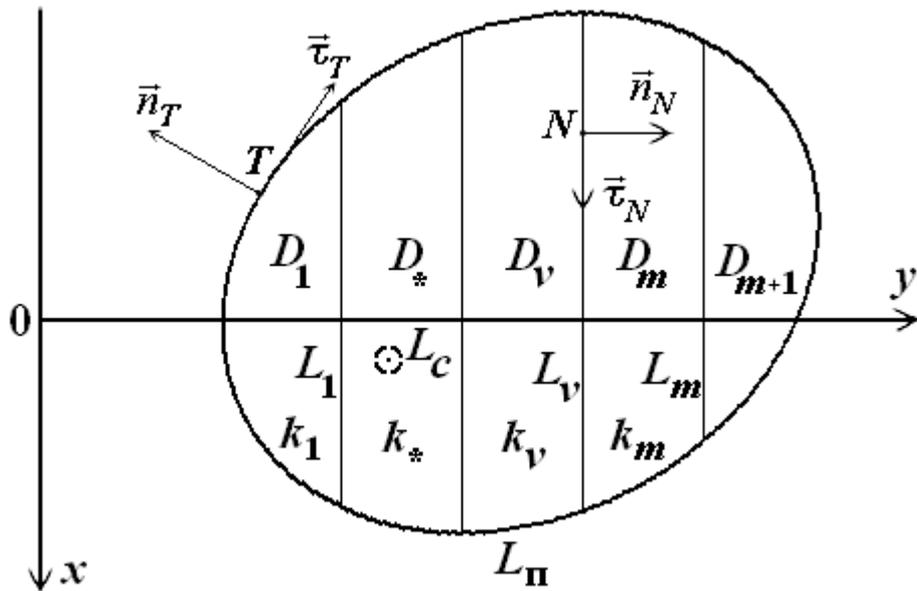


Рис. 2. Положение границ сопряжения  $L_v$ , контура питания  $L_{II}$  и контура скважины  $L_c$  в плоскости основания слоя  $xOy$

На каждой из границ сопряжения  $L_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, m$ , разделяющих две полосы с номерами  $v$  и  $v+1$  (см. рис. 1-2), потенциалы течений  $\varphi_v(M)$  будут удовлетворять условиям сопряжения:

$$\varphi_v^-(M) = \varphi_{v+1}^+(M), \quad M \in L_v, \quad v = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$k_v \left( \frac{\partial \varphi_v(M)}{\partial n_M} \right)^- = k_{v+1} \left( \frac{\partial \varphi_{v+1}(M)}{\partial n_M} \right)^+, \quad M \in L_v, \quad v = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где знаками «+» и «-» обозначены предельные значения соответствующих функций при подходе к границе  $L_\nu$  со стороны орта нормали  $\vec{n}_M$  (и с противоположной стороны) в точке  $M$  границы. Здесь и далее будем считать, что орт нормали  $\vec{n}_M$  направлен в область  $D_{\nu+1}$ .

На границе области питания скважины  $L_\Pi$  (см. рис. 1-2) для потенциалов  $\varphi_\nu(M)$  выполняются условия:

$$k_\nu \varphi_\nu^-(M) = 0, \quad M \in L_\Pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, m+1. \quad (4)$$

Знак «-» означает, что приближение к границе  $L_\Pi$  осуществляется со стороны, противоположной положительной нормали к ней. Контур питания  $L_\Pi$  будем моделировать гладкой (либо – кусочно-гладкой) замкнутой кривой класса Ляпунова, ограничивающей всю область питания.

На контуре скважины  $L_C$ , который будем моделировать окружностью малого по сравнению с размерами области фильтрации радиуса  $R_C$  (см. рис. 2), выполняется условие постоянства давления:

$$k_* \varphi_*(M_C) = C, \quad M_C \in L_C, \quad L_C \subset D_*, \quad C = const, \quad (5)$$

где  $D_*$  - область той полосы проницаемостью  $k_*$ , в которой целиком расположен контур скважины  $L_C$ ,  $M_C$  - точка контура скважины.

Известно, что в отсутствии границ сопряжения  $L_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  и контура питания  $L_\Pi$  в среде, проницаемостью  $k = 1$ , течение к скважине описывает потенциал скорости  $\varphi_0(M)$ , удовлетворяющий уравнению (1). Функция  $\varphi_0(M)$  содержит в качестве множителя  $q$  - искомый дебит скважины.

2. Решение поставленной задачи (1)-(5) будем искать в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{\varphi_0(M) + \Phi(M)}{k_\nu}, \quad M \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m+1, \quad (6)$$

где  $\Phi(M)$  - потенциал возмущения, вызванный наличием границ  $L_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  и  $L_\Pi$ . Этот потенциал будем моделировать в виде потенциалов двойного слоя, распределённых с плотностями  $g_\nu(N)$  по границам  $L_\nu$  и с плотностью  $f(T)$  вдоль границы  $L_\Pi$ :

$$\Phi(M) = \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\ell_N + \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial F(M, T)}{\partial n_T} d\ell_{\Pi T}, \quad (7)$$

$$N \in L_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad T \in L_\Pi, \quad M \in D_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, m+1.$$

В формуле (7)  $\vec{n}_N$  и  $\vec{n}_T$  - векторы положительных нормалей к границе  $L_\nu$  в точке  $N \in L_\nu$  и к границе  $L_\Pi$  в точке  $T \in L_\Pi$  соответственно;  $F(M, N)$  и  $F(M, T)$  - фундаментальные решения уравнения (1). По аналогии со свойствами потенциалов двойного слоя, представленных в работе [5], предельные значения функции (7) и её нормальных производных на границах  $L_\nu$  и  $L_\Pi$  принимают вид:

$$\Phi^\pm(M) = \pm \frac{g_\mu(M)}{2} + \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\ell_N + \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial F(M, T)}{\partial n_T} d\ell_{\Pi T}, \quad (8)$$

$$M \in L_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, m.$$

$$\left( \frac{\partial \Phi(M)}{\partial n_M} \right)^\pm = \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial^2 F(M, N)}{\partial n_N \partial n_M} d\ell_N + \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial^2 F(M, T)}{\partial n_T \partial n_M} d\ell_{\Pi T}, \quad (9)$$

$$M \in L_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, m.$$

$$\Phi^-(M) = -\frac{f(M)}{2} + \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\ell_N + \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial F(M, T)}{\partial n_T} d\ell_{\Pi T}, \quad (10)$$

$$M \in L_\Pi.$$

Благодаря свойствам функции  $\Phi(M)$  (8) и (9), равенство (3) тождественно выполняется, а выражение (4) приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$g_\mu(M) + 2\lambda_\mu \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\ell_N + 2\lambda_\mu \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial F(M, T)}{\partial n_T} d\ell_{\Pi T} = \quad (11)$$

$$= -2\lambda_\mu \varphi_0(M), \quad M \in L_\mu, \quad N \in L_\nu, \quad T \in L_\Pi, \quad \lambda_\mu = \frac{k_\mu - k_{\mu+1}}{k_\mu + k_{\mu+1}}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Условие (4) с учётом свойства (10) приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\varphi_0(M) + \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\ell_N + \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial F(M, T)}{\partial n_T} d\ell_{\Pi T} - \frac{f(M)}{2} = 0, \quad (12)$$

$$M \in L_\Pi, \quad N \in L_\nu, \quad T \in L_\Pi.$$

Условие (5) приводит к интегральному соотношению следующего вида:

$$\varphi_0(M_C) + \sum_{\nu=1}^m \int_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M_C, N)}{\partial n_N} d\ell_N + \int_{L_\Pi} f(T) \frac{\partial F(M_C, T)}{\partial n_T} d\ell_{\Pi T} = C, \quad (13)$$

$$M_C \in L_C, \quad L_C \subset D^*.$$

Совместное решение системы интегральных уравнений (11)-(12) и интегрального соотношения (13) позволяет найти плотности потенциала возмущения  $g_\mu(N)$ ,  $f(T)$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m$ , искомые потенциалы течений  $\varphi_\nu(M)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m+1$  и дебит скважины  $q$ .

**3.** Систему интегральных уравнений и соотношения (11)-(13) решим численно, используя метод дискретных особенностей [5]. А именно, зададим кривые  $L_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  и  $L_\Pi$  параметрически, запишем выражения (11)-(13) в параметрическом виде, разобьём кривые  $L_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  и  $L_\Pi$  по параметрам на множество дискретных точек и, заменяя непрерывные на гра-

ницах  $L_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m$  и  $L_\Pi$  подынтегральные функции совокупностью своих значений в этих точках, перейдём от интегральных выражений к системе алгебраических.

$$\left\{ \begin{array}{l} g_\mu(\sigma_{\mu j}) + 2\lambda_\mu \sum_{\nu=1}^m \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_\nu} g_\nu(\sigma_{\nu i}) \Omega(\sigma_{\mu j}, \sigma_{\nu i}) h_\nu + 2\lambda_\mu \sum_{\tau=1}^r f(t_\tau) \Omega(\sigma_{\mu j}, t_\tau) h_t = \\ = -2\lambda_\mu \varphi_0(\sigma_{\mu j}), \quad j = 1, 2, \dots, n_\nu, \quad \mu = 1, 2, \dots, m; \\ \varphi_0(t_\eta) + \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(\sigma_{\nu i}) \Omega(t_\eta, \sigma_{\nu i}) h_\nu + \sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \eta}}^r f(t_\tau) \Omega(t_\eta, t_\tau) h_t - \frac{f(t_\eta)}{2} = 0, \\ \eta = 1, 2, \dots, r; \\ \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(\sigma_{\nu i}) \Omega(M_C, \sigma_{\nu i}) h_\nu + \sum_{\tau=1}^r f(t_\tau) \Omega(M_C, t_\tau) h_t = C - \varphi_0(M_C). \end{array} \right. \quad (14)$$

В выражении (14) введены следующие обозначения:  $\sigma_\nu$  - параметр длины дуги кривой  $L_\nu$ ,  $h_\nu$  - шаг её разбиения по параметру,  $i$  и  $j$  - номера точек на  $L_\nu$ ,  $n_\nu$  - количество точек разбиения;  $t$  - параметр длины дуги кривой  $L_\Pi$ ,  $h_t$  - шаг её разбиения,  $\tau$  и  $\eta$  - номера точек на  $L_\Pi$ ,  $r$  - число точек разбиения кривой  $L_\Pi$ ;  $\Omega$  - дискретный аналог подынтегральной функции  $F$ .

Решив систему (14), найдём дебит скважины  $q$  и значение потенциала течения в точке  $M(x, y) \in D_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, m+1$  по формуле:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu} \left( \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(\sigma_{\nu i}) \Omega(x, y, \sigma_{\nu i}) h_\nu + \sum_{\tau=1}^r f(t_\tau) \Omega(x, y, t_\tau) + \varphi_0(x, y) \right). \quad (15)$$

Тогда скорость фильтрации в точке  $M(x, y) \in D_\nu$  может быть найдена согласно линейному закону Дарси [6] по формулам:

$$\begin{aligned} V_x(M) &= \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(\sigma_{\nu i}) \frac{\partial \Omega(x, y, \sigma_{\nu i})}{\partial x} h_\nu + \sum_{\tau=1}^r f(t_\tau) \frac{\partial \Omega(x, y, t_\tau)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0(x, y)}{\partial x}; \\ V_y(M) &= \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(\sigma_{\nu i}) \frac{\partial \Omega(x, y, \sigma_{\nu i})}{\partial y} h_\nu + \sum_{\tau=1}^r f(t_\tau) \frac{\partial \Omega(x, y, t_\tau)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16)$$

**4.** Пусть скважина радиусом  $R_C$  расположена в центре круговой области питания с контуром питания  $L_\Pi$  радиуса  $a$ . Пусть проводимость слоя  $P(M) = y_M^S$ ,  $s > 0$ . В частности, при  $s = 0$  получим слой постоянной толщины и проницаемости, в котором дебит скважины, согласно работам [2], [6], вычисляется по формуле Дюпюи:

$$q_0 = \frac{2\pi C}{\ln \frac{a}{R_C}}. \quad (17)$$

При численном решении системы (14) описанным методом выбирались следующие функции:

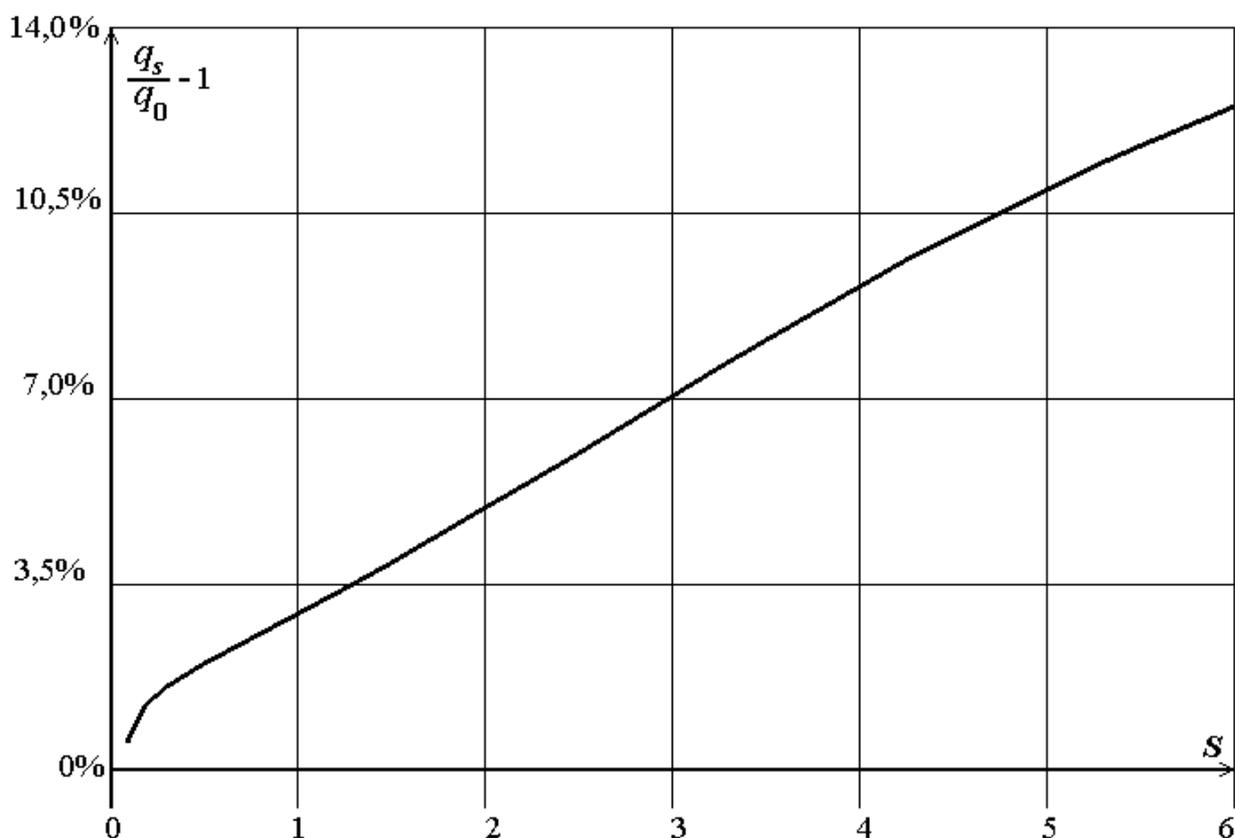
$$\varphi_0(M) = -\frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2},$$

$$F(M, N) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2},$$

где  $x_0, y_0$  - координаты центра скважины. Круглая область фильтрации была разбита 6-ю границами на 7 полос ширины  $2a/7$ . Коэффициент проницаемости в каждой полосе считался постоянным и равным  $k_\mu = y_\mu^s$ , где  $y_\mu$  - середина  $\mu$ -той полосы,  $\mu = 1, 2, \dots, 7$ . Так как границы сопряжения являлись прямыми линиями, то при вычислениях полагалось, что  $\frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\ell_N = \frac{\partial F(x_M, y_M; x_N, y_N)}{\partial y_N} dx_N$ , а в качестве параметра  $\sigma_\nu$  разбиения границы  $L_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, 6$  выбиралась координата  $x$ . Круглый контур питания  $L_\pi$  разбивался по параметру длины дуги аналогично работе [2]. Полученная система алгебраических уравнений (14) решалась методом Гаусса. Радиус контура питания  $a$  выбирался за единицу измерения длины, другие параметры задачи:  $R_C = 10^{-4} a$ ,  $M_0(0, 2a)$ ,  $C = 1$ ,  $h_\nu \approx 5 \cdot 10^{-3} a$ ,  $h_t \approx 6 \cdot 10^{-3} a$ .

Для дискретных значений показателя степени слоя  $s > 0$  многократно разрешалась система (14) и определялся дебит скважины  $q_s$ . Для сравнения значения вычисленного дебита  $q_s$  с дебитом  $q_0$ , полученным по формуле (17), исследуем поведение величины  $q_s/q_0 - 1$  с изменением показателя степени слоя  $s$ . График этой зависимости, полученный как линейный сплайн дискретных значений  $q_s$ , представлен на рис. 3. Из графика видно, что с ростом показателя степени слоя  $s$  возрастает и значение приведённого дебита скважины  $q_s$  в слое со степенным законом изменения проводимости.

Таким образом, построенная новая математическая модель численного решения двумерных фильтрационных задач сопряжения может быть применена к задачам фильтрации жидкости в неоднородных слоях грунта с широким многообразием законов проводимости, моделируемых непрерывными функциями одной координаты. Использование этой модели позволит рассчитать дебиты совершенных скважин, работающих в неоднородных пластах грунта сложной геологической структуры при наличии трещин и завесов слоя, исследовать новые задачи нефте- и газодобычи, орошения и осушения земель, практической экологии и мониторинга окружающей среды.



**Рис. 3.** График (линейные сплайны) зависимости численно найденного значения дебита скважины  $q_s$  от показателя степени слоя  $s$

### Литература

1. Аксютин А.А. Математическое моделирование двумерных задач о дебите системы скважин в неоднородных слоях // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей и аспирантов физико-математического факультета ОГУ. Выпуск 2. Орёл. ОГУ. 2002. С. 4-12.
2. Аксютин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Кандидатская диссертация. Орёл. ОГУ. 2000. 153 с.
3. Аксютин А.А. О новом численном методе решения двумерных фильтрационных задач о дебите скважины // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. Т. 2. - Орёл.: Издательство ОГУ, ПФ «Картуш», 2006. С. 9-13.
4. Аксютин А.А. Математическое моделирование двумерной фильтрации жидкости к скважине // Сборник трудов Всероссийской заочной научно-практической конференции «Актуальные проблемы обучения математике», посвященной 155-летию со дня рождения А.П. Киселёва. - Орёл.: Издательство ОГУ, 2007.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.
6. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа. 1972. 368 с.

## ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ КРУГОВОГО ДИСКА

В.С. Булыгин

Украина, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

**Задача дифракции акустической волны на плоском конечном экране с граничными условиями третьего рода сведена к двум парным интегральным уравнениям, решение которых эквивалентно решению двух интегральных уравнений: Фредгольма второго рода и гиперсингулярного. Приведены результаты численного эксперимента для кругового диска.**

Рассматривается задача дифракции акустической волны на плоском экране с условиями третьего рода в стационарном звуковом поле. Зависимость от времени задается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Экран – открытое множество  $\mathcal{E} \subset \{x \in R^3 \mid x_3 = 0\}$ . Задача сводится к нахождению комплексной амплитуды  $u(x)$  потенциала рассеянной волны, для которой имеем следующую внешнюю краевую задачу:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{\mathcal{E}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \alpha u(x) = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial n} - \alpha u_0(x) \quad , \quad x \in \mathcal{E}. \quad (2)$$

Здесь  $u_0(x)$  - комплексная амплитуда падающей волны,  $a$  - скорость звука в среде,  $\omega$ -круговая частота,  $\alpha - const$ ,  $n$  – единичная нормаль к экрану  $\mathcal{E}$ . На бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

в каждой конечной области  $\Omega$  пространства энергия поля конечна:

$$\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\text{grad } u(x)|^2) dx < \infty \quad , \quad \text{где } \Omega \subset R^3 / \bar{\mathcal{E}}. \quad (4)$$

Введем обозначения:  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ ,  $u^+(x) = u(x), x_3 > 0$ ;  $u^-(x) = u(x), x_3 < 0$  - сужения функции  $u(x)$  соответственно на верхнее и нижнее полупространства.

Будем искать их в виде:

$$u^{\pm}(\tilde{x}, x_3) = \int_{R^2} C^{\pm}(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x}) \mp \gamma(\lambda)x_3} d\lambda. \quad (5)$$

Здесь  $\gamma(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k^2}$ , а в соответствии с условием излучения ветвь радикала выбирается таким образом, чтобы  $\text{Re } \gamma(\lambda) \geq 0$ , а  $\text{Im } \gamma(\lambda) \leq 0$ .

Используя (2) выпишем граничные условия для функций  $u^+(x)$  и  $u^-(x)$ :

$$\alpha u^+(\tilde{x}, 0) + \frac{\partial u^+(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3} = -\alpha u_0(\tilde{x}, 0) - \frac{\partial u_0(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3} =: f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathcal{E}, \quad (2')$$

$$\alpha u^-(\tilde{x}, 0) - \frac{\partial u^-(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3} = -\alpha u_0(\tilde{x}, 0) + \frac{\partial u_0(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3} =: g(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathcal{E}. \quad (2'')$$

Вне экрана в плоскости  $x_3 = 0$  выполняются условия сопряжения:

$$u^+(\tilde{x}, 0) = u^-(\tilde{x}, 0), \quad \tilde{x} \notin \mathcal{E}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u^+(x)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \left. \frac{\partial u^-(x)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \quad \tilde{x} \notin \mathcal{E}. \quad (7)$$

Запишем условия (2') и (2''), используя представление (5):

$$\alpha \int_{R^2} C^+(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} - \int_{R^2} C^+(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f(\tilde{x}), \quad (8)$$

$$\alpha \int_{R^2} C^-(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda - \int_{R^2} C^-(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = g(\tilde{x}). \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$C_1(\lambda) = \gamma(\lambda)(C^-(\lambda) + C^+(\lambda)); \quad C_2(\lambda) = C^+(\lambda) - C^-(\lambda); \quad (10)$$

$$v(\tilde{x}) = \frac{\partial u^-(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3} - \frac{\partial u^+(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3}; \quad w(\tilde{x}) = u^+(\tilde{x}, 0) - u^-(\tilde{x}, 0). \quad (11)$$

Из граничных условий (8) и (9) с учетом обозначений (10) и (11) получим два парных интегральных уравнения:

Первое парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} \int_{R^2} C_1(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = 0, & \tilde{x} \notin \mathcal{E} \\ a \int_{R^2} \frac{1}{\gamma(\lambda)} C_1(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda + \int_{R^2} C_1(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Второе парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} \int_{R^2} C_2(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = 0, & \tilde{x} \notin \mathcal{E} \\ - \int_{R^2} \gamma(\lambda) C_2(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda + a \int_{R^2} C_2(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Используя тождества:

$$-\gamma(\lambda) = -|\lambda| + \frac{k^2}{2|\lambda|} + \frac{k^4}{2(\gamma(\lambda) + |\lambda|)^2 |\lambda|}; \quad \frac{1}{\gamma(\lambda)} = \frac{1}{|\lambda|} + \frac{k^2}{2(\gamma(\lambda) + |\lambda|)\gamma(\lambda) |\lambda|}$$

и тот факт[1], что  $-|\lambda|$  - символ псевдодифференциального оператора

$$(A\tilde{u})(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\tilde{u}(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|^3} d\xi$$

а  $\frac{1}{|\lambda|}$  - символ псевдодифференциального оператора

$$(A\tilde{u})(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\tilde{u}(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi$$

из первого и второго парных интегральных уравнений получаем два интегральных уравнения для неизвестных функций  $w(\tilde{x})$  и  $v(\tilde{x})$ :

уравнение Фредгольма второго рода:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{v(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi + \frac{\alpha k^2}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{D}} K_1(\xi - \tilde{x}) v(\xi) d\xi - v(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathfrak{D}. \quad (12)$$

и гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{w(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{w(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi + \frac{k^4}{8\pi^2} \int_{\mathfrak{D}} K_2(\xi - \tilde{x}) w(\xi) d\xi + \alpha w(\tilde{x}) = \\ & = f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathfrak{D} \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$K_1(\zeta) = \int_0^\infty \frac{2\pi |\zeta| J_0(t)}{(t + \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2}) \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2}} dt; \quad K_2(\zeta) = \int_0^\infty \frac{2\pi |\zeta| J_0(t)}{(t + \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2})^2} dt.$$

Потенциал  $u(x)$ ,  $x \in R^3$  выражается через решения уравнений (12) и (13).

Используя (10) и (11) находим:

$$C^\pm(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\gamma(\lambda)} \int_{R^2} v(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi \pm \int_{R^2} w(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi \right]. \quad (14)$$

Подставляя (14) в выражение (5) для  $u^\pm(x)$ ,  $x \in R^3$ , находим:

$$u^\pm(\tilde{x}, x_3) = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{\mathfrak{D}} Q_1(\xi - \tilde{x}, x_3) v(\xi) d\xi \pm \int_{\mathfrak{D}} Q_2(\xi - \tilde{x}, x_3) w(\xi) d\xi \right]. \quad (15)$$

Здесь  $Q_1(\zeta, x_3) = \frac{e^{ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2}}}{(|\zeta|^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ ;  $Q_2(\zeta, x_3) = \frac{e^{ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2}}}{(|\zeta|^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2}) x_3$ .

Из представления (15) для  $u(x)$  получим асимптотику для поля в дальней зоне:

$$u^\pm(x) \sim F^\pm(\theta, \varphi) \frac{e^{ik|x|}}{|x|},$$

Где  $F^\pm(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{D}} (-ik) e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} \cos \theta \cdot w(\xi) d\xi \pm$   
 $\pm \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{D}} e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} v(\xi) d\xi,$  (16)

$(\theta, \varphi)$  - точка на единичной сфере в сферической системе координат:

$$x_1 = r \cdot \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \cdot \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cdot \cos \theta$$

Действуя так, как предписывает МДВ (см. [1]), для построения дискретной математической модели заменяем экран  $\mathcal{E}$  системой замкнутых

вихревых рамок  $\mathcal{E} = \bigcup_{p=0}^{N-1} \sigma_p$ . Геометрический центр рамки  $\sigma_p$  обозначим  $x_p^0$ .

Ищем приближения функций  $v(\tilde{x})$  и  $w(\tilde{x})$  в виде кусочно-постоянных функций на экране  $\mathcal{E}$   $v_N(\tilde{x})$  и  $w_N(\tilde{x})$ , принимающих на ячейке  $\sigma_p$  значения  $v(x_p^0)$  и  $w(x_p^0)$  соответственно.

Далее рассматривается дискретная математическая модель уравнений (12), (13):

$$\sum_{q=0}^{N-1} w_N(x_q^0) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|} d\xi + \frac{k^4}{8\pi^2} \int_{\sigma_q} K_2(\xi - x_p^0) d\xi \right) + \alpha w_N(x_p^0) = f(x_p^0) - g(x_p^0), \quad p = 0..N-1 \quad (17)$$

$$\sum_{q=0}^{N-1} v_N(x_q^0) \left( \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{\alpha k^2}{4\pi^2} \int_{\sigma_q} K_1(\xi - x_p^0) d\xi \right) - v_N(x_p^0) = f(x_p^0) + g(x_p^0), \quad p = 0..N-1 \quad (18)$$

относительно неизвестных векторов  $v_N = \{v_N(x_p^0)\}_{p=0}^{N-1}$  и  $w_N = \{w_N(x_p^0)\}_{p=0}^{N-1}$ .

Через решения полученных СЛАУ выражаем приближенные значения искомого потенциала  $u_N^\pm$  в верхнем и нижнем полупространствах:

$$u_N^\pm(\tilde{x}, x_3) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} \left[ v_N(x_p^0) \int_{\sigma_p} Q_1(\xi - \tilde{x}, x_3) d\xi \pm w_N(x_p^0) \int_{\sigma_p} Q_2(\xi - \tilde{x}, x_3) d\xi \right] \quad (19)$$

и диаграммы направленности  $F_N^\pm$ :

$$F_N^\pm(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} v_N(x_p^0) \int_{\sigma_p} (-ik) e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} \cos \theta d\xi \pm \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} w_N(x_p^0) \int_{\sigma_p} e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} d\xi. \quad (20)$$

Был проведен численный эксперимент. Рассматриваемая задача решалась для идеально жесткого кругового диска  $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2) \leq 1, x_3 = 0\}$  в случае падающей плоской монохрома-

тической волны с комплексной амплитудой  $u_0 = e^{ikx_3}$  при различных значениях волнового числа  $k$ .

Квадрат  $\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1], x_3 = 0\}$  разбивается  $n \times n$  квадратов и за аппроксимацию круга принимается множество тех из них, которые целиком попали в круг  $\mathcal{E}$ . Далее решалось СЛАУ (17) и (18), после чего вычислялись приближенные значения диаграммы направленности по формуле (20) и приближенные значения потенциала по формуле (19).

Результаты сравнивались с данными [4], которые были получены с точностью  $10^{-4}$ . Некоторые из них представлены в табл.1 и табл. 2. Здесь в строке “точные результаты” - данные работы [4]; в строке “N=1933” – результаты численного эксперимента с 1933 расчетными точками на круге; “ $\Delta$ ” - модуль относительной погрешности.

**Табл. 1.** Поле в центре идеально жесткого кругового диска  $U(0,0,0+)$

k	1	2	3	4	5	6
Точные результаты	0.934 + 0.791i	-0.604 + 1.641i	-1.315 + 0.058i	-0.961 – 0.862i	0.358 – 1.566i	1.354 – 0.265i
N=1933	0.942 + 0.769i	-0.504 + 1.671i	-1.327 + 0.126i	-0.995 – 0.782i	0.159 – 1.569i	1.333 – 0.419i
$\Delta$	0.019	0.06	0.052	0.067	0.124	0.113

**Табл. 2.** Коэффициенты рассеяния  $\sigma = \frac{4}{k} \text{Im} \Phi(0)$

K	1	2	3	4	5	6
Точные результаты	0.0821	1.843	2.284	1.787	1.915	2.129
N=1933	0.0722	1.673	2.231	1.740	1.794	2.061
$\Delta$	0.121	0.092	0.023	0.036	0.063	0.032

### Литература

1. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. - М.: «Янус-К», 2001.- 508с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. – 735 с.
3. Антонец А.В., Гандель Ю.В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране. – Вісник Харківського національного університету. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління” №590, 2003. - С. 9-14
4. Ю. В. Гандель Интегральные уравнения некоторых аксиально симметричных задач математической теории дифракции волн. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Харьков – 1971. – 133 с.

# БАЛАНСИРОВКА ПОВРЕЖДЕННОГО САМОЛЕТА С МИНИМИЗАЦИЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ш.Ф. Ганиев, В.В. Гуляев

Россия, Военно-воздушная инженерная академия  
имени профессора Н.Е. Жуковского

В статье приводятся результаты некоторых исследований аэродинамических характеристик летательных аппаратов с боевыми повреждениями. Делается сопоставление экспериментальных данных с результатами расчетных исследований.

Обеспечение высокой безопасности полетов является одной из актуальных задач авиации. Перспективные боевые маневренные и учебно-тренировочные самолеты пятого поколения должны обладать системами адаптации к режимам полета и активного управления. Непростые задачи, связанные с разработкой математического и алгоритмического обеспечения функционирования таких систем, в настоящее время могут быть успешно решены благодаря успехам и широкому использованию методов вычислительной аэродинамики, в частности, метода дискретных вихрей, и математического моделирования процессов полета [1,2].

В настоящей статье рассматривается постановка и метод решения задачи адаптации и балансировки самолета при наличии боевого повреждения.

Задача расчета обтекания самолета, схематизированного набором тонких несущих поверхностей, установившимся дозвуковым потоком сжимаемого газа решается в рамках допущений и предположений, обычных для линейной теории.

В рамках сделанных предположений задача сводится к краевой относительно потенциала возмущенных скоростей  $\varphi$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad x_M = x, \quad y_M = yk, \quad z_M = zk, \quad k = \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_M^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_M^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_M^2} = 0$$

и граничным условиям:

– непротекания на поверхности самолета  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sum_j H_j(M_\infty, \vec{r}) q_j$ ;

– непрерывности давления на поверхности вихревой пелены

$$p_+ = p_-, \quad \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_+ = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_-;$$

– Чаплыгина-Жуковского на задних кромках несущих поверхностей;

– затухания возмущений на бесконечности.

$$\varphi(M) \rightarrow 0, \quad grad \varphi(M) \rightarrow 0, \quad r(M, S_M \cup \Sigma_M) \rightarrow \infty$$

Краевая задача сводится к совокупности интегральных уравнений относительно плотности двойного слоя, размещенного на схематизированной по-

верхности самолета.

$$\int_S g^{q_i} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + \int_L g^{q_i} dl \int_{\xi^*} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\xi = 4\pi H_{q_i}(\vec{r}_0), \quad r = |\vec{r}_0 - \vec{r}|.$$

Для численного решения интегральных уравнений используется метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками, позволяющий свести задачу к решению систем линейных алгебраических уравнений.

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_j W_{ij} + \sum_{j=1}^m \Gamma_j^* (W_{ij} + W_{ij}^p) = 4\pi H_{q_i}(\vec{r}_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

После решения соответствующих систем распределенные аэродинамические нагрузки определяются с помощью интеграла Коши-Лагранжа. Последующим интегрированием можно найти суммарные аэродинамические характеристики ЛА и его элементов.

При решении собственно задачи адаптации, которая формулируется в терминах теории оптимизации, предполагается, что аэродинамические характеристики известны и представлены в определенной форме [3,4]. В данном случае к этим характеристикам относятся производные аэродинамических коэффициентов сил и моментов по кинематическим параметрам:  $c_{ya}^{q_i}$ ,  $c_{za}^{q_i}$ ,  $m_x^{q_i}$ ,  $m_y^{q_i}$ ,  $m_z^{q_i}$ ,  $c_{xa}^{q_i q_j}$ . К числу кинематических параметров ( $q_j, j = \overline{1, n}$ ) относятся углы атаки и скольжения, а также углы отклонения органов управления и механизации.

Задача адаптации ставится как задача минимизации индуктивного сопротивления самолета с повреждением  $c_{xa \text{ инд}} = c_{xa \text{ инд}} \min$ , при наличии ряда дополнительных условий

$$c_{ya} = c_{ya}^*, \quad c_{za} = c_{za}^*, \quad M_x = M_y = M_z = 0, \quad \sum_{j=1}^n c_k^{q_j} q_j = f_k^*, \quad k = \overline{1, m}.$$

Для решения задачи вводится функция Лагранжа  $L$ .

$$c_{xa} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{xa}^{q_i q_j} q_i q_j, \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{xa}^{q_i q_j} q_i q_j + \sum_{k=1}^m \lambda_k \left( \sum_{j=1}^n c_k^{q_j} q_j - f_k^* \right)$$

Условия экстремума функции Лагранжа  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = \overline{1, n}$ , совместно с допол-

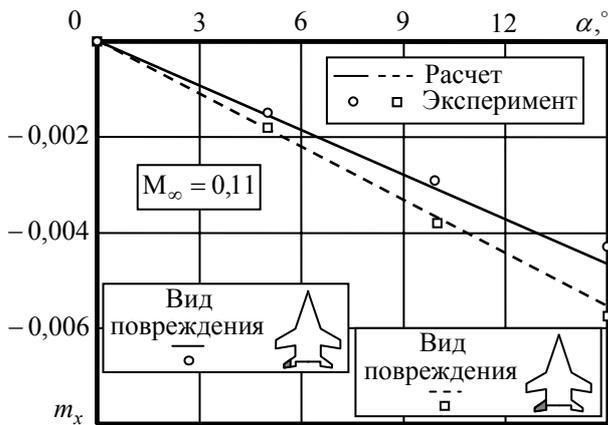
нительными условиями дадут систему линейных алгебраических уравнений. Решением этой системы являются искомые законы адаптации

$$q_i = \left( q_{i0}^{(1)} + m_z^{c_y} q_{i1}^{(1)} \right) c_{ya} + \left( q_{i0}^{(2)} + m_z^{c_y} q_{i1}^{(2)} \right) c_{za} + q_i^*,$$

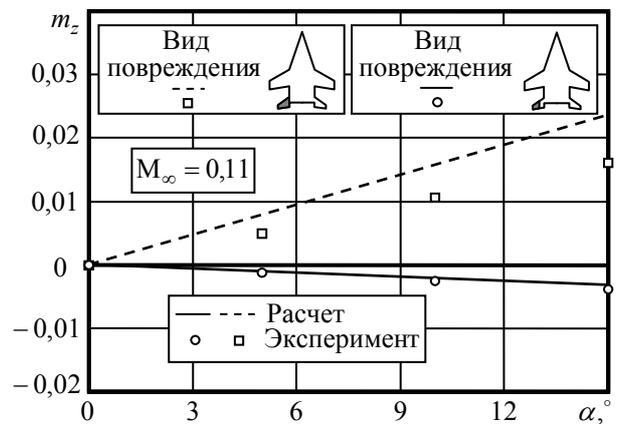
подстановка которых в формулу для индуктивного сопротивления позволяет получить уравнение адаптивной индуктивной поляры

$$c_{xa} = A^{(1)} c_{ya}^2 + A^{(2)} c_{za}^2 + 2A^{(3)} c_{ya} c_{za} + 2B^{(1)} c_{ya} + 2B^{(2)} c_{za} + C.$$

Результаты расчета по предложенной методике проверены на достоверность. Были проведены расчеты суммарных аэродинамических характеристик для различных самолетов с различными видами боевых повреждений. На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов и эксперимента для самолета Су-27 с повреждениями консоли стабилизатора. Эксперимент проводился в аэродинамической трубе малых дозвуковых скоростей Т-1 ВВИА имени проф. Н.Е.Жуковского в 1983 году В.В.Газаевым. На рис.1 показаны зависимость коэффициента момента крена по углу атаки, а на рис. 2 зависимость коэффициента момента тангажа по углу атаки для самолета с повреждениями консоли стабилизатора. На графиках хорошо согласуются опытные и расчетные данные.



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента момента крена по углу атаки



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента момента тангажа по углу атаки

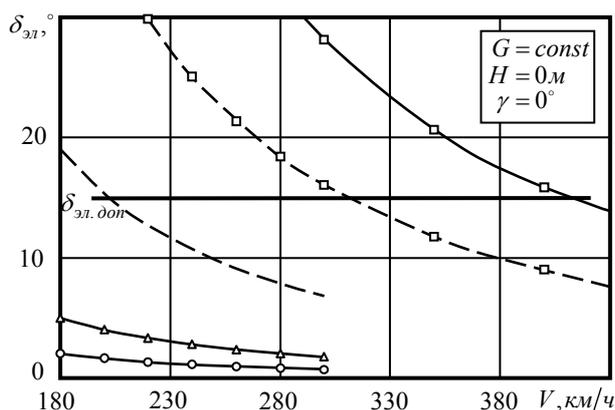
Были проведены исследования аэродинамических характеристик самолета Як-130 при различных повреждениях несущих поверхностей, рулевых органов и механизации крыла. Для компенсации появившихся вследствие получения боевого повреждения сил и моментов, координировано отклоняются имеющиеся рули и органы механизации по рациональному закону, в зависимости от характера повреждения и режима полета. Задача адаптации решается как задача минимизации индуктивного сопротивления при выполнении дополнительных условий: условия реализации заданных значений подъемной и боковой сил; условия балансировки в каналах крена, рысканья и тангажа и, возможно, некоторых других.

Рассматривалось два варианта способа балансировки и адаптации. В первом варианте, отклоняются руль направления, элероны и стабилизатор; во втором варианте, закрылки и стабилизатор в режиме «ножницы», руль направления, элероны и носки крыла. В процессе проведения исследований считалось, что самолет статически устойчив. Запас продольной статической устойчивости равен 5 % САХ, что соответствует центровке самолета  $\bar{x}_T = 0,24$ . Дополнительно предполагалось, что повреждения летательного аппарата на его центровку не влияют. Число  $M_\infty$  принято равным 0,4, вес самолета  $G = 6000$  кг. Высоты полета 0, 2000м, 4500м.

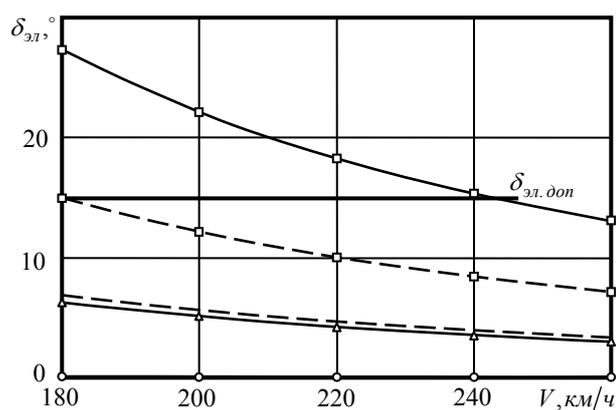
При этих условиях были рассчитаны углы отклонения рулей и органов механизации крыла, обеспечивающих балансировку самолета с различными повреждениями для указанных вариантов балансировки и адаптации. Расчеты проводились для самолета без повреждений и со следующими видами повреждений: без правого закрылка, без правой консоли стабилизатора, без концевой части правой консоли крыла с относительной площадью повреждения 2,7%, 5,4%, 8,4%. Были приняты обозначения:

—	ЛА без повреждений	
- - - -	без конц. ч. консоли крыла	$\bar{S}_n = 0,027$
- □ - -	без конц. ч. консоли крыла	$\bar{S}_n = 0,054$
- □ - -	без конц. ч. консоли крыла	$\bar{S}_n = 0,084$
○	без пр. консоли стабилизатора	
△	без правого закрылка	

На рис. 3 и 4 показаны зависимости угла отклонения элеронов от скорости для самолета с повреждениями для первого варианта балансировки и для второго варианта соответственно.



**Рис. 3.** Зависимость угла отклонения элеронов от скорости самолета



**Рис. 4.** Зависимость угла отклонения элеронов от скорости самолета

Из графиков видно, что с увеличением числа отклоняемых поверхностей, уменьшается предельно допустимая (по максимальному углу отклонения элеронов) скорость самолета, что позволяет летчику работать элеронами не на предельно допустимых углах, а с запасом для дальнейшего управления самолетом.

Проведено исследование зависимостей минимальных скоростей полета поврежденного самолета по различным высотам при двух способах балансировки самолета. На рис. 5 видим изменения скорости самолета с различными повреждениями по высоте полета от 0 до 4500м при первом варианте балансировки, где отклоняются руль направления, элероны (элерон или оставшаяся часть элерона) и стабилизатор. На рис. 6 построены зависимости  $K(c_{yк})$  с учетом принятых нами допущений, при различных повреждениях самолета при полете без крена, при втором варианте балансировки.

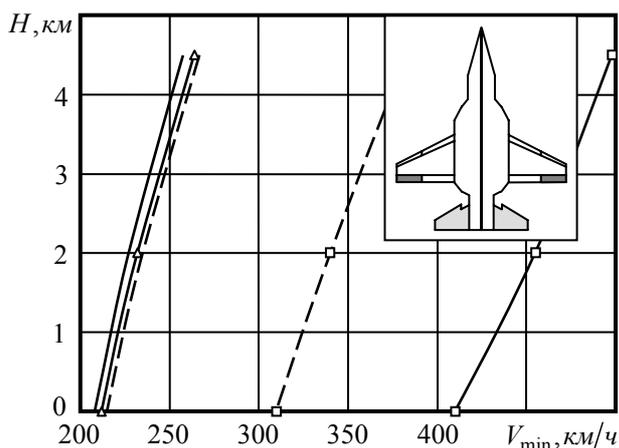


Рис. 5. Влияние высоты полета на  $V_{\min}$

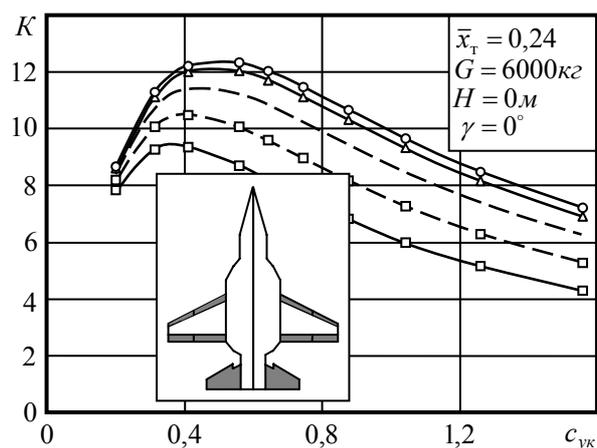


Рис. 6. Зависимость  $K$  от  $c_{ук}$

По результатам исследований можно сделать следующие выводы. Использование метода дискретных вихрей позволяет достоверно определять аэродинамические характеристики самолета с боевыми повреждениями в достаточно широком диапазоне режимов полета. В зависимости от места расположения повреждения несущих и рулевых поверхностей, большинство повреждений, с малой относительной площадью повреждения, не приводят к значительным изменениям аэродинамических сил, однако могут привести к существенным изменениям аэродинамических моментов. Сильные потери аэродинамического качества происходят при повреждениях большой площади. При таких повреждениях целесообразно осуществлять балансировку и адаптацию самолета большим количеством рулей, так как при этом минимальны потери аэродинамического качества и потребные для балансировки расходы рулей.

### Литература

1. Под ред. Белоцерковского С.М.. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: «Наука» 1975.
2. Ганиев Ф.И.. Метод расчета продольных, боковых и перекрестных аэродинамических производных летательного аппарата на дозвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ №2, 1978.
3. Под ред. Долженкова Н.Н. и Подобедова В.А.. Особенности проектирования легких боевых и учебно-тренировочных самолетов. М.: Машиностроение, 2005.
4. Ганиев Ш.Ф., Гуляев В.В., Смелтер Ю.В.. Метод синтеза законов адаптации самолета к режимам установившегося полета с дозвуковой скоростью. НММ, ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 2005.

## О ПОСТРОЕНИИ И СВОЙСТВАХ СТЕПЕНЕЙ ПОЛИКОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Ю.А. Гладышев

Россия, Калужский государственный педагогический университет  
имени К.Э. Циолоковского

В работе построена последовательность мультипольных решений с полюсом в бесконечности для классов линейных дифференциальных уравнений любого порядка, которая является базисом для решения основных краевых задач. Использована ассоциативно-коммутативная алгебра поликомплексных чисел, введенных автором ранее [1]. Результаты работы использованы для решения краевых задач теплопроводности в анизотропных пластинах и теории упругости [1], [2].

Поликомплексным числом  $U$  порядка  $r$  в этом сообщении названа величина вида:

$$U = u_0 + u_1 j + \dots + u_r j^r, \quad (1)$$

где единица  $j$  удовлетворяет условию

$$j^r + a_1 j^{r-1} + \dots + a_r = 0, \quad (2)$$

$$a_i = 1. \quad (3)$$

Здесь число  $r$  – порядок единицы и величины  $u_i$ ,  $a_i$  – действительные числа. Таким образом, операции сложения и умножения двух поликомплексных чисел определены однозначно [1].

Поликомплексным переменным на плоскости  $XU$  назовем выражение:

$$z_r = z = x + jy, \quad (4)$$

где индекс  $r$  будет как правило опускаться, если это не вызывает затруднений.

Основной задачей данного сообщения будет изучение степеней  $z_r$ :

$$z_r^n c = z^n c = (x + jy)^n c, \quad (5)$$

где  $c$  – поликомплексное число.

Степени  $z^n c$  для случая  $r=2$  были рассмотрены в работе [3]. Поскольку  $z^n c$  получается из  $z^n$  путем умножения на поликомплексное число вида (1), то для наших целей достаточно рассмотреть  $z^n 1 = z^n$ .

Обратим внимание, что первые  $r-1$  степеней находятся непосредственно по формуле Ньютона и не содержат высшей степени  $j^r$ :

$$z = x + jy, z^2 = x^2 + 2xyj + j^2 y^2, \dots, \\ z^l = \sum_{k=0}^l C_l^k x^{l-k} y^k j^k, \dots, z^{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k x^{r-k-1} y^k j^k. \quad (6)$$

Таким образом количество компонент в  $z^l$  увеличивается с ростом показателя и для  $z^{r-1}$  достигает порядка  $r$  поликомплексной единицы.

Степени  $z^m$ ,  $m \leq r-1$  не зависят от коэффициентов  $a_i$  (3), обладая известной универсальностью.

После использования правила (3) выражение для  $z^n$  может быть представлено в форме:

$$z^n = (x + jy)^n = \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k^{(n)}(x, y) j^k. \quad (7)$$

Умножая (4) на  $z = x + jy$ , легко установить соотношение, связывающее  $\varphi_i^{(n+1)}$  и  $\varphi_i^{(n)}$ .

$$\varphi_i^{(n+1)}(x, y) = x\varphi_i^{(n)}(x, y) + y\varphi_{i-1}^{(n)}(x, y) - a_i y \varphi_{i-1}^{(n)}(x, y), \quad i = 0, 1, \dots, r-1, \quad (8)$$

где принято  $\varphi_{-1} = 0, n \geq r$ .

Укажем, что степени  $z^n$  с есть частные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left( -j \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) F(x + jy) = 0, \quad (9)$$

или уравнения порядка  $r$

$$\sum_{i=0}^r a_i \frac{\partial^r f_k}{\partial x^i y^{r-i}} = 0, \quad (10)$$

где  $f_k$  – компоненты гиперкомплексной функции

$$F(x + jy) = \sum_{i=0}^{r-1} f_k(x, y) j^k. \quad (11)$$

Выражение для степеней  $z^n$  можно дать в другой, более удобной во многих случаях форме. С этой целью используем сопряженные комплексные переменные

$$w = x + iy, \quad \bar{w} = x - iy,$$

где  $i$  – обыкновенная комплексная единица.

В этих переменных степени имеют вид

$$z^n = \frac{1}{2^n} [(1 - ij)w + (1 + ij)\bar{w}]^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k w^{n-k} \bar{w}^k (1 - ij)^{n-k} (1 + ij)^k. \quad (12)$$

Ниже, в целях сокращения записи будем использовать

$$a = 1 - ij, \quad b = 1 + ij.$$

Обратим внимание на хорошее свойство выражения (12), где все особенности алгебры сведены к нахождению произведений  $a^{n-k} b^k$ .

При переходе к сопряженным комплексным переменным основная система (9) запишется как

$$b \frac{\partial F}{\partial w} - a \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = 0.$$

Степени в сопряженных комплексных переменных

$$z^n = \frac{1}{2^n} (aw + b\bar{w})^n$$

очевидно, удовлетворяют системе (9).

Поскольку  $z^n$  есть набор однородных многочленов, то разумно перейти к полярной системе координат  $r, \varphi$ . Запишем выражение степени в полярной системе координат

$$z^n = r^n \left( \sum_{k=0}^{s-1} K_k^{(n)} j^k \right), \quad (12a)$$

где  $K_k^{(n)}$  – некоторые многочлены от  $\cos \varphi, \sin \varphi$ . Для случая  $n < r$ , когда представлены не все степени  $j$ , найдем из (6)

$$z^l = r^l \sum_{k=0}^l C_k^l \cos^{l-k} \varphi \sin^k \varphi j^k. \quad (13)$$

Если  $n \leq r$ , то согласно (8) функции  $K_i^{(n+1)}$  определены рекуррентным соотношением:

$$K_i^{(n+1)} = \cos \varphi K_i^{(n)} + \sin \varphi K_{i-1}^{(n)} - a_i^r \sin \varphi K_{r-1}^{(n)}.$$

При  $i = 0, 1, \dots, r-1$ ,  $K_{-1}^{(n)} = 0$ . Например для  $r = 4$  найдем

$$K_0^2 = \cos^2 \varphi, \quad K_1^2 = 2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad K_2^2 = \sin^2 \varphi, \quad K_0^3 = \cos^3 \varphi, \quad K_1^3 = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi,$$

$$K_2^3 = 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \quad K_3^3 = \sin^3 \varphi, \quad K_0^4 = 3 \cos^4 \varphi + \varphi_0 \sin^4 \varphi,$$

$$K_1^4 = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi + \varphi_1 \sin^4 \varphi, \quad K_2^4 = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \varphi_2 \sin^4 \varphi,$$

$$K_3^4 = 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi + \varphi_3 \sin^4 \varphi.$$

Легко показать, что в полярной системе координат  $r, \varphi$  основная система уравнений здесь имеет вид

$$\left( a e^{i\varphi} - b e^{-i\varphi} \right) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{i}{r} \left( a e^{i\varphi} + b e^{-i\varphi} \right) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0.$$

Выражение для степени также легко получается из (6)

$$z^n = \frac{r^n}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-2k)\varphi} a^{n-k} b^k.$$

Отметим еще раз, что все особенности базиса заключены в  $a, b$ , что значительно облегчает вычисления.

Последняя сумма представляет собой сумму для ряда Фурье, т.е. представлена как выражение

$$z^n = \sum_{k=0}^n \left( A_k \cos n\alpha + B_k \sin n\alpha \right).$$

Представляет интерес выражение по базисным степеням

$$z^n = \sum_{i=1}^r \sum_{n,i} a_{n,i} c_{n,i}(\alpha) j.$$

Проведено построение этих тригонометрических многочленов и изучено расположение корней для  $r = 2, r = 4$ .

Таким образом в работе даны формулы, связывающие различные многочлены, которые в простейших случаях переходят в известные формулы сложения для синуса и косинуса.

## Литература

1. Гладышев Ю.А. О возможности обобщения методов теории функций комплексного переменного на функции поликомплексного переменного. // Сб. трудов междунар. конф. «Современные методы физико-математических наук», Т.1., Орел, ОГУ, 2006 г.
2. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и однородных стержней. М.: Наука, 1971.
3. Гладышев Ю.А. Об одном обобщении методов теории функций. Деп. ВИНТИ, 21.05.98/561-В98.

УДК 517.9

### ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЯМОЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В СИСТЕМЕ КОНТАКТИРУЮЩИХ ОБОЛОЧЕК

Ю.А. Гладышев, С.А. Гинзгеймер, М.С. Голубева

Россия, Калужский государственный педагогический университет  
имени К.Э. Циолоковского

**В работе приведен метод построения температурного поля точечного источника тепла в расслаивающейся тонкой слабоискривленной геометрически неоднородной оболочке с учетом внешнего теплообмена, являющийся обобщением теоремы о прямой. В качестве примера, иллюстрирующего решение, приведен случай расслоения плоскости.**

В работах [2],[3] приведена математическая модель, описывающая процесс теплопроводности в системе контактирующих слабоискривленных достаточно тонких оболочек. В рамках этой модели в сообщении показано, что если оболочка обладает зеркальной симметрией и температурное поле в ней известно, то легко может быть построено температурное поле при наличии расслоения оболочки на линии симметрии.

Таким образом, дано обобщение известной в математической физике теоремы о прямой для случая расслоения оболочки. Отметим, что в модели принято наличие внешнего теплообмена. В качестве примера приведено поле точечного источника, то есть точечной особенности в системе контактирующих полуплоскостей.

Они широко используются при построении различных моделей физических процессов. Их использование оказывается очень плодотворным, ибо во многих случаях результат получается в аналитической форме. В качестве примеров приведем хорошо известные из теории поля теоремы о прямой и окружности [1].

Процесс теплопроводности в достаточно тонкой криволинейной оболочке определен уравнением вида

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + m^2(x, y)T = 0, \quad (1)$$

где  $x, y$  – координаты в изометрической системе координат, а  $m^2(x, y)$  – обобщенный коэффициент внешней теплоотдачи, равный произведению коэффициента  $c(x, y)$ , определяющего геометрию оболочки и физического коэффициента внешней теплоотдачи  $\chi(x, y)$ , т.е.

$$m^2(x, y) = c(x, y)\chi(x, y). \quad (2)$$

Предположим, что изометрическая система выбрана таким образом, что ось  $Oy$  является линией разделения оболочки на несколько слоев. Простейшим примером этой ситуации является контакт нескольких полуплоскостей (рис. 1) или, в более сложном случае расслоение поверхностей вращения.

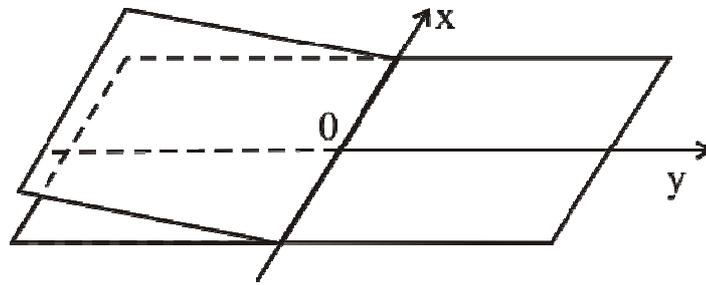


Рис. 1. Расслоение плоскости

Предположим, что функция  $m(x, y)$  – четная по отношению к переменной  $y$ , т.е., в силу симметрии

$$m(x, y) = m(x, -y). \quad (3)$$

В этом случае, если  $T(x, y)$  – решение уравнения (1), то  $T(x, -y)$  также есть решение. Это означает, что решение может быть продолжено с сохранением симметрии для верхней полуплоскости.

Решение в каждой из полуплоскостей будем искать в виде

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= AT(x, y) + BT(x, -y), \\ T^{(i)} &= C_i T(x, y), \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что все особенности решения лежат в полуплоскости  $y > 0$ . Условия сопряжения, как известно [2],[3], состоят в непрерывности температуры и равенстве потоков тепла на линии расслоения:

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, 0) &= T^{(i)}(x, 0), \quad i = 2, \dots, n, \\ p_1 \left( \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} &= \sum_{i=2}^n p_i \left( \frac{\partial T^{(i)}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеем  $n$  уравнений для определения  $n$  неизвестных  $A, B, C_i$ . Поскольку  $A$  произвольно, система (5) с учетом условия (3) приводится к системе:

$$A + B = C_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$p_1(A - B) = \sum_{j=2}^n p_j C_j. \quad (6)$$

Помимо тривиального решения, положив  $A$  в качестве параметра системы можно получить конкретные формулы для вычисления  $B, C_2, \dots, C_n$ , которые имеет вид:

$$B = \frac{A \left( p_1 - \sum_{i=2}^n p_i \right)}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad C_i = \frac{2Ap_i}{\sum_{j=1}^n p_j}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (7)$$

Очевидно, что если внешнего теплообмена нет, то результат остается в силе и даже становится проще. При этом положив  $n = 2$  результат перейдет в обычную теорему о прямой.

Теорема имеет особую сторону, состоящую в том, что к решению (4) может быть добавлено решение типа

$$T_0^{(1)} = 0, \quad T_0^{(2)} = p_2 T_0(x, y), \quad T_0^{(3)} = -p_3 T_0(x, y),$$

обладающее свойством антисимметрии

$$T_0(x, y) = T_0(x, -y),$$

которое указывает на то, что  $T_0$  исчезает на линии симметрии.

Поэтому будем считать, что в областях  $2, \dots, n$  продолжение поля выбрано одинаковым с точностью до подобия.

Перейдем к важному частному примеру контакта полуплоскостей. В качестве исходного возьмем поле температур точечного источника тепла при наличии внешнего теплообмена, расположенного в точке  $(0, a)$  и наличии расслоения полуплоскостей по линии  $x = 0$ :

$$T = \frac{M}{2\pi} K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right),$$

где  $M$  – характеристика мощности источника,  $K_0$  – модифицированная функция Бесселя второго рода. Для упрощения выкладок без потери общности примем  $\frac{M}{2\pi} = 1$ .

По (4) имеем

$$T^{(1)} = AK_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right) + BK_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y + a)^2} \right),$$

$$T^{(2)} = C_1 K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right), \quad T^{(3)} = C_2 K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right). \quad (8)$$

Положив  $A = 1$  по (7) найдем

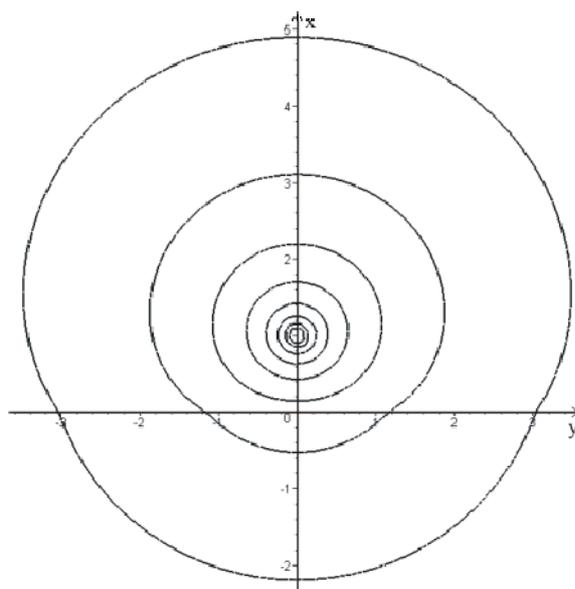
$$B = \frac{p_1 - p_2 - p_3}{p_1 + p_2 + p_3}, \quad C_i = \frac{2p_i}{p_1 + p_2 + p_3}, \quad i = 2, 3. \quad (9)$$

Т.о. из (8) и (9) решение принимает конечный вид

$$T^{(1)} = K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right) + \frac{p_1 - p_2 - p_3}{p_1 + p_2 + p_3} K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y + a)^2} \right),$$

$$T^{(2)} = \frac{2p_2}{p_1 + p_2 + p_3} K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right), \quad T^{(3)} = \frac{2p_3}{p_1 + p_2 + p_3} K_0 \left( m \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \right).$$

Графически решение представлено на рис. 2. Характерной деталью решения для нескольких контактирующих оболочек или стержней является “излом” температуры на линии (для стержней в точке) контакта, появляющийся вследствие разделения потоков тепла.



**Рис. 2.** Изотермы решения уравнения теплопроводности для точечного источника в точке (0,1)

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Мир 1985.
2. Гинзгеймер С.А. Об одном методе решения стационарных задач теплопроводности для систем контактирующих стержней. //Известия Тульского государственного университета. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи, В.1, Тула, ТулГУ, 2006, – С.15-19.
3. Гинзгеймер С.А. Математическое моделирование процессов теплопередачи в системах контактирующих стержней : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 : Калуга, 2006, 163 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОНИЦАЕМОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г.В. Голубев

Россия, Казанский государственный технический университет  
имени А.Н. Туполева, e-mail: golubev@tm.kstu-kai.ru

Рассмотрена задача определения коэффициента проницаемости трещин в неоднородной трещиновато-пористой среде по соответствующему набору исходных данных. Область движения жидкости считается круговой, фильтрация в трещинах описывается законом Форхгеймера, а в блоках – параметрическим законом. Предложен алгоритм решения задачи.

Рассматривается фильтрация жидкости в неоднородной трещиновато-пористой среде. В качестве математической модели такой среды примем модель Баренблатта-Желтова. Будем считать, что движение однородной жидкости в этой среде таково, что фильтрация в трещинах описывается нелинейным двучленным законом Форхгеймера, который возьмем в следующей форме

$$\nabla p = -\mu \frac{\bar{v}_1}{k_1} - \beta \mu \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_1}{k_1} \quad (1)$$

или в форме, разрешенной по отношению к скорости фильтрации

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \quad (2)$$

где

$$B_1 = \left( \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1 \right) / 2\beta |\nabla p|.$$

Для движения жидкости в пористых блоках примем параметрический закон

$$\bar{v}_2 = -\frac{k_2}{\mu} \frac{|\nabla p| - \lambda_1 \beta_1 \mu_0}{\lambda_2 \beta_1 + \sqrt{\lambda_3 \beta_1^2 + |\nabla p|^2}} \nabla p, \quad \beta_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{k_2}}, \quad (3)$$

В (1)-(3) использованы следующие обозначения:  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  - скорости фильтрации соответственно в трещинах и блоках,  $k_1$ ,  $k_2$  – коэффициенты проницаемости трещин и блоков,  $p$  – функция давления,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости жидкости,  $\alpha$ ,  $\beta$  - некоторые постоянные,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_0$  - параметры, при некоторых значениях которых получается из (3) в качестве частных случаев ряд известных законов фильтрации

Из (2) и (3) для суммарного потока получаем

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = -B_2 \nabla p, \quad (4)$$

где

$$B_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1}{2\beta |\nabla p|} + \frac{k_2}{\mu} \frac{|\nabla p| \sqrt{k_2} - \lambda_1 \mu_0 \alpha}{\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + |\nabla p|^2} k_2}.$$

Будем считать коэффициенты проницаемости и трещин и блоков переменными величинами, функциями координат:  $k_1 = k_1(x, y)$ ,  $k_2 = k_2(x, y)$ .

Так же, как и в [1], получается основное уравнение фильтрации

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_2 a) + \frac{\partial}{\partial y}(B_2 b) + f = 0. \quad (5)$$

Здесь  $a = \partial p / \partial x, b = \partial p / \partial y, f$  – функция плотности распределенных источников и стоков. Равенство (5) рассматривается как уравнение для определения фильтрационного параметра. В уравнении их два:  $k_1$  и  $k_2$ . Поскольку в рамках предлагаемого подхода две неизвестные функции из одного дифференциального уравнения определить не удастся, то одну из них следует отнести к числу задаваемых. Допустим, по результатам обработки кернов и гидродинамических исследований на скважинах для  $k_2$  принимается некоторая гипотеза, не противоречащая априорной информации. Рассмотрим задачу определения проницаемости  $k_1(x, y)$  для случая, когда область фильтрации  $D$  представляет собой круг, а данные Коши поставлены на его границе  $k_1(r, \theta)|_{r=1} = \varphi(\theta)$  (радиус круга всегда можно считать равным единице). Уравнение (5) запишем в полярных координатах

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_2 a^1) + \frac{\partial}{\partial \theta}(B_2 b^1) = -rf, \quad (6)$$

где  $a^1 = \partial p / \partial r, b^1 = r^{-1} \partial p / \partial \theta$ . Все величины, входящие в уравнение (6), кроме  $k_1(r, \theta)$ , считаются известными. Для задания функции  $p$  используется карта изобар месторождения и дискретные логарифмические особенности. Для решения задачи используем известный метод интегральных соотношений. Разобьем область  $D$  на секториальные подобласти лучами  $\theta = \theta_j, (j = 0, 1, \dots, M)$ .

Уравнение (6) проинтегрируем по  $\theta$  от  $\theta_{j-1}$  до  $\theta_j$

$$\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{\partial}{\partial r}(rB_2 a^1) d\theta + (B_2 b^1)_j - (B_2 b^1)_{j-1} = - \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} r f d\theta, (j = 1, 2, \dots, M + 1),$$

или

$$\frac{d}{dr} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} rB_2 a^1 d\theta + (B_2 b^1)_j - (B_2 b^1)_{j-1} = P_j(r), (j = 1, 2, \dots, M + 1), \quad (7)$$

где обозначено  $(B_2 b^1)_j = (B_2 b^1)_{\theta=\theta_j}$ .

Равенства (7) представляют собой систему из  $M$  интегральных соотношений. Количество их определяет желаемую степень приближения к точному решению задачи. Для функции  $rB_2 a^1$  применим какую-либо интерполяционную формулу, конкретный выбор которой остается в нашем распоряжении. Значения функции для любого  $\theta$  будет выражаться при этом через ее значения на линиях  $\theta = \theta_0, \dots, \theta = \theta_M$ . Применим для функции  $rB_2 a^1$  сплайн-аппроксимацию по  $\theta$ , когда она ищется в виде линейной комбинации произведений одномерных линейных сплайнов на соответствующие значения функции. Тогда будем иметь

$$rB_2 a^1 = \sum_{s=0}^{M+1} rB_2(r, \theta_s) a^1(r, \theta_s) \omega_{\theta_s}(\theta), \quad (8)$$

где  $\omega_{\theta_s}(\theta) = (\theta - \theta_{s-1}) / l$ , если  $\theta \in [\theta_{s-1}, \theta_s]$ ;  $\omega_{\theta_s}(\theta) = (\theta_{s+1} - \theta) / l$ , если  $\theta \in [\theta_s, \theta_{s+1}]$ ;  $\omega_{\theta_s}(\theta) = 0$ , если  $\theta \notin [\theta_{s-1}, \theta_{s+1}]$ .

Шаг по полярному углу будем считать постоянным  $l = \theta_j - \theta_{j-1}$ , ( $j = 1, 2, \dots, M+1$ ). После подстановки выражения  $rB_2a^l$  в систему интегральных соотношений (7) получим

$$\sum_{s=0}^{M+1} \pi_{js} \frac{d}{dr} [B_2(r, \theta_s) a^l(r, \theta_s)] + (B_2 b^1)_j - (B_2 b^1)_{j-1} = P_j(r), (j = 1, 2, \dots, M+1).$$

Через  $\pi_{js}$  здесь обозначены коэффициенты

$$\pi_{js} = \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \omega_{\theta s}(\theta) d\theta,$$

которые могут принимать следующие значения

$$\pi_{j,j-1} = l/2, \pi_{jj} = l/2, \pi_{js} = 0, \text{ если } s \neq j-1, j$$

Полученная система переписывается далее в виде

$$\frac{l}{2} \frac{d}{dr} [rB_2(r, \theta_{j-1}) a^l(r, \theta_{j-1})] + \frac{l}{2} \frac{d}{dr} [rB_2(r, \theta_j) a^l(r, \theta_j)] + (B_2 b^1)_j - (B_2 b^1)_{j-1} = P_j(r), \quad (9)$$

( $j = 1, 2, \dots, M+1$ ).

Учтем, что  $B_2 a^l = B a^l + B_1 a^l$ , а  $B$  не содержит неизвестную функцию  $k_1$ . Подсчитывая производную  $dB_1 a^l / dr$  и подставляя ее в (9), получим

$$\begin{aligned} & \frac{l}{2} \left\{ \frac{dk_1(r, \theta_{j-1})}{dr} \left( \frac{ra^l}{\mu \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right)_{j-1} + [(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) \frac{d}{dr} \frac{ra^l}{2\beta |\nabla p|}]_{j-1} + \right. \\ & + \left[ \frac{ra^l k_1 |\nabla p|_r}{\mu |\nabla p| \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right]_{j-1} \left. \right\} + \frac{l}{2} \left\{ \frac{dk_1(r, \theta_j)}{dr} \left( \frac{ra^l}{\mu \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right)_j + \right. \\ & + [(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) \frac{d}{dr} \frac{ra^l}{2\beta |\nabla p|}]_j + \left. \left[ \frac{ra^l k_1 |\nabla p|_r}{\mu |\nabla p| \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right]_j \right\} + \quad (10) \\ & + \frac{l}{2} \frac{d}{dr} (rB(r, \theta_{j-1}) a^l(r, \theta_{j-1})) + \frac{l}{2} \frac{d}{dr} (rB(r, \theta_j) a^l(r, \theta_j)) + (B_2 b^1)_j - (B_2 b^1)_{j-1} = P_j(r), \\ & (j = 1, 2, \dots, M+1) \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} & \frac{l}{2} \left( \frac{ra^l}{\mu \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right)_j = \chi_j(r), \{ [(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) \frac{d}{dr} \frac{ra^l}{2\beta |\nabla p|}]_{j-1} + \\ & + \left[ \frac{ra^l k_1 |\nabla p|_r}{\mu |\nabla p| \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right]_{j-1} + [(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) \frac{d}{dr} \frac{ra^l}{2\beta |\nabla p|}]_j + \\ & + \left[ \frac{ra^l k_1 |\nabla p|_r}{\mu |\nabla p| \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu}} \right]_j \left. \right\} \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \frac{d}{dr} (rB(r, \theta_{j-1}) a^l(r, \theta_{j-1})) + \\ & + \frac{l}{2} \frac{d}{dr} (rB(r, \theta_j) a^l(r, \theta_j)) + (B_2 b^1)_j - (B_2 b^1)_{j-1} = \mu_j(r), \end{aligned}$$

то аппроксимирующая система принимает вид

$$\frac{dk_{1,j-1}(r)}{dr} \chi_{j-1}(r) + \frac{dk_{1j}(r)}{dr} \chi_j(r) + \mu_j(r) = P_j(r), (j = 1, 2, \dots, M+1) \quad (11)$$

Используя условия периодичности

$$\frac{dk_{1,j+M+1}(r)}{dr} = \frac{dk_{1j}(r)}{dr}, \chi_{j+M+1}(r) = \chi_j(r), \mu_{j+M+1}(r) = \mu_j(r),$$

получаем из (11) следующие уравнения

$$\chi_0(r) \frac{dk_{10}(r)}{dr} + \chi_1(r) \frac{dk_{11}(r)}{dr} = P_1(r) - \mu_1(r),$$

$$\chi_1(r) \frac{dk_{11}(r)}{dr} + \chi_2(r) \frac{dk_{12}(r)}{dr} = P_2(r) - \mu_2(r),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\chi_{M-1}(r) \frac{dk_{1,M-1}(r)}{dr} + \chi_M(r) \frac{dk_{1,M}(r)}{dr} = P_M(r) - \mu_M(r),$$

$$\chi_0(r) \frac{dk_{10}(r)}{dr} + \chi_M(r) \frac{dk_{1,M}(r)}{dr} = P_{M+1}(r) - \mu_{M+1}(r).$$

(12)

Система (12) может быть разрешена по отношению к производным. Для этого рассматриваем ее как систему линейных алгебраических уравнений для нахождения функций  $dk_{10}(r)/dr, dk_{11}(r)/dr, \dots, dk_{1,M}(r)$ .

Определитель ее имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1,1,0,0,\dots,0,0 \\ 0,1,1,0,\dots,0,0 \\ 0,0,1,1,\dots,0,0 \\ \dots\dots\dots \\ 0,0,0,0,\dots,1,1 \\ 1,0,0,0,\dots,0,1 \end{vmatrix} \chi_0(r)\chi_1(r)\dots\chi_M(r) = [1 + (-1)^M] \chi_0(r)\chi_1(r)\dots\chi_M(r).$$

Для единственности решения системы нужно, чтобы определитель  $\Delta$  не равнялся нулю. Это будет только при условии, что число  $M$  является четным. Будем считать это условие выполненным, т.е. круг следует делить на три, пять, семь и т.п. подобластей. Если же это условие не выполняется, то система (12) не приводится к нормальной форме Коши. Ее также можно интегрировать, но это потребует при численном решении составления специальной программы, что выглядит менее целесообразным по сравнению с использованием стандартной при приведении системы к нормальной форме.

Определитель системы (12) при четном  $M$  равен

$$\Delta = 2\chi_0(r)\chi_1(r)\dots\chi_M(r).$$

Запишем далее определитель, полученный из  $\Delta$  заменой  $j$ -ого столбца правой частью системы (12)

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \chi_0(r), \chi_1(r), 0, \dots, \zeta_1, \dots, 0, 0 \\ 0, \chi_1(r), \chi_2(r), \dots, \zeta_2, \dots, 0, 0 \\ 0, 0, \chi_2(r), \dots, \zeta_3, \dots, 0, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, 0, \dots, \zeta_j, \dots, 0, 0 \\ \dots\dots\dots \\ \chi_0(r), 0, 0, \dots, \zeta_{M+1}, \dots, 0, \chi_M(r) \end{vmatrix} = \chi_j^{-1}(r) \chi_0(r) \chi_1(r) \dots \chi_M(r) \left[ \sum_{i=1}^{M+1} \xi_{ij} \zeta_i \right],$$

Здесь величина  $\xi_{ij}$  определяется формулой

$$\xi_{ij} = (-1)^{i+j}, \text{ если } i \leq j; \text{ или } (-1)^{i+j+1}, \text{ если } i > j; \text{ а } \zeta_i = P_i(r) - \mu_i(r).$$

Система (12) теперь может быть записана следующим образом в виде, разрешенном относительно производных

$$2\chi_j(r) \frac{dk_{1j}(r)}{dr} = \sum_{i=1}^{M+1} \xi_{ij} [P_i(r) - \mu_j(r)], j = 0, 1, \dots, M \quad (13)$$

К ней добавляются данные Коши

$$k_{1j}(r) \Big|_{r=1} = \varphi_j, (j = 0, 1, \dots, M), \quad (14)$$

где обозначено  $\varphi_j = \varphi(\theta) \Big|_{\theta=\theta_j}$ .

Таким образом, для определения функций  $k_{10}(r), k_{11}(r), \dots, k_{1M}(r)$  нужно проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными данными Коши.

Заметим, что в зависимости от характера изменения искомой функции в области могут применяться как продольные, так и поперечные схемы метода интегральных соотношений. В данном случае это означает, что можно применять деление области  $D$  как на секториальные, так и на кольцеобразные подобласти с соответствующими вариантами интегрирования и последующих преобразований. Укажем сейчас коротко второй путь. Проинтегрируем исходное уравнение по  $r$  от  $r_i$  до  $r_{i-1}$

$$\frac{d}{d\theta} \int_{r_i}^{r_{i-1}} B_2 b^1 dr + (rB_2 a^1)_{i-1} - (rB_2 a^1)_i = F_i(\theta), (i = 1, 2, \dots, N), \quad (15)$$

где  $F_i(\theta) = - \int_{r_i}^{r_{i-1}} r f dr.$

Для функции  $B_2 b^1$  воспользуемся интерполяционной формулой с кусочно-линейной интерполяцией по радиусу

$$B_2 b^1 = \sum_{k=0}^N B_2(r_k, \theta) b^1(r_k, \theta) \omega_{rk}(r), \text{ где } \omega_{rk} = (r_{k-1} - r) / h, \text{ если } r \in [r_k, r_{k-1}];$$

$$\omega_{rk} = (r - r_{k+1}) / h, \text{ если } r \in [r_{k+1}, r_k]; \omega_{rk} = 0, \text{ если } r \notin [r_{k+1}, r_{k-1}], (h = \Delta r).$$

После преобразований аппроксимирующая система дифференциальных уравнений запишется

$$\frac{dk_{1,i-1}(\theta)}{d\theta} \eta_{i-1}(\theta) + \frac{dk_{1,i}(\theta)}{d\theta} \eta_i(\theta) = F_i(\theta) - \lambda_i(\theta), (i = 1, 2, \dots, N). \quad (16)$$

По предложенным алгоритмам проводились расчеты в случаях существования точного аналитического решения задачи, при нелинейной фильтрации к центральной скважине в круговом пласте. Погрешность приближенного решения в них оказалась небольшой, в пределах практических требований точности.

## Литература

1. Голубев Г.В. Применение дискретных особенностей в задаче определения фильтрационных параметров // Вестник ХНУ, 2007, №775, с. 99-104.

**ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ПРЯМОУГОЛЬНОГО КРЫЛА ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ  
РАЗДЕЛА СРЕД**

А.С. Гром, С.М. Еременко

Россия, Военно-воздушная инженерная академия  
имени профессора Н.Е. Жуковского

**Исследуются нелинейные нестационарные аэродинамические характеристики прямоугольных крыльев на различных режимах обтекания вблизи экрана.**

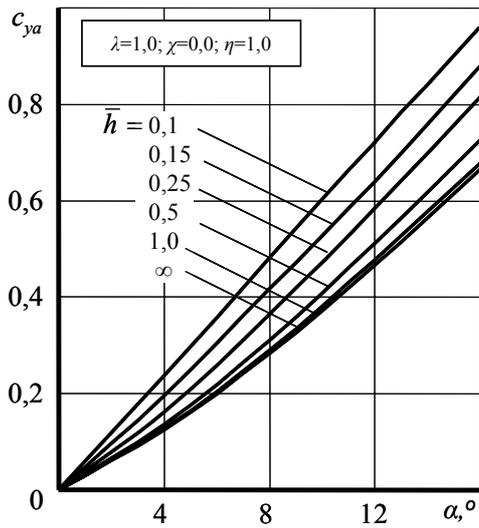
Беспилотные летательные аппараты (БЛА) и их комплексы являются наиболее перспективными, динамично развивающимися, уникальными системами военного и гражданского назначения. Привлекательность БЛА обусловлена широким кругом решаемых ими задач. Анализ показывает, что в последние годы БЛА имеют высокую востребованность, как в военных, так и в гражданских сферах деятельности.

Проблема снижения аварийности БЛА на этапах взлета и посадки имеет особую остроту, так как влияние плоскости раздела сред (так называемого «экрана») на аэродинамические характеристики может оказывать значительное влияние, поэтому, изучение аэродинамических характеристик БЛА на взлетно-посадочных режимах остается актуальной задачей, несмотря на многочисленные исследования в этой области в течении около 100 лет [1,2,5,6]. Решение этой проблемы возможно, в частности, использованием математических моделей, базирующихся на методе дискретных вихрей [3,4].

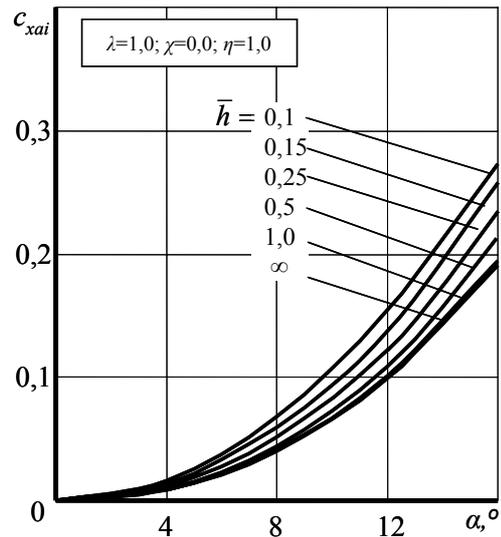
В рамках рассмотренной задачи были проведены систематические исследования серии прямоугольных крыльев с удлинением  $\lambda=1,0\dots 10,0$ , как наиболее часто применяемые в аэродинамической компоновке БЛА. Исследовалось влияние подстилающей поверхности на аэродинамические характеристики крыльев в диапазоне относительных высот  $\bar{h} = h/b = 0,1\dots\infty$ , где  $h$  – минимальное расстояние между задней кромкой крыла и поверхностью экрана,  $b$  – характерный размер. Начало координат совпадает с носком средней аэродинамической хорды.

На рис. 1...3 представлены зависимости коэффициента подъемной силы  $c_{ya}(\alpha)$ , коэффициента индуктивного сопротивления  $c_{xai}(\alpha)$  и безразмерной координаты центра давления  $\bar{x}_a(\alpha)$ . Наибольший эффект наблюдается при относительной высоте  $\bar{h} = 0,1$  во всем диапазоне углов атаки  $\alpha$ .

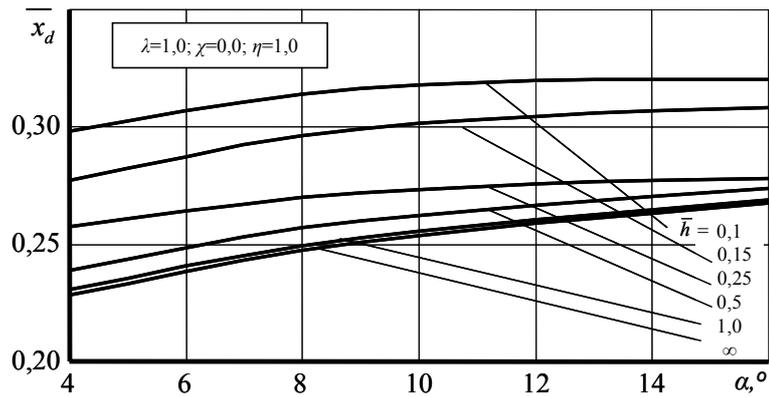
На рис. 4 показана картина обтекания прямоугольного крыла с удлинением  $\lambda=1$ . Видно, что на  $\bar{h} = 0,1$  возникает перетекание через переднюю кромку крыла, в следствии чего изменяется картина распределения нагрузки по хорде (рис. 5) и размаху (рис. 6).



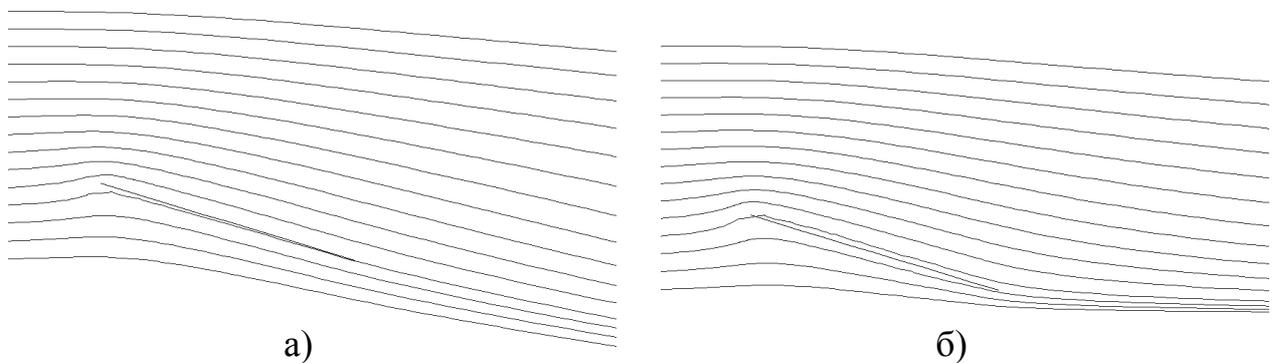
**Рис. 1.** Влияние относительной высоты  $\bar{h}$  на величину коэффициента подъемной силы  $c_{ya}(\alpha)$  прямоугольного крыла



**Рис. 2.** Влияние относительной высоты  $\bar{h}$  на величину коэффициента индуктивного сопротивления  $c_{xai}(\alpha)$  прямоугольного крыла

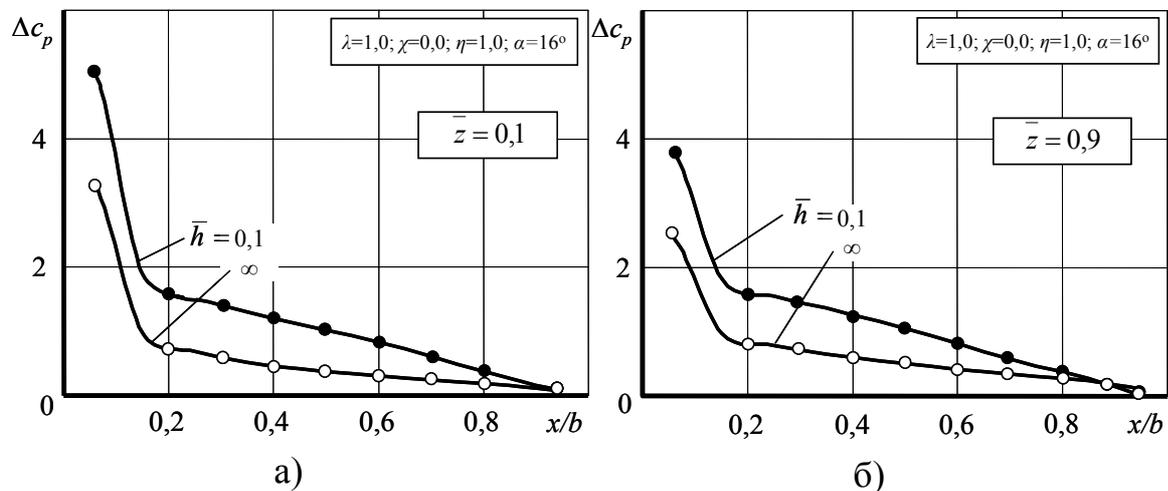


**Рис. 3.** Влияние относительной высоты  $\bar{h}$  и угла атаки  $\alpha$  на координату центра давления  $\bar{x}_d(\alpha)$  прямоугольного крыла



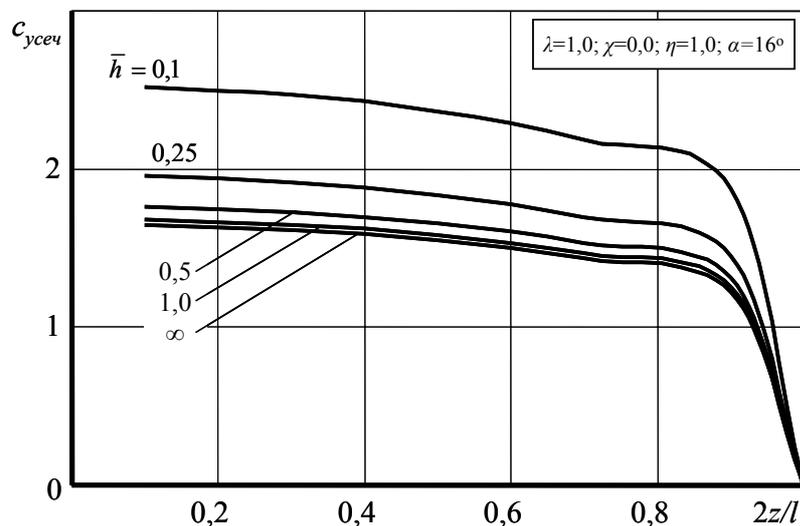
**Рис. 4.** Картина обтекания прямоугольного крыла  $\lambda=1,0; \alpha=16^\circ$ : а)  $\bar{h} \rightarrow \infty$ ; б)  $\bar{h} = 0,1$

На рис. 5 показано изменение коэффициента  $\Delta c_p$  для различных относительных высот  $\bar{h}$ , где  $\bar{z} = \frac{2z}{l}$ .



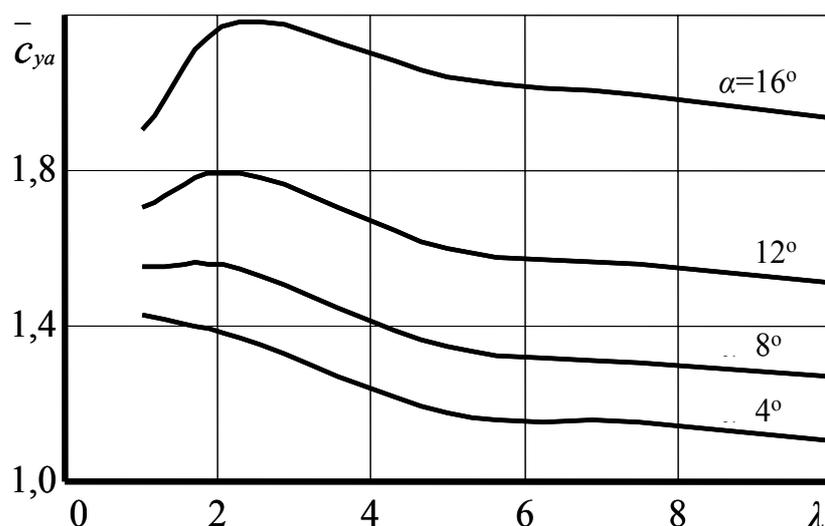
**Рис. 5.** Изменение коэффициента  $\Delta c_p$  по хорде прямоугольного крыла  $\lambda=1,0$  при обтекании на различных  $\bar{h}$ : а) вблизи корневой хорды  $b_0$  ( $\bar{z} = 0,1$ ); б) вблизи концевой хорды  $b_k$  ( $\bar{z} = 0,9$ )

Из приведенных зависимостей видно, что для прямоугольного крыла  $\lambda=1,0$  прирост  $\Delta c_p$  вблизи передней кромки может достигать 35%.



**Рис. 6.** Распределение погонной аэродинамической нагрузки по размаху прямоугольного крыла  $\lambda=1.0$  на  $\alpha=16^\circ$  для различных  $\bar{h}$

На рис. 7 приведена зависимость прироста несущих свойств крыла  $\bar{c}_{ya} = \frac{c_{ya}(\bar{h})}{c_{ya}(\bar{h} \rightarrow \infty)} = f(\lambda, \alpha)$  при относительной высоте над экраном  $\bar{h}=0,1$ .



**Рис. 7.** Зависимость прироста коэффициента подъемной силы  $\bar{c}_{ya}$  от удлинения крыла  $\lambda$  и угла атаки  $\alpha$  при  $\bar{h} = 0,1$

Из рис.7 видно, что наибольший экраный эффект наблюдается для крыльев с удлинением  $\lambda < 5,0$  на углах атаки  $\alpha > 10^\circ$ .

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Наибольший эффект экрана наблюдается на относительной высоте  $\bar{h} \leq 0,5l$ , где  $l$  – размах крыла.
2. Степень воздействия границы раздела сред существенно зависит от геометрических характеристик крыла. Так для прямоугольного крыла с удлинением  $\lambda = 1,0$  прирост коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$  на относительной высоте  $\bar{h} = 0,1$  при угле атаки  $\alpha = 16^\circ$  составил около 100%, а с удлинением  $\lambda = 10,0$  – 48%.

Таким образом, при проектировании БЛА необходимо учитывать влияние экрана на его аэродинамические характеристики, так как большинство БЛА выполняют посадку на фюзеляж, посадочную лыжу или шасси с малой относительной высотой.

### Литература

1. Betz A. Auftrieb und Widerstand einer traeflache in der Nohe einer horisontalen Ebene (Erdboden), ZFM. 1912.
2. Wiselberger C. Der Flugelwiderstand in der Nohe Bodens, ZFM. 1921.
3. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Линейные и нелинейные модели аэродинамики летательных аппаратов, М., Изд.: ВВИА, Труды ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, Вып. 1310, 1981.
4. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М. Наука, 1978.

5. Визель Е.П. Исследование особенностей обтекания прямоугольных крыльев малого удлинения, движущихся вблизи экрана, Изд.: ЦАГИ, Труды ЦАГИ, Вып. 1621, 1974.
6. Музыченко Т.М. Скрипач Б.К. Исследование влияния экрана на аэродинамические производные самолета, Изд.: ЦАГИ, Труды ЦАГИ, Вып. 2290, 1985.

УДК 629.735.015

## ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТРЕЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЕВ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СРЕД

А.С. Гром, С.М. Еременко

Россия, Военно-воздушная инженерная академия  
имени профессора Н.Е. Жуковского

**Исследуются нелинейные нестационарные аэродинамические характеристики крыльев с различным углом стреловидности по передней кромке на различных режимах обтекания вблизи экрана.**

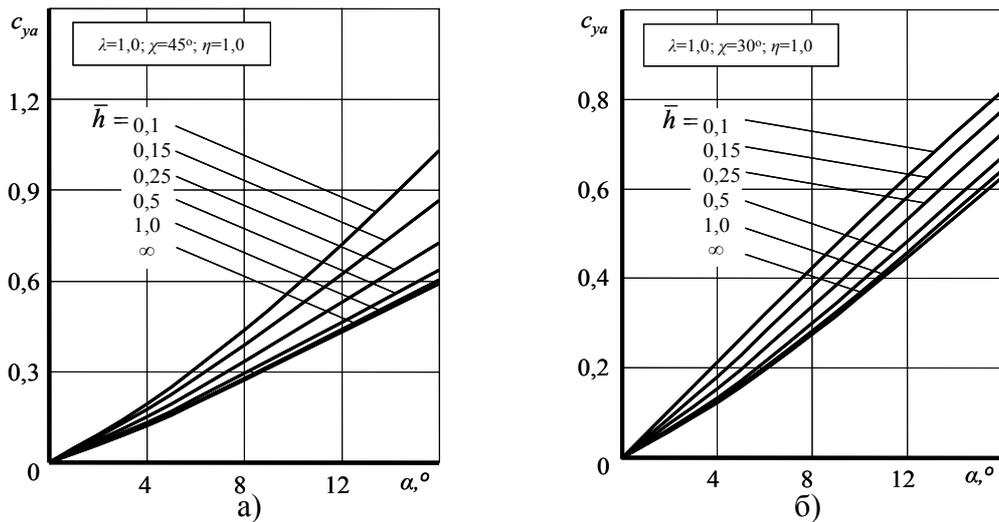
Изменения аэродинамических характеристик летательного аппарата при приближении к земле оказывают наибольшее влияние на параметры его движения при малых значениях удельной нагрузки на крыло, что характерно для большинства беспилотных летательных аппаратов (БЛА). Задача о влиянии экрана на аэродинамические характеристики БЛА особенно актуальна при рассмотрении этапов взлета и посадки.

Решение задачи возможно, в частности, с использованием математической модели в нелинейной нестационарной постановке, базирующихся на методе дискретных вихрей [1,2].

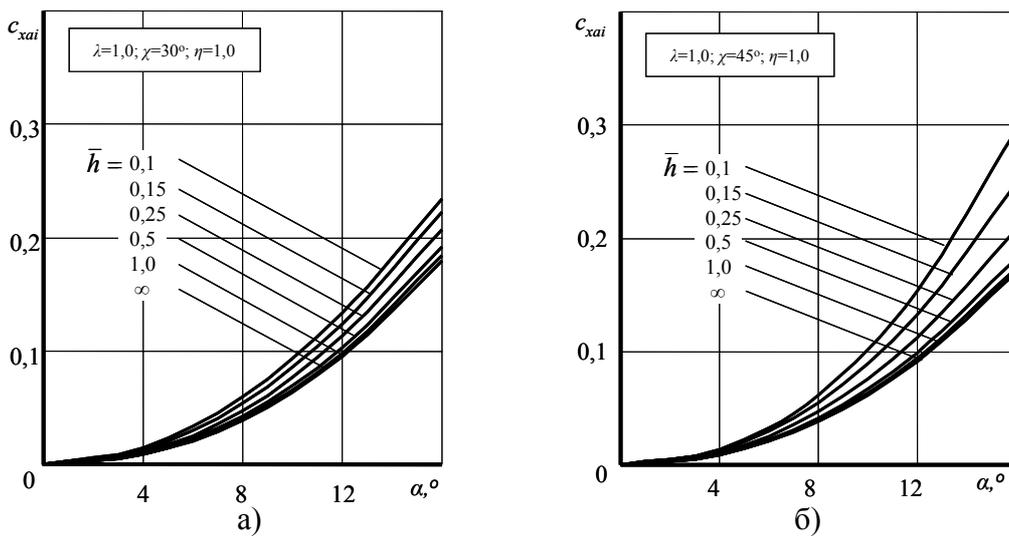
Проведена серия расчетов для крыльев  $\lambda=1\dots 10$ ,  $\chi=30^\circ, 45^\circ$ ,  $\eta=1$  в диапазоне относительных высот над экраном  $\bar{h}=h/b=0,1\dots\infty$ , где  $h$  – расстояние между задней кромкой крыла и поверхностью экрана,  $b$  – характерный размер. Начало координат совпадает с носком средней аэродинамической хорды. Предполагалось безотрывное обтекание передней кромки крыла.

На рис. 1...3 показаны зависимости коэффициента подъемной силы  $c_{ya}(\alpha)$ , коэффициента индуктивного сопротивления  $c_{xai}(\alpha)$  и безразмерной координаты центра давления  $\bar{x}_d(\alpha)$  для стреловидных крыльев при различных относительных высотах  $\bar{h}$ .

Наибольший прирост коэффициентов аэродинамических сил наблюдается при относительной высоте  $\bar{h} \leq 0,5$ .

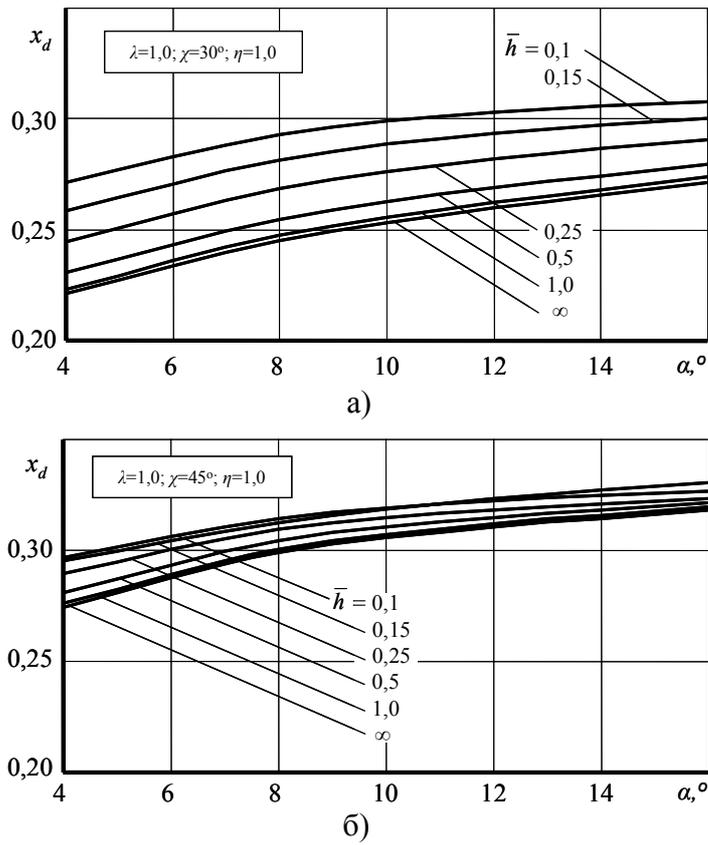


**Рис. 1.** Влияние относительной высоты  $\bar{h}$  на величину коэффициента подъемной силы  $c_{ya}(\alpha)$  стреловидного крыла: а)  $\chi=45^\circ$ ; б)  $\chi=30^\circ$

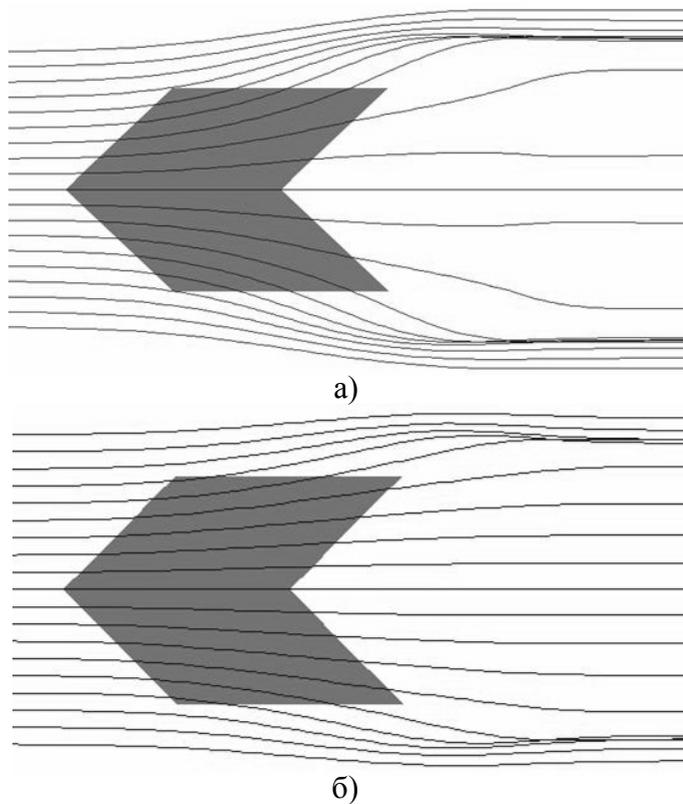


**Рис. 2.** Влияние относительной высоты  $\bar{h}$  на величину коэффициента индуктивного сопротивления  $c_{xai}(\alpha)$  стреловидного крыла с углом стреловидности по передней кромке: а)  $\chi=45^\circ$ ; б)  $\chi=30^\circ$

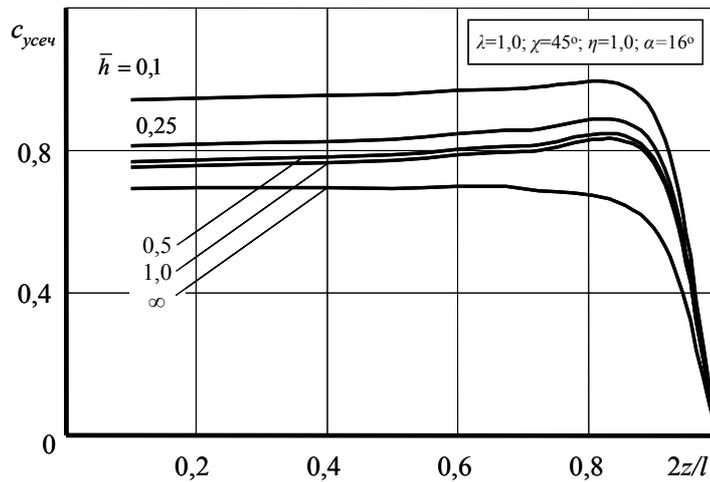
На рис. 4 представлена картина обтекания стреловидного крыла  $\lambda=1$ ,  $\chi=45^\circ$  на различных относительных высотах  $\bar{h}$ . При приближении к экрану (рис. 4,а) линии тока существенно смещаются в сторону концевых сечений крыла. За счет этого смещения на поверхности крыла происходит перераспределение нагрузки по размаху (рис. 5) и по хорде (рис. 6).



**Рис. 3.** Влияние относительной высоты  $\bar{h}$  и угла атаки  $\alpha$  на координату центра давления  $x_d(\alpha)$  стреловидного крыла с углом стреловидности по передней кромке: а)  $\chi=45^\circ$ ; б)  $\chi=30^\circ$



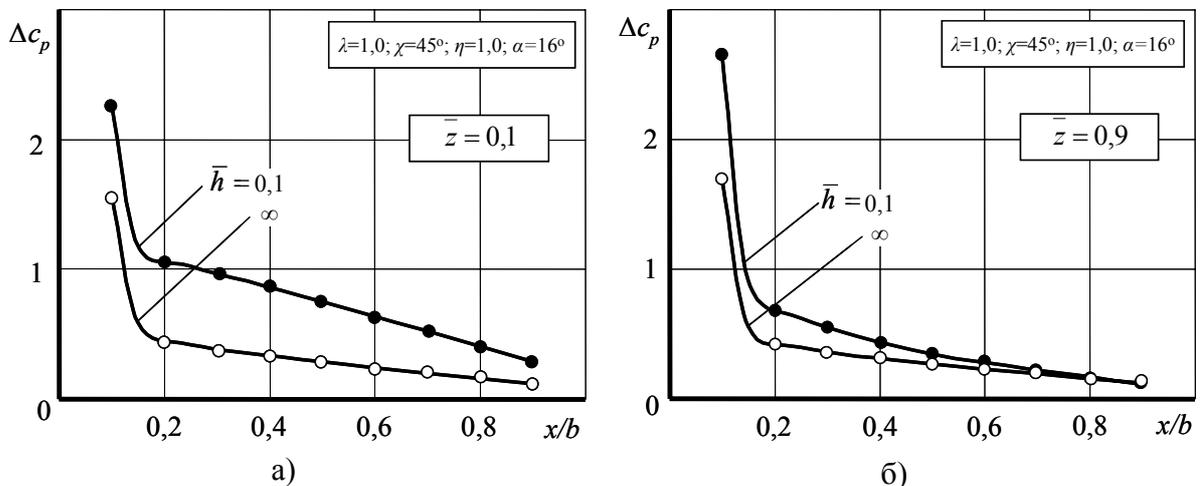
**Рис. 4.** Картина обтекания стреловидного крыла  $\lambda=1,0$ ,  $\chi=45^\circ$ ,  $\alpha=16^\circ$ : а)  $\bar{h} = 0,1$ ; б)  $\bar{h} \rightarrow \infty$



**Рис. 5.** Распределение погонной аэродинамической нагрузки по размаху стреловидного крыла  $\lambda=1,0$ ,  $\chi=45^\circ$ ,  $\alpha=16^\circ$  при различных  $\bar{h}$

Из рис. 5 видно, что с уменьшением  $\bar{h}$  прирост  $c_{y сеч}$  происходит неравномерно. В корневых сечениях он составляет, порядка, 35%, а в концевых – 55...60% по сравнению с  $c_{y сеч} (\bar{h} \rightarrow \infty)$ .

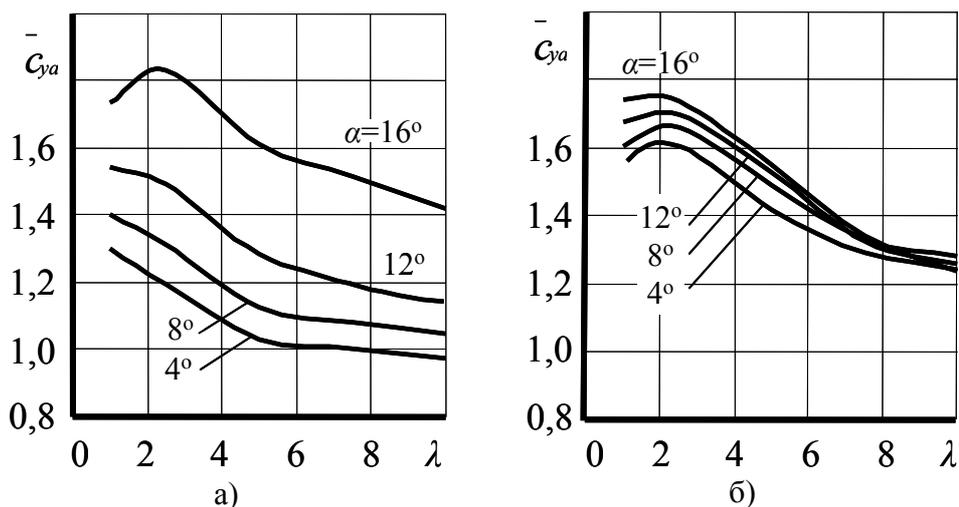
На рис. 6, где показано изменение коэффициента  $\Delta c_p$  вблизи корневой ( $\bar{z} = 0,1$ ) и концевой ( $\bar{z} = 0,9$ ) хорд крыла, где  $\bar{z} = 2z/l$ . Видно, что прирост нагрузки гораздо выше в концевых сечениях крыла.



**Рис. 6.** Изменение коэффициента  $\Delta c_p$  по хорде крыла  $\chi=45^\circ$ ,  $\lambda=1,0$ ,  $\alpha=16^\circ$  при различных  $\bar{h}$ : а) вблизи корневой хорды  $b_0$  ( $\bar{z} = 0,1$ ); б) вблизи концевой хорды  $b_k$  ( $\bar{z} = 0,9$ )

Для анализа влияния удлинения крыла на изменение его аэродинамических характеристик под действием экрана на рис. 7 показаны зависимости относительной величины коэффициента подъемной силы

$$\bar{c}_{ya} = \frac{c_{ya}(\bar{h} < \infty)}{c_{ya}(\bar{h} \rightarrow \infty)} = f(\lambda, \alpha) \text{ для стреловидных крыльев } \chi=30^\circ \text{ и } \chi=45^\circ.$$



**Рис. 7.** Зависимость  $\bar{c}_{ya} = f(\lambda, \alpha)$  для серии стреловидных крыльев при  $\bar{h} = 0.1$ : а)  $\chi = 30^\circ$ ; б)  $\chi = 45^\circ$

Из рис. 7,а видно, что при угле стреловидности по передней кромке  $\chi = 30^\circ$  существенный прирост несущих свойств наблюдается у крыльев  $\lambda < 5$  на  $\alpha > 12^\circ$ . При угле стреловидности по передней кромке  $\chi = 45^\circ$  (рис. 7,б) максимальный прирост коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$  наблюдается у крыльев  $\lambda < 5$  во всем рассмотренном диапазоне углов атаки.

Анализ полученных результатов позволяют сделать следующие выводы:

1. Наибольшее влияние экрана на аэродинамические характеристики стреловидного крыла наблюдается при относительных высотах над экраном  $\bar{h} \leq 0,5l$ , где  $l$  – размах крыла.
2. По мере уменьшения  $\bar{h}$  наибольший прирост  $c_{y \text{ сеч}}$  происходит в районе концевых сечений стреловидного крыла.
3. Изменение угла стреловидности по передней кромке существенно влияет на повышение несущих свойств крыла. Так для крыльев  $\lambda < 5$  прирост  $c_{ya}$  при  $\chi = 30^\circ$  составляет 83% при  $\alpha = 16^\circ$  и до 50% при  $\alpha \leq 12^\circ$ ; при  $\chi = 45^\circ$  – 60...80% во всем диапазоне рассмотренных углов  $\alpha$ .
4. Наличие подстилающей поверхности оказывает наибольшее воздействие на аэродинамические характеристики крыльев малого удлинения ( $\lambda < 5$ ) и большой стреловидности ( $\chi > 30^\circ$ ), что необходимо учитывать при проектировании БЛА.

### Литература

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Линейные и нелинейные модели аэродинамики летательных аппаратов, М., Изд.: ВВИА, Труды ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, Вып. 1310, 1981.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М. Наука, 1978.

## ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ УСКОРЕНИЯ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЛ

В.В. Гуляев, В.А. Джаксбаев

Россия, Военно-воздушная инженерная академия  
имени профессора Н.Е. Жуковского

Изложен подход к исследованию влияния ускорения на аэродинамические характеристики тел.

При маневрировании современных летательных аппаратов имеют место случаи их неустановившегося движения при непрерывном изменении скорости, в связи с чем возникает необходимость в исследовании влияния ускорения тел на их аэрогидродинамические характеристики.

Влияние ускорения на аэрогидродинамические характеристики тел вращения при их отрывном обтекании рассматривалось в работе [1]. В работе [2] проведено исследование влияния ускорения на аэродинамические характеристики пластины при ее горизонтальном перемещении. Вместе с тем отсутствуют систематические результаты исследования влияния ускорения на аэрогидродинамические характеристики профилей, крыльев простой формы в плане и летательных аппаратов при их горизонтальном перемещении.

Задача об обтекании крыльев простой формы в плане, движущихся с ускорением решается методом дискретных вихрей [1,3].

Для определения безразмерного параметра, определяющего аэрогидродинамические характеристики крыльев при их неустановившемся обтекании с ускорением целесообразно использовать теорию размерностей [4]. Обобщенная аэродинамическая сила  $F$  в общем случае будет зависеть от формы летательного аппарата, его ориентации относительно набегающего потока, плотности  $\rho$ , характерного линейного размера  $b$ , поступательной скорости движения  $V$  и размерного ускорения  $a$ . Примем, что форма летательного аппарата и его ориентация относительно набегающего потока не меняются при движении тела с ускорением, поэтому справедливо выражение:

$$F = F(\rho, b, V, a). \quad (1)$$

Формула (1) должна иметь место, какой бы системой единиц мы не пользовались. Пусть мы пользуемся системой единиц типа  $LMT$  и пусть мы вводим новые единицы длины, массы и времени, соответственно в  $L, M, T$  раз меньшие старых единиц. Обозначая численные значения всех рассматриваемых величин в новой системе единиц теми же буквами с чертой наверху, будем иметь:

$$\bar{\rho} = \rho \frac{M}{L^3}, \quad \bar{b} = bL, \quad \bar{V} = V \frac{L}{T}, \quad \bar{a} = a \frac{L}{T^2}, \quad \bar{F} = F \frac{ML}{T^2}.$$

Поэтому равенство (1), которое должно иметь место и в новой системе

единиц, принимает вид:

$$F \frac{ML}{T^2} = F \left( \rho \frac{M}{L^3}, bL, V \frac{L}{T}, a \frac{L}{T^2} \right). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), мы приходим к выводу, что должно существовать следующее тождество:

$$F \left( \rho \frac{M}{L^3}, bL, V \frac{L}{T}, a \frac{L}{T^2} \right) = \frac{ML}{T^2} F(\rho, b, V, a) .$$

Положим теперь в этом тождестве:

$$L = \frac{l}{b}, T = \frac{V}{b}, M = \frac{l}{\rho b^3},$$

тогда получим равенство:

$$\frac{F}{\rho b^2 V^2} = F \left( 1, 1, 1, \frac{ab}{V^2} \right), \quad (3)$$

или:

$$F = \rho b^2 V^2 F \left( 1, 1, 1, \frac{ab}{V^2} \right) .$$

Обобщенную аэродинамическую силу  $F$  можно представить в привычном виде:

$$F = c_F \frac{\rho V^2}{2} S,$$

где  $c_F$  - коэффициент обобщенной аэродинамической силы  $F$ .

Ясно, что площадь тела:

$$S = kb^2,$$

где  $k$  есть безразмерная величина. Поскольку  $a = \frac{dV}{dt}$ , то далее можно записать:

$$\bar{w}_0 = \frac{b}{V^2} \frac{dV}{dt}, \quad (4)$$

Если ввести теперь обозначение:

$$\frac{l}{k} F \left( 1, 1, 1, \frac{ab}{V^2} \right) = f(\bar{w}_0),$$

то формула (3) принимает вид:

$$F(\rho, b, V, a) = \frac{\rho V^2}{2} S f(\bar{w}_0) .$$

Итак, при сделанных допущениях мы получаем следующее выражение для обобщенной аэродинамической силы:

$$F = \frac{\rho V^2}{2} S f(\bar{w}_0) .$$

Таким образом, безразмерное ускорение  $\bar{w}_0$  будет являться единственным безразмерным параметром, определяющим

аэродинамические характеристики крыльев при их неустановившемся ускоренном движении, так что коэффициенты аэродинамических сил и моментов в свою очередь будут являться функционалами зависимости  $\bar{w}_0(\tau)$ . Здесь  $\tau$  - безразмерное время, которое вводится соотношением:

$$d\tau = \frac{V(t)dt}{b}. \quad (5)$$

Задаваясь видом функции  $\bar{w}_0(\tau)$ , нетрудно найти зависимость скорости от безразмерного времени. Действительно, поскольку с учетом (5)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dV}{d\tau} \frac{V}{b},$$

из формулы (4) найдем

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} = \bar{w}_0(\tau),$$

или

$$\frac{dV}{V} = \bar{w}_0(\tau) d\tau.$$

Интегрируя получим:

$$\ln V = \int_0^\tau \bar{w}_0(\xi) d\xi + C,$$

откуда

$$V(\tau) = \exp \left[ \int_0^\tau \bar{w}_0(\xi) d\xi + C \right].$$

Подбирая константу  $C$  так, чтобы при  $\tau=0$   $V = V_0$ , будем иметь:

$$V(\tau) = V_0 \exp \left[ \int_0^\tau \bar{w}_0(\xi) d\xi \right].$$

Численному исследованию подвергались два характерных режима движения. В первом случае из состояния покоя скачком приводилось в движение с начальной скоростью  $V_0$  и постоянным ускорением  $\bar{w}_0$ . Во втором случае крыло приобретало скорость  $V_0$ , которая оставалась постоянной до момента времени  $\tau_0$ , после чего крыло получало постоянное безразмерное ускорение  $\bar{w}_0$ . Законы изменения скорости, отвечающие указанным случаям движения крыла, соответственно имеют вид:

$$V(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ V_0 e^{\bar{w}_0 \tau} & \tau > 0 \end{cases}, \quad (6)$$

для первого случая и для второго:

$$V(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ V_0, & 0 < \tau \leq \tau_0 \\ V_0 e^{\bar{w}_0 \tau}, & \tau > \tau_0 \end{cases}. \quad (7)$$

Очевидно, что при  $\tau \rightarrow 0$  закон (7) сводится к (6).

Необходимо отметить, что законы (6) и (7) при  $\bar{w}_0 > 0$  задают движение, для которого скорость  $V(t)$  и ускорение  $\frac{dV(t)}{dt}$  обращаются в бесконечность за конечный интервал времени  $t_k$ .

Действительно, при  $\bar{w}_0 = \text{const}$  из (4) получим

$$\frac{dV}{V^2} = \frac{\bar{w}_0}{b} dt,$$

откуда после интегрирования

$$-\frac{1}{V} = \frac{\bar{w}_0 t}{b} + C.$$

Условие  $V(0) = V_0$  для константы  $C$  дает  $C = -\frac{1}{V_0}$ , так что

$$V(t) = \frac{V_0}{1 - \frac{V_0 \bar{w}_0}{b} t} \quad \text{или} \quad (8)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{V_0^2 \bar{w}_0}{b(1 - \frac{V_0 \bar{w}_0}{b} t)^2}.$$

Располагая законом (8), можно найти зависимость  $\tau(t)$ . В соответствии с (5)

$$\tau = \frac{1}{b} \int_0^t V(\xi) d\xi = \frac{1}{b} \int_0^t \frac{V_0 d\xi}{1 - \frac{V_0 \bar{w}_0}{b} \xi} = -\bar{w}_0 \ln(1 - \frac{V_0 \bar{w}_0}{b} t).$$

Из полученных соотношений видно, что при  $t_k = \frac{b}{\bar{w}_0 V_0}$  имеют место равенства:

$$\lim_{t \rightarrow t_k} V(t) = \lim_{t \rightarrow t_k} \frac{dV(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_k} \tau(t) = \infty.$$

Конечно, такой закон движения не может быть физически реализован на всем временном интервале, но он интересен тем, что ему соответствует постоянное значение безразмерного ускорения  $\bar{w}_0$ , являющегося, как это было показано, критерием подобия.

Моделирование обтекания при этом законе позволяет при  $\tau \rightarrow \infty$  получить предельное течение (если оно существует) и предельные значения аэродинамических коэффициентов, то есть рассматривать коэффициенты аэродинамических сил и моментов как функции ускорения  $\bar{w}_0$ .

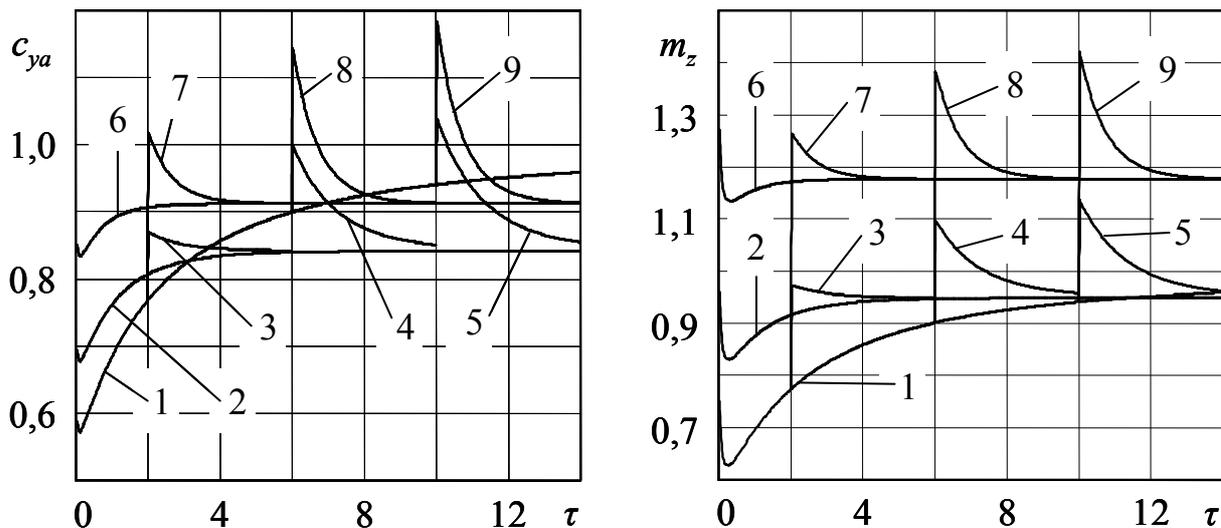
Проведено исследование переходных функций пластины при различном времени старта  $\tau_0 = 0; 2; 6; 10$  и безразмерном ускорении  $\bar{w}_0 = 0,4; 1$  (рис. 1). Анализ рис. 1 позволяет выявить особенности течения при движении тел по законам (6 и 7):

— по истечении некоторого промежутка времени движение с постоянным безразмерным ускорением приводит к установлению в ближайшем следе предельного течения, которое при дальнейшем движении практически не изменяется;

— предельное течение не зависит от времени старта  $\tau_0$ ;

— время установления предельного течения слабо зависит от величины безразмерного ускорения  $\bar{w}_0$ , несколько уменьшаясь при увеличении величины безразмерного ускорения  $\bar{w}_0$ ;

— вид предельного течения зависит от величины безразмерного ускорения  $\bar{w}_0$ .



**Рис. 1.** Зависимость коэффициентов подъемной силы  $c_{ya}$  и момента тангажа  $m_z$  пластины от времени для различных параметров  $\tau_0$  и  $\bar{w}_0$ :

1 -  $\bar{w}_0=0, \tau_0=0$ ; 2 -  $\bar{w}_0=0,4, \tau_0=0$ ; 3 -  $\bar{w}_0=0,4, \tau_0=2$ ; 4 -  $\bar{w}_0=0,4, \tau_0=6$ ; 5 -  $\bar{w}_0=0,4, \tau_0=10$ ; 6 -  $\bar{w}_0=1, \tau_0=0$ ; 7 -  $\bar{w}_0=1, \tau_0=2$ ; 8 -  $\bar{w}_0=1, \tau_0=6$ ; 9 -  $\bar{w}_0=1, \tau_0=10$

### Литература

1. Гоман О.Г., Карплюк В.И., Ништ М.И., Судаков А.Г. Численное моделирование осесимметричных отрывных течений несжимаемой жидкости. - М.: Машиностроение, 1993.
2. Овчинников В.В. Некоторые особенности применения нелинейных аэродинамических моделей для исследования динамики парашютных систем. Научно-методические материалы по аэроупругости и прочности летательных аппаратов. М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1998 г. С. 32-41.
3. Белоцерковский С. М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. - М.: Физ.-мат. лит, 1963.

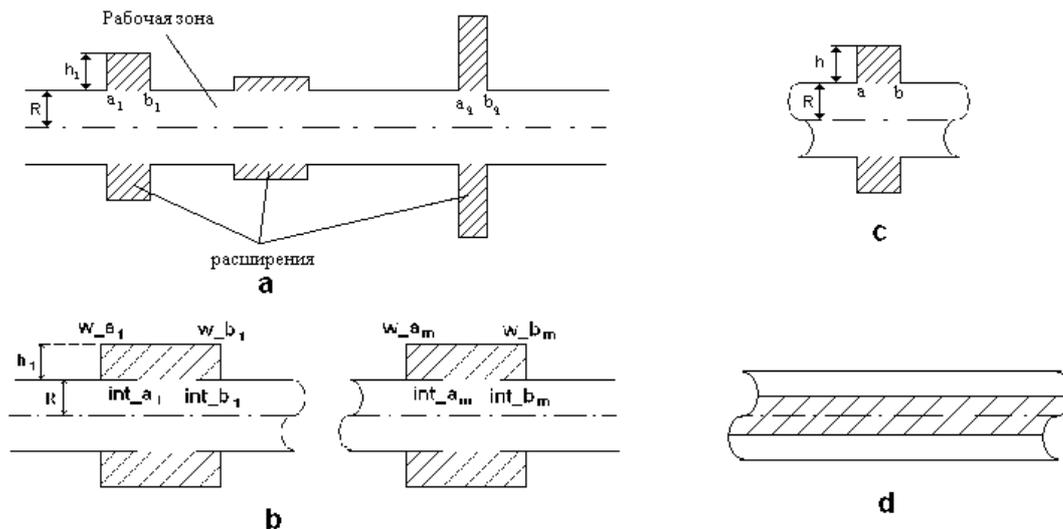
# МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУРАХ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВСТАВКАМИ

С.В. Духопельников

Украина, Харьковский национальный университет  
имени В.Н. Каразина, email: sergey\_dukh@ukr.net

Дан вывод сингулярных интегральных уравнений в аксиально-симметричных волноведущих структурах с диэлектрическими вставками. Дискретная математическая модель построена методом дискретных особенностей и проведен численный эксперимент на ее основе.

Метод предложенный в [1] для решения задачи дифракции электромагнитной волны позволяет охватить достаточно широкий круг задач на цилиндрических структурах, таких как: структуры с конечным количеством гофр или патрубков заполненных диэлектриком, периодические гофры и диэлектрическая вставка (рис.1). Подобные структуры можно использовать в технике СВЧ, как фильтры на запирающей моде [2], световедущие структуры [3].



**Рис. 1.** Сечения волноводов плоскостью, проходящей через ось цилиндра. а) гофрированный волновод; б) волновод с патрубками; с) периодический, гофрированный волновод; д) волновод с диэлектрической вставкой

**Математическая модель.** Зависимость полей от времени гармоническая и задается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Внутри волноводов поля удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость.

В силу отсутствия источников «внутри волновода» выполняются условия:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \quad (3)$$

На поверхности цилиндра выполняется граничное условие (касательные компоненты электрического поля на границе волновода обращаются в ноль):

$$[\mathbf{E}, n]_r = 0, \quad (4)$$

где  $n$  – единичная нормаль к поверхности волновода.

Необходимо потребовать выполнения условия на ребре. В случае, когда присутствуют только конечное число расширений выполняется условие излучения, а в случае периодичной структуры необходимо потребовать выполнение условий теоремы Флоке.

В раскрывах выполняются условия сопряжения: касательные компоненты электрического и магнитного полей непрерывны при переходе из «рабочей зоны» в «зону расширений».

Обозначим  $\mathbf{E}^+(\rho, z)$ ,  $\mathbf{H}^+(\rho, z)$  - поля распространяющиеся в «рабочей зоне», а  $\mathbf{E}^-(\rho, z)$ ,  $\mathbf{H}^-(\rho, z)$  - поля в «зоне расширений».

Известно, что при выполнении (1-3) можно записать уравнения Гельмгольца для каждой компоненты электрического и магнитного поля:

$$\Delta E_i^\pm(\rho, z) + (k^\pm)^2 E_i^\pm(\rho, z) = 0;$$

$$\Delta H_i^\pm(\rho, z) + (k^\pm)^2 H_i^\pm(\rho, z) = 0,$$

где  $i$  может принимать значения  $\rho, \phi, z$ ;  $k^\pm = \omega^2 \mu \varepsilon^\pm$  - волновое число в «рабочей зоне» или «зоне расширений» в зависимости от верхнего индекса.

Не уменьшая общности, в работе для нахождения полного поля решаются уравнения Гельмгольца для двух компонент:  $E_\phi^\pm(\rho, z)$  и  $H_\phi^\pm(\rho, z)$ . Все остальные компоненты восстанавливаются с помощью уравнений Максвелла.

Поля ищем в виде разложения Фурье-Бесселя.

$$E_\phi^\pm(\rho, z) = F[C^{\pm(E)}(\lambda) V_\lambda^{\pm(E)}(\rho) e^{i\lambda z}], \quad (5)$$

$$H_\phi^\pm(\rho, z) = F[C^{\pm(H)}(\lambda) V_\lambda^{\pm(H)}(\rho) e^{i\lambda z}], \quad (6)$$

где  $V_\lambda^{\pm(E)}(\rho)$ ,  $V_\lambda^{\pm(H)}(\rho)$  - известные функции, выраженные через модифицированные функции Бесселя;  $F$  - оператор Фурье;  $C^{\pm(E)}(\lambda)$ ,  $C^{\pm(H)}(\lambda)$  - неизвестные подлежащие определению;  $\lambda$  может принимать вещественные значения, в случае непрерывного спектра, либо целые, в том случае, если спектр дискретен.

Введем две неизвестные функции:

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_\phi^+(R, z),$$

$$h(z) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi^+)(R, z).$$

В силу условия сопряжения и граничного условия (4) функция  $g(z)$  обладает следующими свойствами:

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_{\phi}^{-}(R, z), \quad z \in L,$$

$$g(z) = 0, \quad z \in CL,$$

$$\int_L g(\xi) d\xi = 0.$$

И функция  $h(z)$ :

$$h(z) = \frac{\varepsilon^+}{\varepsilon^- R} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{-})(R, z), \quad z \in L,$$

$$h(z) = 0, \quad z \in CL.$$

где  $CL$  описывает металлическую поверхность;  $L$  - раскрыв патрубка или расширения, а в случае диэлектрической вставки  $L = (-\infty, +\infty)$ .

Имеют место следующие асимптотические оценки:

$$\frac{d}{d\rho} V_{\lambda}^{\pm(E)}(R) = A_1^{\pm} \frac{|\lambda|}{\lambda} + A_2^{\pm} \frac{1}{|\lambda|} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (7)$$

$$V_{\lambda}^{\pm(H)}(R) = B_1^{\pm} \frac{|\lambda|}{\lambda} + B_2^{\pm} \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (8)$$

где  $A_1^{\pm}$ ,  $A_2^{\pm}$ ,  $B_1^{\pm}$ ,  $B_2^{\pm}$  - известные константы.

Такие оценки приведены в работах [1,4] для случая расширений и в работе [5] для случая патрубков.

Используя представления полей (5-6), условия сопряжения, граничное условие (4), асимптотические оценки (7-8) и параметрическое представление сингулярного интегрального оператора, для всех рассматриваемых случаев получены сингулярные интегральные уравнения (СИУ) первого рода:

$$(Sh)(z) + a^H (Vh)(z) + b^H (Kh)(z) = f^H(z), \quad (9)$$

с дополнительным условием

$$\int_L F^H(\xi) h(\xi) d\xi = c^H; \quad (10)$$

и

$$(Sg)(z) + b^E (Kg)(z) = f^E(z), \quad (11)$$

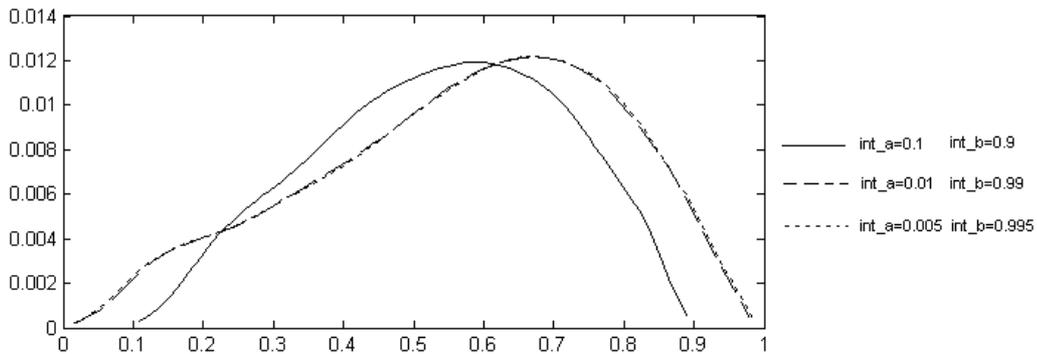
с дополнительным условием

$$\int_L F^E(\xi) g(\xi) d\xi = c^E, \quad (12)$$

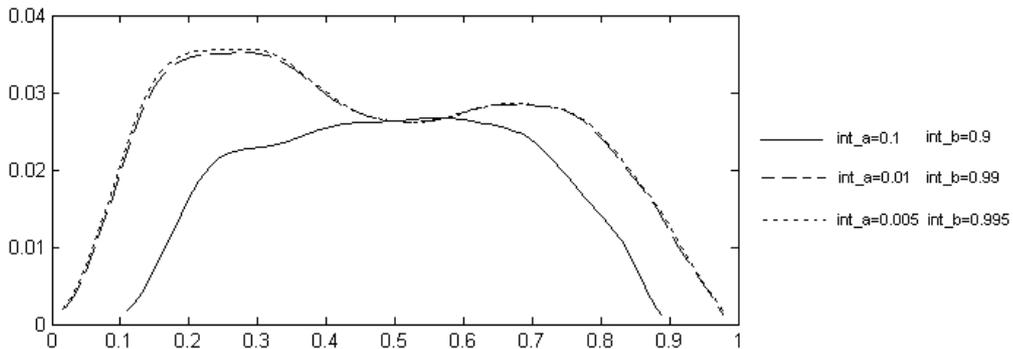
где  $a^H$ ,  $b^H$ ,  $b^E$ ,  $c^H$  и  $c^E$  - известные константы;  $S$  - сингулярный интегральный оператор;  $V$  - интегральный оператор Вальтера;  $K^H$ ,  $K^E$  - интегральный оператор с гладким ядром;  $f^H(z)$ ,  $f^E(z)$ ,  $F^H(\xi)$  и  $F^E(\xi)$  - заданные функции. Для гладких ядер получены явные выражения в каждом рассмотренном случае.

**Дискретная математическая модель.** Дискретизацию проведем по методу дискретных особенностей [6]. Используя линейные замены переменных в интегралах переходим от  $L_q$  к интервалу  $(-1,1)$ . Заменяя неизвестные функции и ядра их интерполяционными полиномами ищем приближенные решения задачи. Выбирая в качестве точек интерполяции нули полиномов Чебышева I рода, а для точек коллокации нули полиномов Чебышева II рода и применяя квадратурные формулы интерполяционного типа [7] к системам интегральных уравнений (9, 10), сводим их к системам линейных алгебраических уравнений, через решение которой получаем приближенные (с контролируемой точностью) выражения для физических величин.

Проведен численный эксперимент по вычислению характеристик электромагнитного поля. На рис. 2-3 представлены поля полученные в ходе численного эксперимента для волновода с одним патрубком заполненного диэлектриком с параметрами  $R=1$ ,  $h=1$ ,  $w_a=0$ ,  $w_b=1$ .



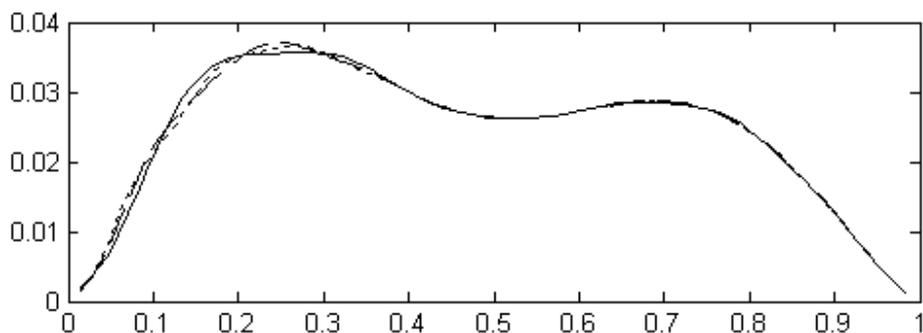
**Рис. 2.** Модули компоненты электрического поля  $|E_\phi(z, R)|$  в раскрытие патрубке при  $\varepsilon^+ = 4$   $\varepsilon^- = 5$



**Рис. 3.** Модули компоненты электрического поля  $|E_\phi(z, R)|$  в раскрытие патрубке при  $\varepsilon^+ = 5$   $\varepsilon^- = 5$

Следует отметить, что предложенная дискретная математическая модель на базе МДО обеспечивает устойчивый счет и достаточно быструю сходимость приближенных физических величин к точным. На рис. 4 изображено поле в волноводе с патрубком при различном числе точек

интерполяции, волновод выбирался со следующими параметрами  $R=1$ ,  $h=1$ ,  $w_a=0$ ,  $w_b=1$ ,  $int_a=0,005$ ,  $int_b=0,995$ ,  $\varepsilon^+=5$   $\varepsilon^-=5$ .



**Рис. 4.** Модули компоненты электрического поля  $|E_\phi(z, R)|$  в раскрыве патрубков при различном числе точек интерполяции 30, 45, 60

Автор благодарен профессору Ю.В. Ганделю за постановку задачи и интерес к работе.

#### Литература

1. Гандель Ю.В., Стешенко С.А. Математические модели некоторых аксиально-симметричных задач волноводной дифракции. // Электромагнитные волны и электронные системы, №6, т.7, 2002 с.12-31.
2. Капилевич Б.Ю., Трубахин Е.Р. Волноводно-диэлектрические фильтрующие структуры. М.: «Радио и связь» 1990. – 272 с.
3. Гроднев И.И., Ларин Ю.Т., Теумин И.И. Оптические кабели: конструкции, характеристики, производство и применение /. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 264 с.: ил.
4. Духопельников С.В. Математическая модель для расчета гофрированного волновода на базе сингулярных интегральных уравнений и метода дискретных особенностей. // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2006. – № 733. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 6. – С. 117-133
5. Духопельников С.В. Математические модели для расчета дифракции в цилиндрическом волноводе с патрубками частично заполненными диэлектриком. // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2007. – № 775. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 7. – С. 140-151
6. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики. Вопросы кибернетики. – М.: Изд-во АН СССР, 1986, ВК124, с. 166-183.
7. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145с.

# ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

О.В. Иванисова

Россия, Кубанский государственный университет

В данной работе представлена методика расчета распределения давления, суммарной нормальной силы и суммарного момента, действующих на пластинку бесконечного размаха, на основе решения сингулярного интегрального уравнения, к которому сводится краевая задача вынужденных колебаний тонкой пластинки в несжимаемой весомай жидкости.

Рассматриваются безвихревые течения несжимаемой весомай жидкости около колеблющейся пластинки бесконечного размаха длины  $2\ell$ , погруженной на глубину  $h$ . Течение описывается потенциалом  $\varphi(x, y, t)$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  на полуплоскости  $y < h$  кроме  $G = \{y = 0, x \in [-\ell, +\ell]\}$ .

Будем рассматривать гармонические колебания пластинки и примем  $\ell = 1$ . Зависимость потенциала скорости от времени представляется в виде:

$$\varphi(x, y, t) = \overline{\varphi}(x, y)e^{-i\omega t},$$

где  $\overline{\varphi}(x, y)$  – комплексная амплитуда потенциала скорости. На кромках пластинки выполняется условие непротекания

$$\varphi_y = v_y(x, y) = \overline{v}_y(x) \cdot e^{-i\omega t}, \quad x, y \in G,$$

где  $\overline{v}_y(x)$  – заданная комплексная амплитуда вертикальной скорости точек пластинки.

В дальнейшем черточки над комплексными амплитудами будем опускать, а от выражений содержащих временной экспоненциальный множитель  $e^{-i\omega t}$  следует брать только действительную часть.

На свободной поверхности необходимо выполнить условие постоянства давления  $p = p_\infty$ .

$$p = p_\infty - \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\varphi\right) - \rho g \eta,$$

где  $\eta = \eta(x)e^{-i\omega t}$  – отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня  $y = h$ ;  $\mu > 0$  – коэффициент диссипативных сил, который в окончательном решении должен устремляться к нулю.

Для рассматриваемого случая гармонических колебаний возмущенное давление

$$p - p_\infty = \rho(i\omega - \mu)\varphi - \rho g \eta.$$

Колебания пластинки вызывают волновые движения жидкости, при этом волны распространяются от пластинки на бесконечность, как в положительном, так и отрицательном направлении оси  $Ox$ . При этом потенциал скорости на бесконечности должен удовлетворять условиям излучения, которые будут иметь вид:

$$\varphi = B_{\pm} e^{\pm i \sigma x} \text{ при } x \rightarrow \pm \infty,$$

где  $\sigma$  – действительная константа.

Вблизи кромок потенциал должен быть ограничен по абсолютной величине, хотя производные по  $x$  могут иметь особенности интегрируемого порядка.

Для решения поставленной задачи введём неизвестную финитную функцию  $\gamma(x)$  – вихревую интенсивность, связанную с перепадом давления вдоль пластинки формулой:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) = (i\omega - \mu) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right).$$

Здесь индексы 1 и 2 указывают величины, относящиеся соответственно к верхней и к нижней поверхности пластинки.

Применив преобразование Фурье

$$F[\varphi_k](\alpha, y) = \Phi_k(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad k = 1, 2,$$

$$F[\gamma](\alpha) = \Gamma(\alpha) = \int_{-1}^1 \gamma(x) e^{i\alpha x} dx,$$

получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -\alpha^2 \Phi_{1,2} + \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = V(\alpha) \text{ при } y = 0, \\ -\omega^2 \Phi_1 - i\mu\omega \Phi_1 + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0 \text{ при } y = h, \\ \Phi_2 \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $V(\alpha) = F \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) \right](\alpha)$ .

Решая полученную задачу (1), придём к соотношению:

$$\frac{|\alpha| \Gamma(\alpha)}{2i\alpha} \left( 1 + \frac{\omega^2 + i\mu\omega + g|\alpha|}{\omega^2 + i\mu\omega - g|\alpha|} e^{-2|\alpha|h} \right) = V(\alpha).$$

Осуществляя обратное преобразование Фурье, используя теорему о свертке и теорию вычетов, приходим к интегральному уравнению:

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(s) k(x-s) ds = -v_y(x), \quad (2)$$

где  $k(x) = k_1(x) + ik_2(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4h^2} \right) -$

$$-v \operatorname{sgn} x \cdot (\cos v|x| + i \sin v|x|) e^{-2vh} + v \frac{\operatorname{sgn} x}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\beta|x|} \frac{v \cos 2\beta h + \beta \sin 2\beta h}{v^2 + \beta^2} d\beta,$$

$$v = \frac{\omega^2}{g}.$$

Для численного решения уравнения (2) применим метод дискретных вихрей [1]. Неизвестная функция  $\gamma(x)$  ищется в классе функций, неограниченных на краях пластинки с дополнительным условием безциркуляционного обтекания

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(s) ds = 0,$$

что обеспечивает ограниченность давления на краях.

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) k(x_i - s_j) = -v_y(x_i), \\ \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

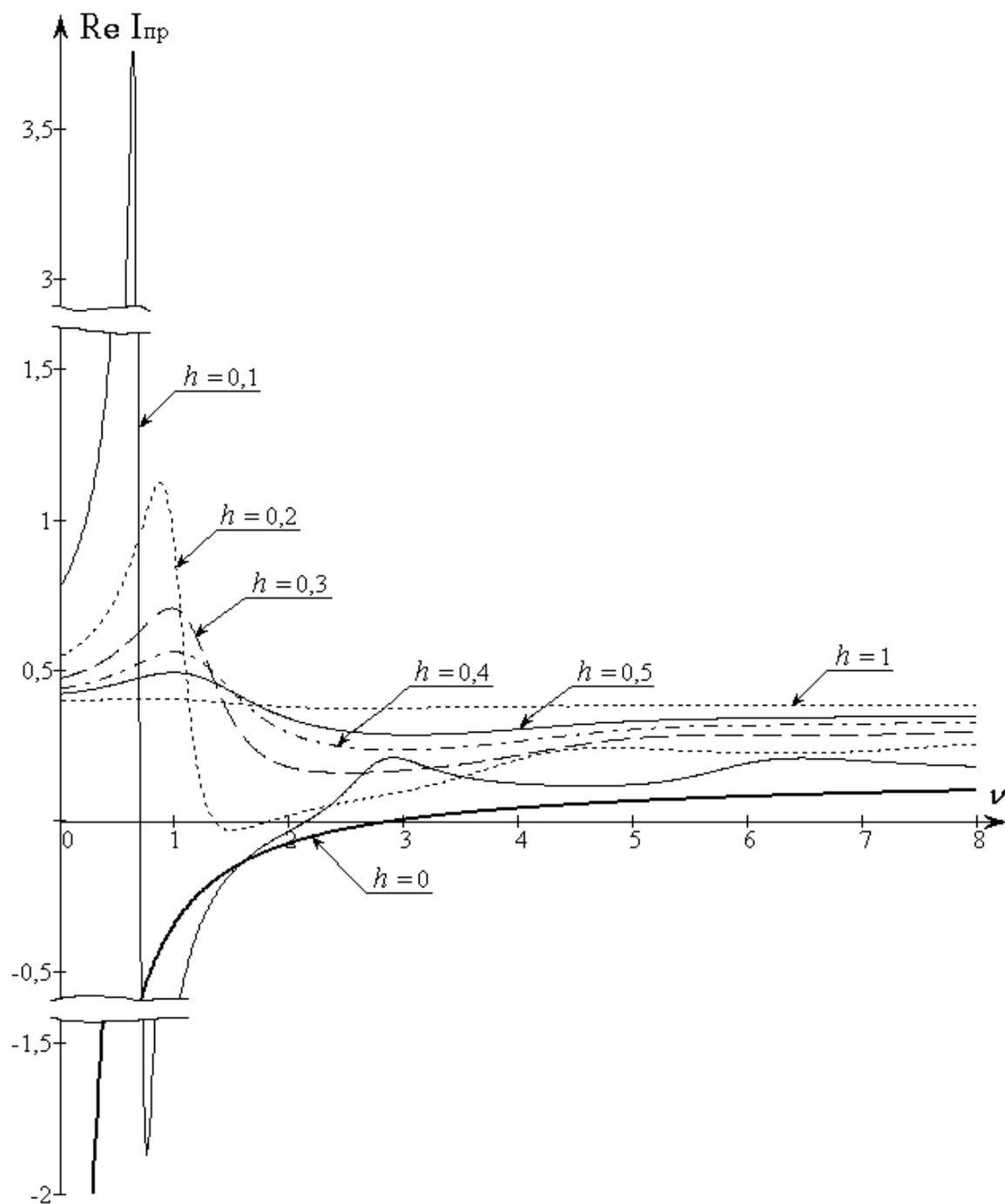
где  $x_i = -1 + \frac{4i-1}{2N-1}$ ,  $s_j = -1 + \frac{4j-3}{2N-1}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ .

Решая систему (3), найдем интенсивность вихрей  $\gamma(s_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , с помощью которой можно найти присоединённый момент инерции:

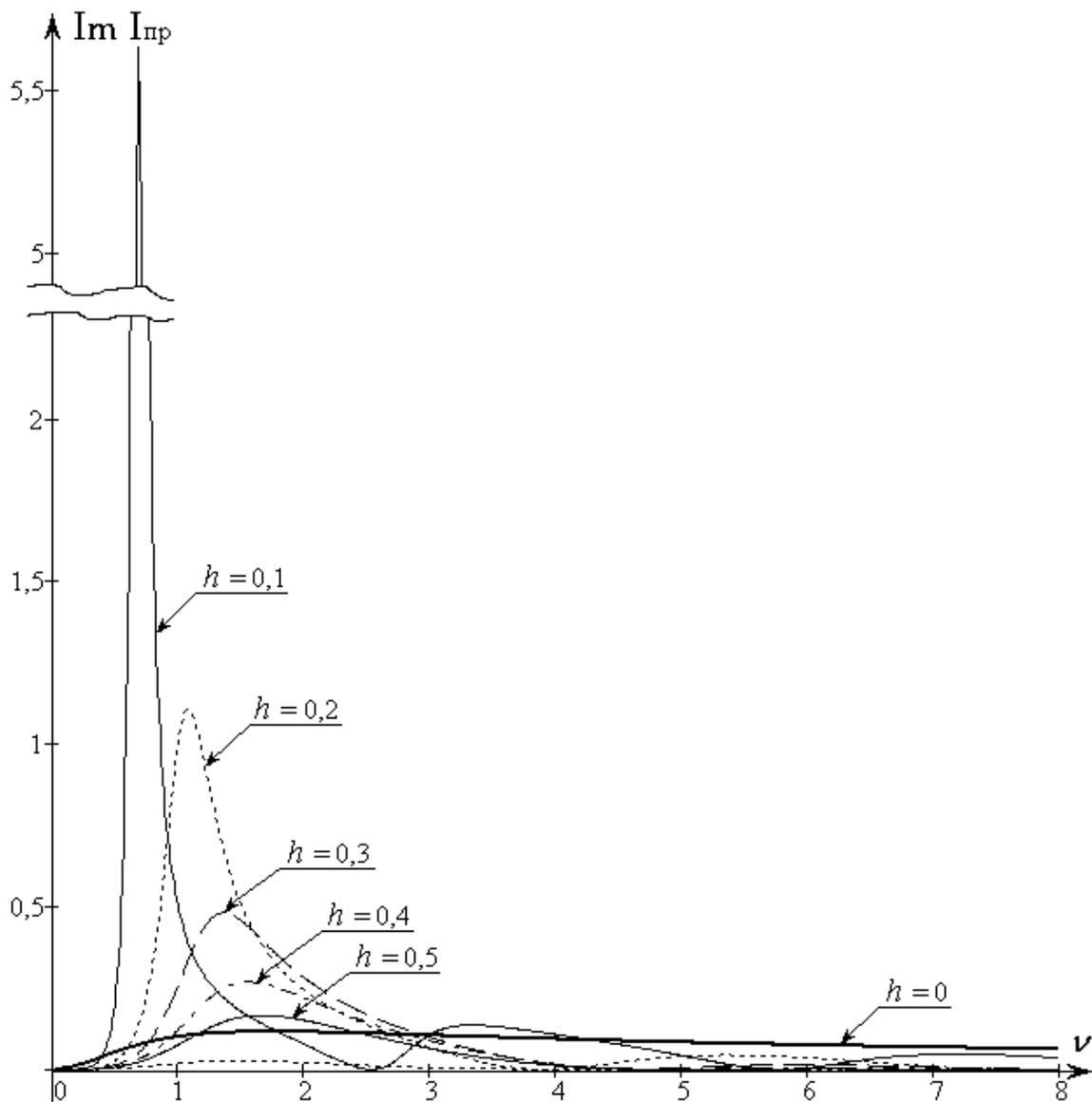
$$I_{np} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} s^2 \gamma(s) ds.$$

В работе [2] был рассмотрен пример симметричных колебаний тонкой пластинки и показано, что амплитуда подъёмной силы ведёт себя немонотонно.

В данной работе рассматриваются несимметричные колебания пластинки при  $v_y = x$ ,  $N = 50$ . На рисунках 1 и 2 представлены серии кривых вещественной и мнимой частей (соответственно) присоединённого момента инерции при погружении пластинки на глубину  $h = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 1$ . Эти рисунки показывают, что при малых погружениях пластинки присоединённый момент инерции носит немонотонный характер. Обращает на себя внимание тот факт, что с увеличением частоты  $v$  происходит резкое падение  $I_{np}$  после глобального максимума, положение которого зависит от глубины погружения  $h$ .



**Рис. 1.** Зависимость вещественной части присоединённого момента инерции от частоты  $\nu$  при разных значениях  $h$



**Рис. 2.** Зависимость мнимой части присоединённого момента инерции от частоты  $\nu$  при разных значениях  $h$

### Литература

1. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: Наука, 1965. – 242 с.
2. Ефремов И.И., Иванисова О.В. Колебания пластинки под свободной поверхностью весомой жидкости // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). – Харьков, 2005. С. 140-144.

## ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О РАБОТЕ ВОДОЗАБОРА В ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ С ИСТОЧНИКОМ ЗАГРЯЗНЕНИЯ<sup>1</sup>

А.А. Квасов

Россия, Орловский государственный университет

Исследована работа водозабора в слоях постоянной толщины в условиях поступательного потока грунтовых вод и источника загрязнения. Определён предельно-допустимый дебит водозабора, работающего без загрязнения, и исследовано влияние на него мощности нагнетательной скважины. При работе водозабора с загрязнением определена степень его загрязнения и исследовано влияние на неё дебита водозабора.

1. Современные численные методы решения актуальных задач практики требуют наличия тестовых задач, имеющих простые аналитические решения. Поэтому поиск новых аналитических решений фильтрационных задач имеет большое значение.

Рассмотрим плоскопараллельную линейную фильтрацию в однородном слое грунта с плоской горизонтальной подошвой в которой выберем прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$ . Фильтрационное течение обусловлено работой водозабора в условиях поступательного потока грунтовых вод и наличием источника загрязнения. Водозабор и источник загрязнения моделируем точечными эксплуатационной и нагнетательной скважинами, расположенными на комплексной плоскости  $z = x + iy$  соответственно в точках  $z_c = l$  и  $z_n = -l$  и имеющими мощности  $q_c$  и  $q_n$ . Поступательный поток грунтовых вод имеет скорость  $u$  которая направлена вдоль линии, соединяющей эксплуатационную и нагнетательную скважины. Полагая, что загрязнённая жидкость имеет те же физические свойства, что и чистая, при решении задачи используем модель разноцветных жидкостей. Следуя [1], фильтрационное течение в безграничной области  $D$  опишем комплексным потенциалом  $W = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$  и  $\psi$  — потенциал и функция тока) вида

$$W(z) = -uz - \frac{q_c}{2\pi} \ln(z - l) + \frac{q_n}{2\pi} \ln(z + l), \quad z \in D. \quad (1)$$

2. При эксплуатации водозабора в слое с источником загрязнения важно указать такой его максимально возможный дебит (мощность скважины), при котором загрязнение в водозабор не попадает. В случае загрязнения водозабора важно оценить степень его загрязнения. Особый интерес представляет исследование шлейфов загрязнения [2]. Поэтому возникает необходимость в построении областей захвата водозабора [1] и областей выброса загрязнения, образующихся в результате работы нагнетательной скважины. Указанные области ограничены линиями тока,

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

проходящими через критические точки течения. В этих точках линии тока ветвятся, а скорость фильтрации равна нулю. Учитывая, что комплексно сопряжённая скорость  $\bar{V} = V_x - iV_y$  связана с комплексным потенциалом равенством [1]:

$$\bar{V} = \frac{dW}{dz},$$

то, из (1) имеем уравнение для поиска критических точек  $z^*$  течения:

$$-u - \frac{q_c}{2\pi} \frac{1}{z^* - l} + \frac{q_n}{2\pi} \frac{1}{z^* + l} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$z_*^{(1,2)} = \frac{q_n - q_c}{4\pi u} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2)$$

где  $\Delta$  — дискриминант этого уравнения:

$$\Delta = \left( \frac{q_c - q_n}{2\pi u} \right)^2 - 4l^2 \left( \frac{q_c + q_n}{2\pi ul} - 1 \right). \quad (3)$$

Особенности расположения критических точек и их число зависит от  $\Delta$ . Проведённый анализ формул (2), (3) показал: если дебит нагнетательной скважины удовлетворяет условию

$$q_n < 4\pi ul, \quad (4)$$

а мощность водозабора — условию:

$$\frac{q_c}{4\pi ul} < \left( \sqrt{\frac{q_n}{4\pi ul}} - 1 \right)^2, \quad (5)$$

то в области  $D$  между источником и стоком на оси абсцисс расположены две критические точки. При этом,

$$\begin{cases} y_*^{(1)} = y_*^{(2)} = 0, \\ x_*^{(1,2)} = l \left( \frac{q_n - q_c}{4\pi ul} \pm \sqrt{\left( \frac{q_c - q_n}{4\pi ul} \right)^2 - \frac{q_n + q_c}{2\pi ul} + 1} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Если имеет место неравенство (4) и

$$\left( \sqrt{\frac{q_n}{4\pi ul}} - 1 \right)^2 < \frac{q_c}{4\pi ul} < \left( \sqrt{\frac{q_n}{4\pi ul}} + 1 \right)^2, \quad (7)$$

то две критические точки расположены симметрично относительно оси абсцисс:

$$\begin{cases} x_*^{(1)} = x_*^{(2)} = l \frac{q_n - q_c}{4\pi il}, \\ y_*^{(1,2)} = \pm l \sqrt{\frac{q_n + q_c}{2\pi il} - 1 - \left(\frac{q_c - q_n}{4\pi il}\right)^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Если имеет место неравенство (4) и

$$\frac{q_c}{4\pi il} > \left( \sqrt{\frac{q_n}{4\pi il}} + 1 \right)^2, \quad (9)$$

то две критические точки расположены за источником и их координаты определяются формулами (6).

Анализ формул (2), (3) показал, что при не выполнении условия (4) и выполнении условия (5) критические точки расположены на оси абсцисс перед эксплуатационной скважиной и их координаты имеют вид (6). При неверном условии (4) и верном (7) критические точки расположены симметрично относительно оси абсцисс и их координаты рассчитываются по формулам (8). При неверном условии (4) и верном (9) критические точки находятся на оси абсцисс за нагнетательной скважиной и их координаты имеют вид (6).

В силу особенности расположения водозабора и источника загрязнения относительно вектора скорости поступательного потока, водозабор работает с максимально возможным дебитом без загрязнения, если в области фильтрации имеется единственная точка и расположена она между скважинами. Отмеченное имеет место, если выполняется условие (4), а критический (максимально возможный) дебит водозабора

$$q_c^* = 4\pi il \left( \sqrt{\frac{q_n}{4\pi il}} - 1 \right)^2. \quad (10)$$

Зависимость  $q_c^*$  от корня квадратного из мощности источника загрязнения имеет квадратичный вид. Графиком этой зависимости является парабола, ветви которой направлены вверх. Учитывая расположение вершины рассматриваемой параболы и условие (4), заключаем, что с ростом  $q_n$  максимально возможный дебит водозабора, работающего без загрязнения, уменьшается. Формула (10) в частном случае совпадает с выражением для критического дебита, указанного в [2], где  $\lambda = 0$ . Также, при  $q_n = 0$  формула (10) даёт результат, отмеченный в [1].

При не выполнении условия (4) эксплуатационная скважина работать без загрязнения не может, ибо уже при  $q_c = 0$  загрязнение достигает точки забоя водозабора. При выполнении условия (5), количество загрязнённой жидкости в эксплуатационной скважине равно её дебиту. С увеличением

мощности эксплуатационной скважины, при условии (7), в неё начинает прорываться чистая жидкость и можно говорить о степени загрязнения водозабора [1]. Учтём, что количество загрязнённой жидкости, попадающей в водозабор, определяется значениями функций тока [1], которые, как показали исследования, при выполнении условия (7) проходят через критические точки (8). Тогда, выделяя в (1) мнимую часть, количество загрязнённой жидкости в водозаборе определяется выражением:

$$\Delta Q = \left| \psi(z_*^{(1)}) - \psi(z_*^{(2)}) \right| = 2ul \left| \frac{q_n}{2\pi ul} \operatorname{arctg} \frac{y_*}{x_* + l} - \frac{q_c}{2\pi ul} \operatorname{arctg} \frac{y_*}{x_* - l} - \frac{y_*}{l} \right|. \quad (11)$$

При выполнении условия (9) вся загрязнённая жидкость из нагнетательной скважины попадает в водозабор, а, учитывая, что с ростом дебита эксплуатационной скважины количество чистой жидкости в водозаборе увеличивается, то заключаем, что степень загрязнения вод в водозаборе начинает уменьшаться.

При выполнении условия (4) в водозабор может попадать загрязнение, если  $q_c > q_*$ , где  $q_*$  имеет вид (10). При выполнении условия (7) количество загрязнённой жидкости в эксплуатационной скважине можно рассчитать по формуле (11) с учётом (8). Если дебит водозабора удовлетворяет условию (9), то количество загрязнённой жидкости, попадающей в эксплуатационную скважину, равно мощности нагнетательной скважины. Считая, что источник загрязнения имеет заданную мощность, то, увеличивая мощность водозабора, увеличиваем в нём количество чистой воды при неизменном значении количества загрязнённой. Разбавляя таким образом загрязнение чистой водой, можно добиться режима работы водозабора при котором его степень загрязнения не превышает установленных норм и требований, предъявляемых потребителями.

**3.** Проведённые исследования могут быть продолжены и рассмотрены произвольные расположения водозабора и источника загрязнения. Подобные задачи возникают и могут представлять интерес при эксплуатации водозаборов в слоях грунта, содержащих источники загрязнения. Кроме того, решение рассмотренной задачи представляет интерес в том отношении, что с помощью различных конформных преобразований могут быть решены задачи с различной сетью главных направлений анизотропии [2].

### Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: «Высш. шк.». 1972. 368 с.
2. Квасов А.А. Исследование двумерных фильтрационных течений в кусочно-неоднородных слоях грунта с очагами загрязнения // Вестник Харьк. нац. ун-та., 2005. – № 661. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 4. – С. 134 – 141.

# МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПРОФИЛЯ В ОГРАНИЧЕННОМ СЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ

П.С. Липован

Россия, Кубанский государственный университет,  
e-mail: paolo5@pochta.ru

Математическое моделирование физического процесса использует метод замены несущей поверхности вихревым слоем из присоединенных вихрей. Задача с помощью преобразований Фурье сводится к интегральному сингулярному уравнению, ядро которого вычисляется с помощью теории вычетов. Численное решение использует распространенный метод дискретных вихрей.

В работе исследуются колебания тонкой пластинки в дозвуковом потоке идеальной сжимаемой жидкости, ограниченном сверху и снизу непроницаемыми плоскостями. Этот процесс можно рассматривать как колебание в противофазе в решетке без выноса.

При построении математической модели рассматриваемого процесса учитываются диссипативные силы, значения которых в окончательном решении устремляются к нулю, но их присутствие в уравнениях позволяет определять положение полюсов относительно полуплоскостей.

Считаем длину полухорды профиля и скорость невозмущенного потока за единицу длины и скорости. Заменяем несущую поверхность непрерывным вихревым слоем, тогда всюду вне тела и вихревого следа течение будет безвихревым и, следовательно, потенциальным. При этом неизвестными будут интенсивности присоединенных вихрей.

В системе координат, связанной с профилем, потенциал скоростей возмущенного движения с учетом диссипативного слагаемого удовлетворяет уравнению [1]

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{M}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

где  $M = \frac{V_\infty}{c}$  – число Маха,  $c$  – скорость звука в невозмущенном потоке

Рассмотрим гармонические колебания профиля, тогда

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{-i\omega t}, \quad V_y(x, t) = V_y(x) e^{-i\omega t}$$

где  $\varphi(x, y)$ ,  $V_y(x)$  – комплексные амплитуды.

В этом случае уравнение (1) с помощью преобразования Лоренца и замены  $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) e^{-i\nu x}$  сводится к уравнению Гельмгольца [1]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (\lambda^2 + i\omega \varepsilon_1) \varphi = 0, \quad \lambda = \frac{kM}{1 - M^2}, \quad k = \frac{\omega}{V_\infty} \quad (2)$$

Запишем граничные условия задачи с учетом преобразований:

1) непротекание профиля  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{V_y(x) e^{i\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad y = 0, \quad |x| < 1, \quad \nu = \frac{kM^2}{1 - M^2}$

- 2) условие непротекания твердых границ:  $\varphi_y = 0, y = \pm H, H = h\sqrt{1-M^2}$   
 3) условие Чаплыгина – Жуковского о конечности скоростей на острых задних кромках.

Перепад давления на несущей поверхности создают только присоединенные вихри напряженности  $\gamma(x)$ . Связь давления с потенциалом скорости описывается интегралом Коши–Лагранжа, тогда с учетом диссипативных сил

$$\gamma(x) = [\varphi_x - i\mu\varphi + \varepsilon_2\varphi], |x| \leq 1, \mu = \frac{k}{1-M^2}$$

Под действием преобразования Фурье  $\Phi(\alpha, y) = \int \varphi(x, y)e^{i\alpha x} dx$  уравнение Гельмгольца сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + (\lambda^2 - \alpha^2 + i\omega\varepsilon_1)\Phi = 0$$

$$\Phi(\alpha, y) = \begin{cases} \Phi_1(\alpha, y), y > 0 \\ \Phi_2(\alpha, y), y < 0 \end{cases}$$

Краевые условия задачи в пространстве обобщенных функций:

$$\Phi_{1y}(\alpha, y)|_{y=0} = \Phi_{2y}(\alpha, y)|_{y=0} = V(\alpha), \quad \text{где } V(\alpha) = \int \varphi_y(x, 0)e^{i\alpha x} dx$$

$$\Phi_{1y}(\alpha, y)|_{y=H} = \Phi_{2y}(\alpha, y)|_{y=-H} = 0 \quad (3)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int \gamma(x)e^{i\alpha x} dx = \int [\varphi_x - i\mu\varphi + \varepsilon_2\varphi]e^{i\alpha x} dx = (-i\mu - i\alpha - i^2\varepsilon_2) \int [\varphi]e^{i\alpha x} dx$$

Краевая задача в пространстве обобщенных функций приводит к функциональному уравнению

$$\Gamma(\alpha) \frac{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - i\omega\varepsilon_1}}{2i(\alpha + \mu + i\varepsilon_2)} th(H\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - i\omega\varepsilon_1}) = V(\alpha) \quad (4)$$

Обратное преобразованием Фурье есть свертка финитной обобщенной функции и обобщенной функции медленного роста [2]. Запишем свертку этих функций с учетом финитности  $\gamma(s)$

$$\int_{-1}^1 \gamma(s)k(x-s)ds = V_y(x) \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1-M^2}} \quad (5)$$

$$\text{где } k(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - i\omega\varepsilon_1}}{\alpha + \mu + i\varepsilon_2} th\left(H\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2 - i\omega\varepsilon_1}\right) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6)$$

Это основное интегральное уравнение задачи, так как через неизвестную интенсивность  $\gamma(x)$  выражается коэффициент подъемной силы  $C_y$

Для вычисления ядра интегрального уравнения воспользуемся теорией вычетов. Разобьем комплексную плоскость на две полуокружности большого радиуса.

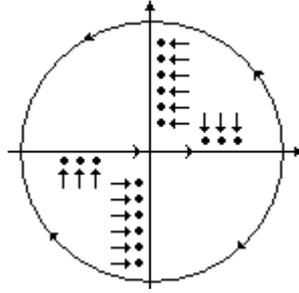


Рис. 1. Расположение полюсов на плоскости

Диссипативное слагаемое позволяет определить, как полюс подходит к осям координат.

Вычеты в простых полюсах подынтегральной функции (6):

$$1) \alpha = -\mu - i\varepsilon_2.$$

$$2) \alpha_k^2 = \lambda^2 - (2k-1)^2 \left( \frac{\pi}{2h} \right)^2 + i\varepsilon_1$$

$\alpha_k = \pm \sqrt{\lambda^2 - b_k^2}$ ,  $k \in \left[ 1, \frac{1}{2} + \frac{\lambda H}{\pi} \right]$  – конечное число действительных полюсов, а  $\alpha_k = \pm i \sqrt{b_k^2 - \lambda^2}$  – бесконечное число чисто мнимых.

При вычислении ядра  $k(x)$ ,  $x < 0$  контур интегрирования замкнут в верхней полуплоскости и сумма вычетов равна

$$k(x) = 2\pi i \sum_{\text{Im}(\alpha_k) > 0} \text{res } f(\alpha_k) = \frac{1}{2H} \sum_{\text{Im}(\alpha_k) > 0} \frac{b_k^2 e^{-i\alpha_k x}}{b_k^2 - \lambda^2}, \quad \text{где } -b_k^2 = \alpha_k^2 - \lambda^2$$

При вычислении ядра  $k(x)$ ,  $x > 0$  контур интегрирования замкнут в нижней полуплоскости

$$k(x) = -2\pi i \sum_{\text{Im}(\alpha_k) > 0} \text{res } f(\alpha_k) = \frac{-1}{2H} \sum_{\text{Im}(\alpha_k) > 0} \frac{b_k^2 e^{-i\alpha_k x}}{b_k^2 - \lambda^2} - \frac{1}{2H} i\lambda H \cdot \text{th}(i\lambda H)$$

Для численного решения интегрального уравнения (5) используем метод дискретных вихрей. Для этого заменим непрерывный вихревой слой профиля  $N$  дискретными вихрями [3], разделив хорду профиля на  $N$  частей. Координаты присоединенных вихрей располагаются в точках хорды, отстоящих на расстоянии  $1/4$  длины каждого участка от его начала, а контрольные точки – на расстоянии  $1/4$  длины участка от его конца. Тогда сумма, которой заменяется сингулярный интеграл (6), определяющий скорость от распределенного вихревого слоя, будет иметь вид

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) k(x_i - s_j) = V_y(x_i) \frac{e^{i\nu x_i}}{\sqrt{1-M^2}}$$

С учетом действительных и мнимых частей:

$$\sum_{j=1}^N (\gamma_1(s_j) + i\gamma_2(s_j)) (k_1(x_i - s_j) + ik_2(x_i - s_j)) = (V_{1y}(x_i) + iV_{2y}(x_i)) \frac{e^{i\nu x_i}}{\sqrt{1-M^2}}$$

Безразмерные координаты присоединенных вихрей  $s_i$  и точек коллокаций  $x_i$  определяются следующим образом

$$x_i = -1 + \left(i - \frac{1}{4}\right) \frac{2}{N}, \quad s_i = -1 + \left(i - \frac{3}{4}\right) \frac{2}{N}$$

Из решения системы найдем неизвестную интенсивность.

Для вычисления подъемной силы нужно совершить соответствующий переход от интеграла к сумме

$$C_y = \int_{-1}^1 \gamma(s) e^{-ivs} ds = \int_{-1}^1 (\gamma_1(s) + i\gamma_2(s)) (\cos(vs) - i \sin(vs)) ds$$

$$Re(C_y) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma_1(s_i) \cos(vs_i) + \gamma_2(s_i) \sin(vs_i))$$

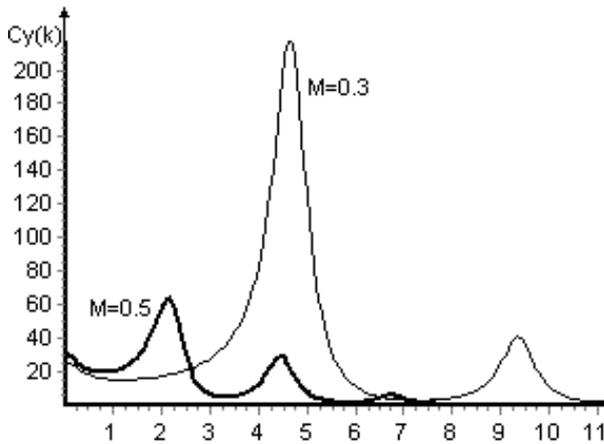


Рис. 2.  $C_y(k)$  при  $h = 0.2$

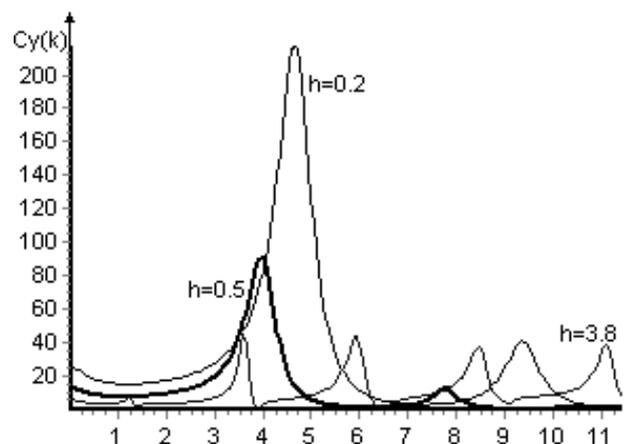


Рис. 3.  $C_y(k)$  при  $M = 0.3$

Реализация численного алгоритма позволяет вычислять интенсивность вихревого слоя и на основе этих данных – аэродинамические характеристики. Для тестирования результатов численного эксперимента использовались расчеты приведенные в [4]. Сравнивая расчеты, можно заключить, что результат численного эксперимента совпадает с тестовым примером для малых отстояний, а погрешность вычислений увеличивается при увеличении числа Струхала  $k$ .

### Литература

1. Горелов Д.Н. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. – М.: Наука, 1971. – 273 с.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. Белоцерковский С.М. Крыло в нестационарном потоке газа. – М.: Наука, 1971.
4. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. – М.: Наука, 1969. – 332 с.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ОХЛАЖДАЮЩЕГО ТЕРМОЭЛЕМЕНТА

О.И. Марков

Россия, Орловский государственный университет,  
e-mail: O.I.Markov@mail.ru

**Проведено компьютерное моделирование низкотемпературного термоэлемента в режиме максимального перепада температуры. Выявлены предельные возможности термоэлектрического охлаждения в интервале температур 50-90 К.**

Растущий интерес к созданию низкотемпературных (ниже 120 К) термоэлектрических охлаждающих устройств космического базирования связан с программами полетов на Луну и Марс. Вместе с тем известно, что термоэлектрическая добротность большинства термоэлектриков с понижением температуры резко падает. Исключение составляют твердые растворы висмут-сурьма в полупроводниковой области, которые известны как наиболее эффективные низкотемпературные термоэлектрики. Обычно эти сплавы рассматриваются в качестве термоэлектрических материалов при температурах выше точки кипения азота. Однако в настоящее время представляет интерес исследовать возможности термоэлектрического охлаждения и в области вблизи и ниже температуры кипения азота. С этой целью в данной работе проведены расчеты максимального перепада температуры в термоэлементе с использованием экспериментальных данных по кинетическим эффектам, позволяющие выявить предельные возможности низкотемпературного термоэлектрического охлаждения при низких температурах с использованием твердых растворов  $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ . Известно, что высокой термоэлектрической эффективностью в области низких температур обладают только сплавы висмут - сурьма n-типа. Поскольку не существует достойной по уровню эффективности низкотемпературной ветви р-типа, предлагается [1] использовать в качестве второй ветви термоэлектрически пассивную, в частности из высокотемпературного сверхпроводника.

Авторами работы [1] было проведено экспериментальное исследование предельных возможностей термоэлектрического охлаждения при температуре жидкого азота с использованием в качестве пассивной ветви высокотемпературного висмутового сверхпроводника  $BiSrCaCu_2O_x$ . Длина пассивной ветви составляла 12 мм, однако не понятно, почему авторами была выбрана именно эта длина. Поэтому следовало выяснить, насколько удачен был выбор этой длины и рассчитать зависимость перепада температур от длины пассивной ветви, что позволило бы выбрать оптимальную длину сверхпроводящей ветви, т.е. выявить действительные предельные возможности термоэлемента.

Согласно общепринятому подходу для характеристики эффективности термоэлемента используется параметр термоэлектрической добротности

$$Z = \frac{(\alpha_p - \alpha_n)^2}{(\sqrt{\chi_p \rho_p} + \sqrt{\chi_n \rho_n})^2} \quad (1)$$

где  $\alpha_i, \rho_i, \chi_i$  - термоэдс, удельное сопротивление и удельная теплопроводность материалов п и р-ветвей. Однако следует отметить, что параметр  $Z$  в случае с пассивной сверхпроводниковой ветвью, определяемой формулой (1) уже не может охарактеризовать добротность термоэлемента, т.к. при  $\alpha_n = \rho_n = 0$  термоэлектрическая добротность термопары (1) сводится к добротности только одной активной ветви. В то же время очевидна ошибочность такого заключения, т.к. теплопроводность сверхпроводника также должна влиять на максимальный перепад температур, а, следовательно, вносить вклад в величину параметра термоэлектрической добротности термоэлемента. Поэтому воспользоваться параметром (1) для оценки эффективности термоэлемента с пассивной ветвью не представляется возможным. Кроме того, термоэлектрическая эффективность сплавов висмут-сурьма в области температуры кипения азота сильно зависит от температуры и усреднение параметров по рабочему температурному интервалу согласно стандартной методике приводит к значительным погрешностям в расчете максимального перепада температуры. Авторы работы [1] использовали экспериментальные данные измерений термоэлектрических свойств в области выше температуры кипения азота, а это недостаточно для расчета параметров термоэлемента при использовании усредняющих процедур.

По этой причине для точного описания тепловых процессов в ветви термоэлемента следует пользоваться подходом, основанном на решении граничной задачи для стационарной теплопроводности для ветвей термоэлемента [2]. Температурное поле одномерной адиабатически изолированной ветви термоэлемента в установившемся режиме с учетом эффекта Томсона описывается стационарным уравнением теплопроводности

$$\frac{d}{d\xi} \left( \chi_n(T) \frac{dT}{d\xi} \right) + Y_n^2 \rho_n(T) - Y_n T \frac{d\alpha_n(T)}{dT} \frac{dT}{d\xi} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\chi_n(T) \frac{dT}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \alpha_n(T_0) Y_n T_0 - q_n, \quad T \Big|_{\xi=1} = T_{hot}, \quad (3)$$

где  $\alpha_n(T), \rho_n(T), \chi_n(T)$  - термоэдс, удельное сопротивление и удельная теплопроводность п- ветви как функции температуры,  $\xi = x/l_n$  - безразмерная переменная,  $T_0$  и  $T_{hot}$  - температура холодного и горячего конца ветви соответственно,  $Y_n = J_l/S_n$  - параметр, который условно можно

назвать «удельным» током,  $q_n = Ql_n/S_n$  - «удельный» тепловой поток,  $J$  - сила тока,  $Q$  - тепловой поток через пассивную ветвь,  $l_n$  - длина ветви,  $S_n$  - сечение ветви. Для решения граничной задачи использовались результаты температурных измерений кинетических коэффициентов монокристаллов сплавов  $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$  в интервале температур 4 - 300 К [3]. Экспериментальные зависимости термоэдс, удельного сопротивления и теплопроводности от температуры в направлении тригональной оси аппроксимировались степенными многочленами.

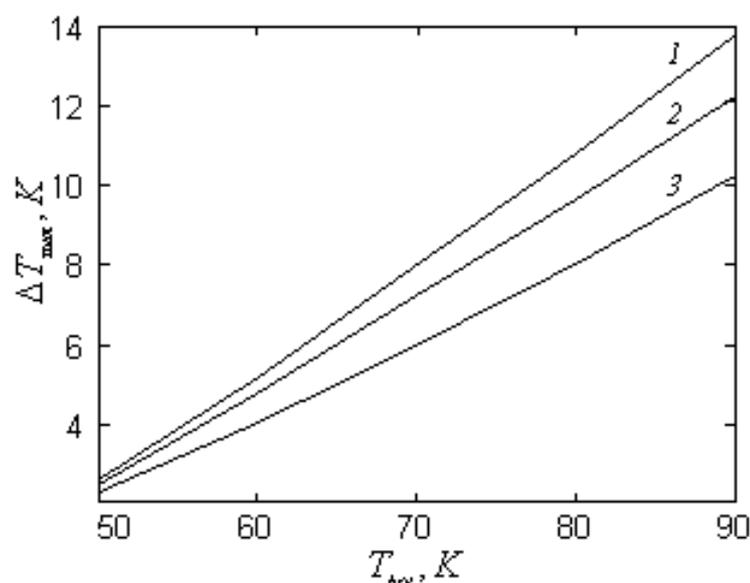
В пассивной ветви из сверхпроводника отсутствует выделение теплоты Джоуля и тогда, пренебрегая величиной его термоэдс, граничная задача будет выглядеть так

$$\chi_s(T) \frac{dT}{d\zeta} = q_n \frac{j_c l_s}{Y_n} \quad (4)$$

$$T|_{\zeta=0} = T_0, \quad T|_{\zeta=1} = T_{hot} \quad (5)$$

где  $\chi_s(T)$  - удельная теплопроводность сверхпроводника,  $\zeta = x/l_s$  - безразмерная переменная,  $j_c$  - плотность критического тока сверхпроводника,  $l_s$  - длина сверхпроводника. Температурная зависимость удельной теплопроводности сверхпроводника  $BiSrCaCu_2O_x$ , приведенная в работе [4], также была аппроксимирована степенным многочленом.

Граничные задачи (2),(3),(4),(5) решались численными методами. Термоэлемент рассчитывался в режиме максимального температурного перепада. Оптимизация максимального перепада температуры термоэлемента проводилась по величине  $Y_n$ . Для сравнения проведен расчет с той же n-ветвью  $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$  и лучшей на сегодня низкотемпературной p-ветвью [5] (твердый раствор  $Bi_{0.5}Sb_{1.5}Te_{2.91}Se_{0.09}$ ). Т.к. предельное сечения сверхпроводниковой ветви определяется критической плотностью тока ( $j_c = 120 A/cm^2$ ), то ее тепловое сопротивление определяется только ее длиной и поэтому максимальный перепад температур зависит от ее длины. Результаты представлены на рисунках. На рисунке приведены кривые зависимости максимального перепада от температуры горячего спая термоэлемента с пассивной ветвью из сверхпроводника бесконечной длины (кривая 1), сверхпроводника длиной 1 см (кривая 2) и p-ветвью из  $Bi_{0.5}Sb_{1.5}Te_{2.91}Se_{0.09}$  (кривая 3). Очевидно, что использование пассивной ветви в виде сверхпроводника бесконечной длины позволяет повысить максимальный перепад температуры по сравнению с лучшей активной ветвью p-типа.



**Рис.** Зависимость максимального перепада температуры термоэлемента от температуры горячего спая. Кривые 1, 2 и 3 отвечают термоэлементу с n-ветвью  $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$  и бесконечно длинной пассивной сверхпроводниковой ветвью, сверхпроводниковой ветвью длиной 0.01 м, с p-ветвью из термоэлектрика  $Bi_{0.5}Sb_{1.5}Te_{2.91}Se_{0.09}$  соответственно

Таким образом, подводя итоги численного моделирования низкотемпературного термоэлемента с пассивной ветвью, можно отметить, что использование в качестве пассивной ветви сверхпроводника более эффективно, чем использование самого лучшего термоэлектрика из известных низкотемпературных материалов p-типа, при этом пассивная ветвь из сверхпроводника должна быть, возможно, более длинной. В случае бесконечной длины она будет играть роль «теплового затвора» для холодного конца n-ветви, и эффективность термоэлемента будет равновелика добротности n-ветви. При критической плотности тока, характерной для рассматриваемого сверхпроводника 99% максимально возможного перепада может быть достигнуто при его длине не менее 60 мм.

### Литература

1. Кузнецов В.Л., Ведерников М.В., Яндль П., Бирхгольц У.//Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 18. С. 75.
2. Марков О.И.//Письма в ЖТФ. 2004. Т.30. В. 13. С.7.
3. Бойко М.П. Особенности явлений переноса в чистых и легированных сплавах висмут-сурьма. Дисс. ... канд. физ. - мат. наук. ИПФ. Кишинев.1986. 184 с.
4. Кириченко Ю.А., Русанов К.В., Тюрина Е.Г. //Сверхпровод. хим. физ. тех. 1990. Т. 3. №7. С. 1385.
5. Лукьянова Л.Н., Кутасов В.А., Попов В.В., Константинов П.П.//ФТТ. 2004. Т.46. В.7. С.1366.

## ЭВОЛЮЦИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ<sup>1</sup>

Т.А. Никольская

Россия, Орловский государственный университет,  
e-mail: nikolskyata@mail.ru

Строится дискретная схема задачи об эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном грунте. Эта схема тестируется на аналитическом решении.

### Постановка задачи

Рассмотрим плоскопараллельную фильтрацию в бесконечном кусочно-однородном и изотропном грунте. Граница раздела, отделяющая грунт проницаемости  $k_1$  от грунта проницаемости  $k_2$  произвольная кусочно-гладкая кривая  $L$ . В области фильтрации имеется совершенная горизонтальная скважина, расположенная в области с проницаемостью  $k_1$ .

Выберем декартову систему координат таким образом, что ось  $Oy$  будет направлена вертикально вверх, а ось  $Ox$  — горизонтально.

Течение жидкости в области фильтрации будем описывать потенциалом  $\varphi(M)$ , который удовлетворяет закону Дарси и уравнению неразрывности [1]

$$\vec{V}(M) = \nabla \varphi(M), \quad \left( \varphi(M) = -k \frac{\rho \vec{e}_g \vec{r}_M + P(M)}{\mu} \right), \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V}(M) = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{V}(M)$  — скорость фильтрации,  $P(M)$  — гидродинамическое давление,  $\vec{e}_g$  — орт вектора ускорения свободного падения  $\vec{g}$ . Скорость фильтрации связана с физической скоростью равенством:

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{r}_M}{dt}. \quad (3)$$

Уравнения (1) — (3) записаны в безразмерных величинах.

Из уравнений (1) — (2) следует, что потенциал  $\varphi(M)$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi(M) = 0. \quad (4)$$

На границе раздела грунтов выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкостей:

$$\varphi^+(M) \frac{1}{k_1} = \varphi^-(M) \frac{1}{k_2}, \quad \left( \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n_M} \right)^+ = \left( \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n_M} \right)^-, \quad M \in L. \quad (5)$$

Здесь «+» «-» означают предельные значения соответствующих функций при подходе к границе  $L$  со стороны нормали и со стороны

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

противоположной к нормали.

Функцию  $\varphi(M)$  будем искать в виде:

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \varphi_*(M). \quad (6)$$

Здесь  $\varphi_0(M)$  — описывает течение жидкости единичной вязкости и плотности в отсутствии границы  $L$ , а  $\varphi_*(M)$  — потенциал возмущения, вызванный наличием границы  $L$ .

Условия (4) для потенциала возмущения  $\varphi_*(M)$  примут вид

$$(1 - \lambda)\varphi_*^+(M) - (1 + \lambda)\varphi_*^-(M) = 2\lambda\varphi_0(M),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M}\right)^-, \quad M \in L, \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Если область фильтрации содержит бесконечно удалённую точку, то для потенциала возмущения согласно [2] потребуем выполнения условий регулярности:

$$\varphi_*(M) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \quad |\nabla\varphi_*(M)| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right), \quad r_{MN} \rightarrow \infty \quad (8)$$

Положение границы раздела жидкостей в начальный момент времени  $\Gamma_0$  зададим в параметрическом виде:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0, \zeta), \quad \text{где } \zeta \text{ — параметр.} \quad (9)$$

Для нахождения положения границы  $\Gamma_t$  в любой последующий момент времени  $t > 0$ , запишем дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \nabla\varphi_0(M) + \nabla\varphi_*(M), \quad M \in \Gamma_t. \quad (10)$$

Потенциал возмущения будем искать в виде: потенциала двойного слоя распределенного по границе  $L$  с плотностью  $g(N)$ :

$$\varphi_*(M) = \int_L g(N) \frac{\partial\Phi_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N, \quad M \in D. \quad (11)$$

Здесь  $\Phi_1(M, N)$  — первое фундаментальное решение уравнения (4) представляющее собой потенциал стока расход, которого равен -1. Продолжая (11) на границу  $L$ , получим:

$$\varphi_*^\pm(M) = \int_L g(N) \frac{\partial\Phi_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N \pm \frac{g(M)}{2}, \quad M \in L. \quad (12)$$

Подставляя (12) в граничные условия (7) (учитывая непрерывность нормальной производной потенциала двойного слоя) и уравнение движения границы  $\Gamma_t$  (10) (после преобразований согласно [4]) получаем интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма и дифференциальное уравнение движения границы  $\Gamma_t$  в виде:

$$g(M) - 2\lambda \int_L g(N) \frac{\partial \Phi_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N = 2\lambda \varphi_0(M), \quad M \in L, \quad (13)$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \nabla \varphi_0(M) + \int_L \frac{dg(N)}{dl_N} \left( \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial y_M} \vec{i} - \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial x_M} \vec{j} \right) dl_N, \quad M \in \Gamma_t.$$

Здесь  $\Psi_2(M, N)$  — второе фундаментальное решение уравнения (4), которое представляет собой функцию тока нормированного вихря, циркуляция которого равна -1.

Систему уравнений (13) совместно с условием (9) назовем основной системой уравнений.

Основная система уравнений решается численно методом дискретных особенностей [3]. Согласно этому методу граница  $\Gamma_t$  в каждый момент времени  $t_j$ ,  $j=1, 2, 3, \dots$  заменяется системой точек  $(x_m^j, y_m^j)$ ,  $m=\overline{1, n}$ , а кривая  $L$  заменяется системой точек  $(\xi_\kappa, \eta_\kappa)$   $\kappa=\overline{1, n_1}$ . Интеграл по  $L$  заменяется суммой, по формуле прямоугольников, а дифференциалы их разностными аналогами.

#### Сопоставление с аналитикой

В частном случае, когда граница раздела грунта различной проницаемости  $L$  представляет собой прямую, решение задачи (4)-(5) примет вид [1]

$$\varphi_1(M) = \frac{-q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2} - \lambda \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + y_0)^2}$$

$$\varphi_2(M) = (\lambda - 1) \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2} \quad (14)$$

Эволюция границы раздела жидкостей при  $\lambda = 0,5$  полученная путём численного решения (13) построена на рисунке 1.

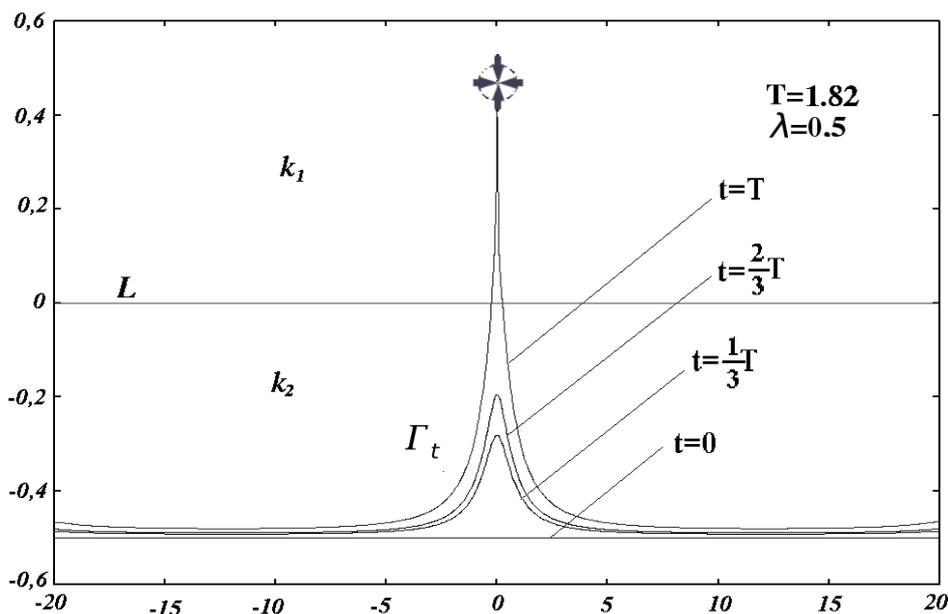
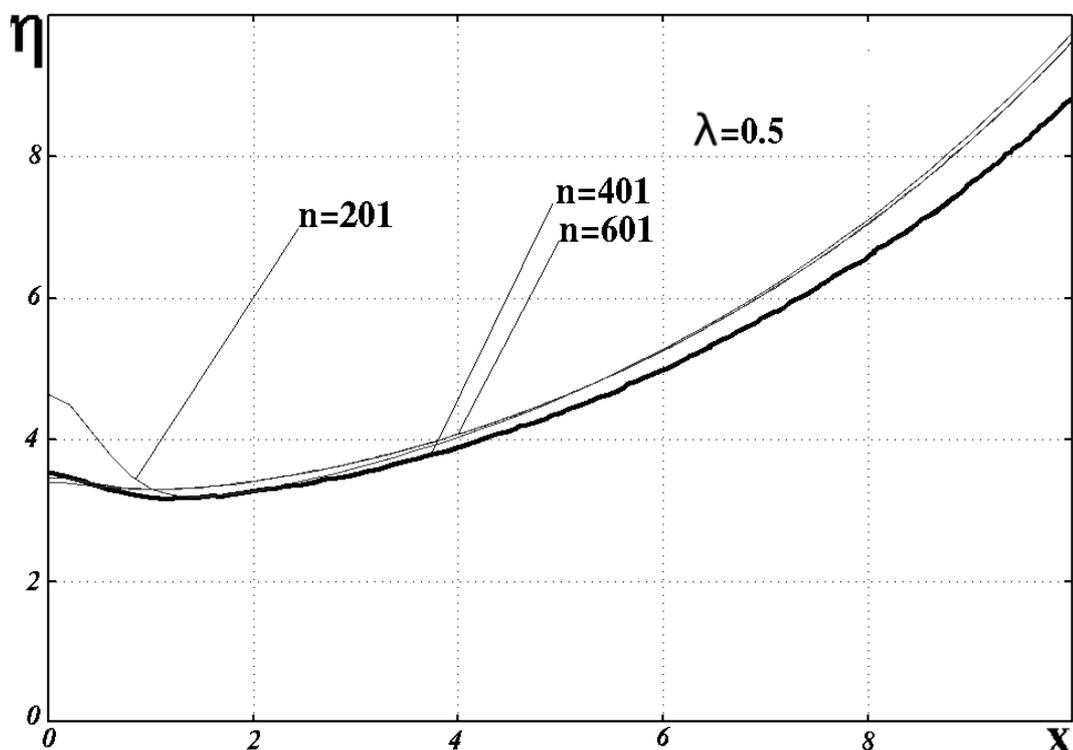


Рис. 1. Эволюция границы «разноцветных» жидкостей

На рисунке 2 построена зависимость  $\eta(x) = \left| 1 - \frac{V_n}{V_0} \right| \times 100\%$ ,  $V_n$  — модуль скорости смещения границы  $\Gamma_0$ , полученная численно, решением уравнений (13), а  $V_0$  — аналитическое значение скорости перемещения, полученное по формулам (14).



**Рис. 2.** Погрешность численного счета

Из рисунка 2 видно, что с ростом числа точек разбиения границ  $\Gamma_0$  и  $L$ , погрешность  $\eta$  численного счета уменьшается. Увеличение погрешности  $\eta$  происходит при увеличении абсолютного значения координаты  $x$ . Этот же результат можно увидеть на рисунке 1, а именно края границы  $\Gamma$  изогнуты вверх. Исходя, из физических соображений этого быть не должно, так как чем дальше точка находится от скважины, тем должно быть меньше возмущение. Этот результат связан с тем, что граничные кривые бесконечной длины заменили конечными отрезками. Аналогичные результаты получены в работе [3]. Метод уменьшения погрешности решения на концах изложены в работе [4].

Исследована численная схема задачи эволюции. В таблице 1 представлена зависимость времени заводнения скважины  $T$  от длины границы  $L$  для  $n = 401$ .

**Табл. 1.** Влияние длины  $L$  на время заводнения скважины

$G_t$ [-20;20] $\lambda=0,5$ $T_0=1,87$				
$L$	[-10;10]	[-20;20]	[-30;30]	[-40;40]
$T$	1,785	1,82	1,805	1,79
$\eta_1, \%$	6	3,3	3,6	4,5
$G_t$ [-20;20] $\lambda=-0,5$ $T_0=0,71$				
$L$	[-10;10]	[-20;20]	[-30;30]	[-40;40]
$T$	0,72	0,715	0,715	0,715
$\eta_1, \%$	1,4	0,7	0,7	0,7

Здесь  $\eta_1 = \left| 1 - \frac{T}{T_0} \right| \times 100\%$ ,  $T$  — время, полученное в результате численного решения, а  $T_0$  — время, полученное по формулам (14), (3), (9)

$$T_0 = \frac{\pi}{q} y_0^2 \left[ \frac{1-3\lambda}{(1+\lambda)^2} + \frac{8\lambda}{(1+\lambda)^3} \ln \left| \frac{2}{1-\lambda} + \frac{3}{1-\lambda} \right| \right].$$

Из полученных результатов видим, что для параметров  $\lambda = 0,5$  и  $\lambda = -0,5$   $T \approx T_0$  тогда, когда длина границы  $L$  не менее длины границы  $G_t$ .

### Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред // Учебное пособие для педвузов. М., «Высшая школа», 1972., 368 с.
2. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. // Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», полиграфическая фирма «Картуш», Орёл 2006.—508 с.
3. Никольский Д.Н. Вычисление скорости перемещения поверхности раздела жидкостей различной вязкости методом дискретных особенностей // Труды международных школ — семинаров «МДОЗМФ». Выпуск 2. Орел ОГУ 2003. с. 42-47.
4. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Канд. диссертация. Орёл. 2001. 191 с.

## ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ОТ ИСТОЧНИКА НА ОКРУЖНОСТИ ИЛИ ПРЯМОЙ<sup>1</sup>

Д.Н. Никольский

Россия, Орловский государственный университет

Найдены аналитические решения, описывающие течения, создаваемые источником, находящимся на непроницаемой окружности или прямой. Эти решения используются для решения конкретных задач практики, связанных с мониторингом загрязнения окружающей среды.

### 1. Источник на окружности или прямой

Рассмотрим плоскопараллельную фильтрацию в области  $D$ , содержащей непроницаемое включение, ограниченное кривой  $L$ . Течение жидкости описывает потенциал  $\varphi$  (функция тока  $\psi$ ) [1], удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\Delta\psi = 0) \quad \text{в} \quad D / L, \quad (1)$$

и условию непротекания

$$\partial_n\varphi = 0 \quad (\psi = const) \quad \text{на} \quad L / M_1. \quad (2)$$

Течение возмущается источником, расположенным в точке  $M_1$ .

Пусть  $L$  представляет собой окружность радиуса  $a$ , с центром в начале координат. Координаты источника  $M_1(a,0)$ . Тогда решение задачи (1) – (2) примет вид

$$\varphi = \frac{q}{\pi} \ln r_{M_1M} - \frac{q}{2\pi} \ln r_M, \quad (3)$$

$$\psi = \frac{q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M - a} - \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M}.$$

Отметим, что решение (3) можно получить предельным переходом в теореме об окружности [1].

Скорость фильтрации, соответствующая (3), имеет вид

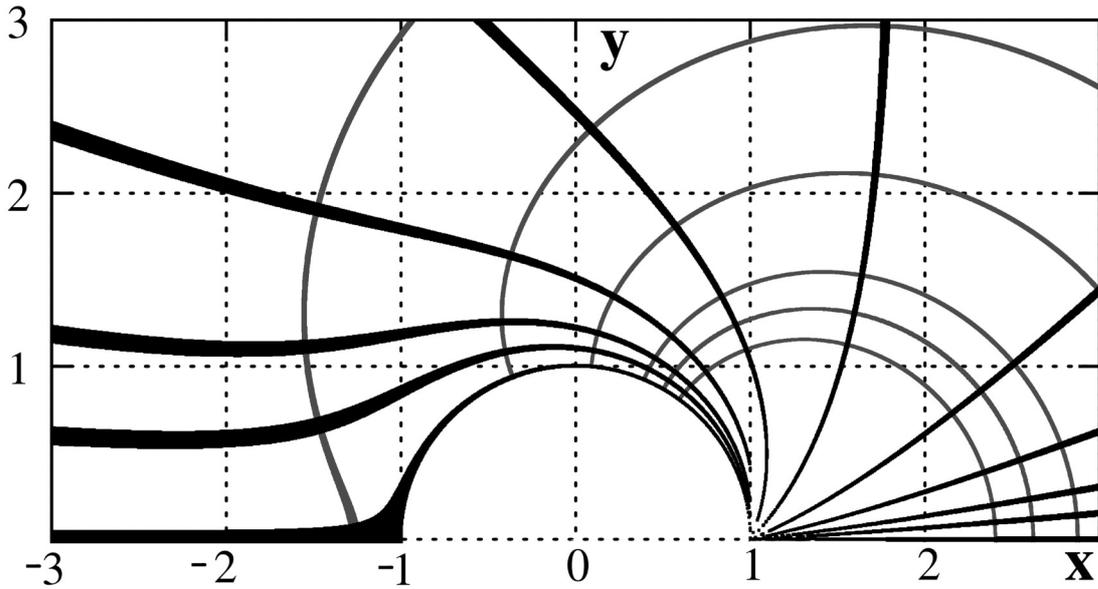
$$\vec{v} = \nabla\varphi = \frac{q}{\pi} \frac{\vec{r}_{M_1M}}{r_{M_1M}^2} - \frac{q}{2\pi} \frac{\vec{r}_M}{r_M^2}. \quad (4)$$

Линии тока и эквипотенциалы течения (3) построены на рис. 1, поле скоростей (4) – на рис. 2.

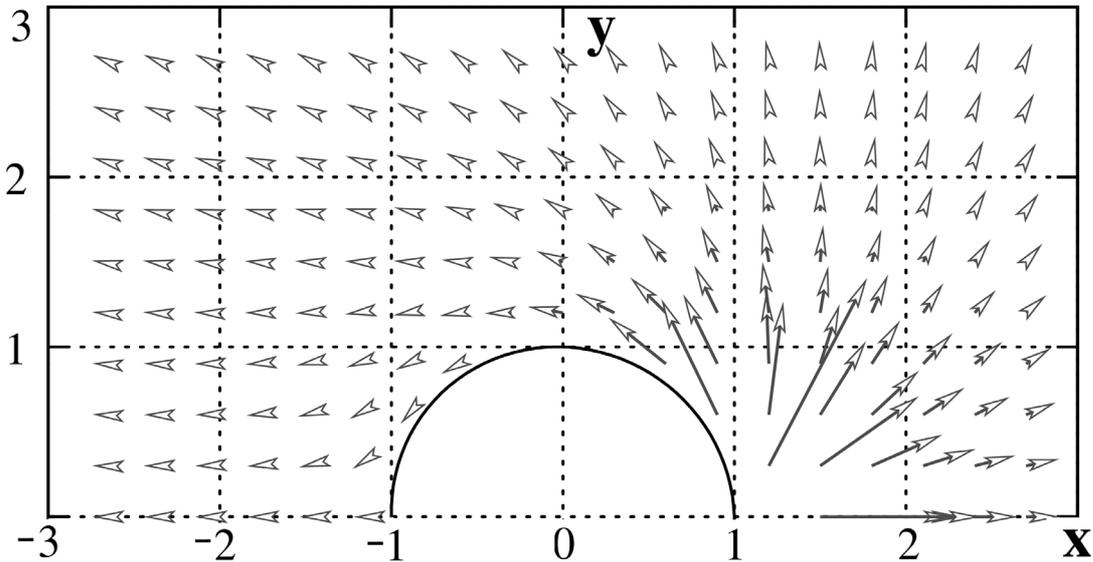
Пусть  $L$  представляет собой прямую ( $y=0$ ), координаты источника  $M_1(0,0)$ . Тогда решение задачи (1) – (2) примет вид

$$\varphi = \frac{q}{\pi} \ln r_M, \quad \psi = \frac{q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекта 06-01-96303).



**Рис. 1.** Линии поля и эквипотенциалы источника на окружности



**Рис. 2.** Поле скоростей для источника на окружности

## 2. Поиск очагов загрязнения

Пусть источник, выбрасывающий загрязнение, расположен на непроницаемой прямой  $y = 0$  в точке  $M_1(0,0)$ . Загрязнение от источника вымывается потоком, направленным против оси  $Ox$ .

Найдем область, загрязняемую источником. Для этого выпишем потенциал и функцию тока как суперпозицию решений (5) и поступательного потока [1]

$$\varphi = \frac{q}{\pi} \ln r_M - v_0 x_M, \quad \psi = \frac{q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M} - v_0 y. \quad (6)$$

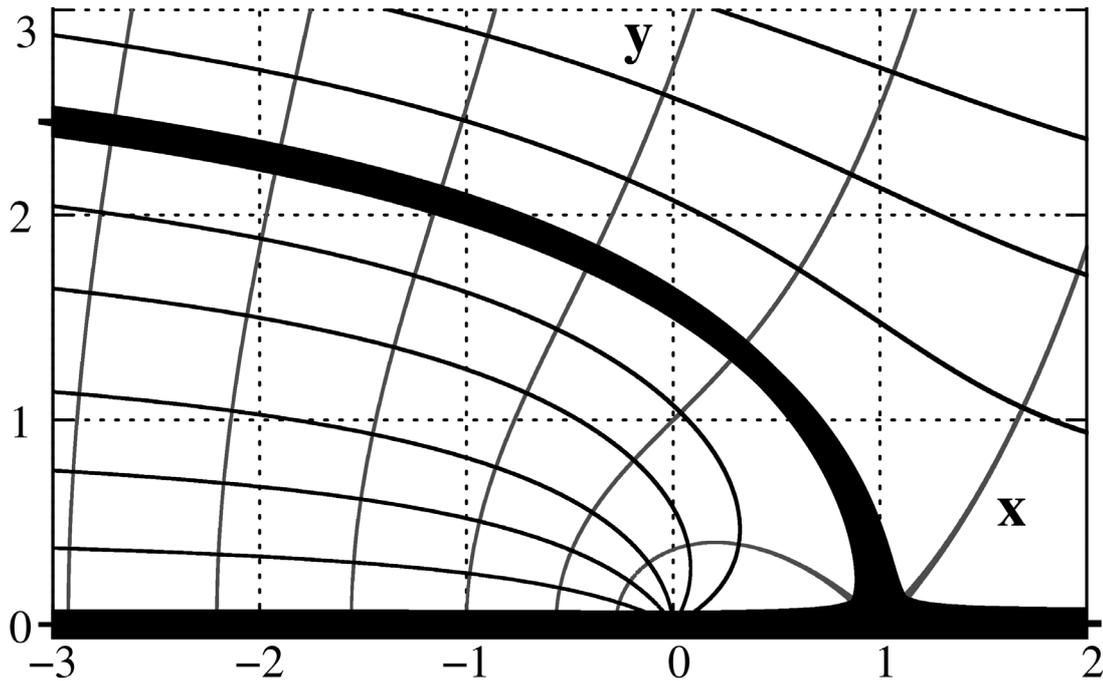
Скорость фильтрации решений (6) примет вид

$$\vec{v} = \frac{q}{\pi r_M^2} \vec{r}_M - \vec{v}_0. \quad (7)$$

Очевидно, что критическая точка течения [1] находится на оси Oх. Найдем ее, приравняв  $x$ -ую компоненту (7) к нулю

$$x_* = \frac{q}{\pi v_0}, \quad y = 0. \quad (8)$$

Граница области загрязнения проходит через эту точку и указана жирной линией на рис. 3. На этом рисунке за характерный размер принята величина  $L_0 = q/\pi v_0$ .



**Рис. 3.** Область загрязнения источника работающего в поступательном потоке на непроницаемой линии

### 3. Эволюция границы загрязнения

Расположим источник, выбрасывающий загрязнение, на окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат. Координаты источника  $M_1(a,0)$ . В начальный момент времени  $t = 0$  полагаем, что загрязнение ограничивается частью окружности малого радиуса  $r_1 \ll a$  с центром в  $M_1$

$$x = a + r_1 \cos \theta, \quad y = r_1 \sin \theta, \quad \theta \in \left[ \arccos \frac{r_1}{2a} - \pi, \pi - \arccos \frac{r_1}{2a} \right]. \quad (9)$$

Перемещение частиц жидкости границы загрязнения  $\Gamma_t$  в любой момент времени  $t$  найдем из дифференциального уравнения, связав физическую скорость со скоростью фильтрации [1]

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v} \quad \text{на} \quad \Gamma_t. \quad (10)$$

Уравнение (10), с учетом (4) и (9), решаем численно методом Эйлера [2]. На рис. 4 последовательные положения границы загрязнения  $\Gamma_t$  через одинаковые промежутки времени  $\tau$ .

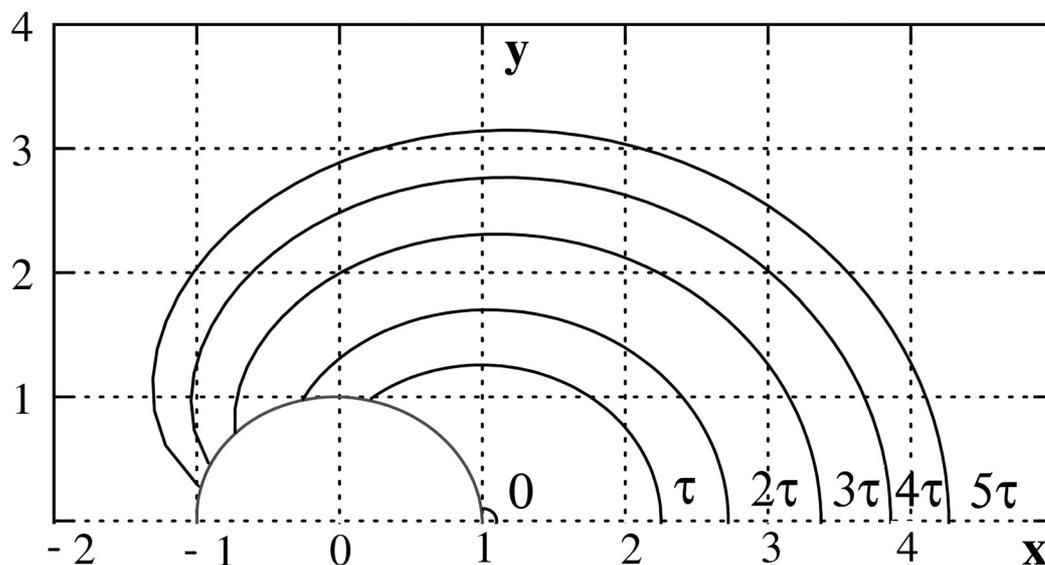


Рис. 4. Эволюция границы загрязнения

При решении (9), точки расположенные на окружности  $L$ , перемещаются вдоль нее, так как она является линией тока.

#### Литература

1. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
2. Рябенкий В. С. Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000. – 296 с.

УДК 519.634, 532.546

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКА НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЕ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕВЫХ ПАР<sup>1</sup>

Д.Н. Никольский, Ю.В. Деткова

Россия, Орловский государственный университет

**Задача об источнике, расположенном на непроницаемой границе, решается численно, методом дискретных вихревых пар. Численное решение сопоставляется с аналитическим, для частного случая непроницаемой границы.**

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекта 06-01-96303).

## 1. Постановка задачи

Плоскопараллельное течение в области  $D$ , содержащей непроницаемую границу  $L$ , описывается потенциалом  $\varphi$  [1], который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в } D/L, \quad (1)$$

и условию непротекания

$$\partial_n\varphi = 0 \quad \text{на } L/M_1. \quad (2)$$

В точке  $M_1 \in L$  располагается источник.

Потенциал  $\varphi$  представим в виде суперпозиции

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_*, \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  – потенциал источника в отсутствие  $L$ ,  $\varphi_*$  – потенциал возмущения, вызванного внесением в область  $D$  границы  $L$ .

Потенциал  $\varphi_0$  задан, а потенциал  $\varphi_*$  ищем в виде потенциала двойного слоя, распределенного с плотностью  $g$  по границе  $L$  [2]

$$\varphi_*(M) = \int_L g(N) \frac{\partial\Phi_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N, \quad M \notin L. \quad (4)$$

С учетом непрерывности нормальной составляющей производной от потенциала двойного слоя  $\varphi_*$  (4) [2], запишем условие (2) в виде интегрального уравнения

$$\left( \nabla_M \int_L g(N) \frac{\partial\Phi_1(M, N)}{\partial n_M} dl_N \right) \cdot \vec{n}_M = -\vec{v}_0(M) \cdot \vec{n}_M, \quad M \neq M_1, \quad M \in L.$$

Используя известную связь фундаментальных решений

$$\frac{\partial\Phi_1(M, N)}{\partial n_N} = -\frac{\partial\Phi_2(M, N)}{\partial l_N}, \quad M \in L$$

имеем

$$\int_L g(N) \frac{\partial}{\partial l_N} \bar{V}_2(M, N) \cdot \vec{n}_M dl_N = \vec{v}_0(M) \cdot \vec{n}_M, \quad M \neq M_1, \quad M \in L. \quad (5)$$

Здесь  $\bar{V}_2(M, N) = \nabla_M \Phi_2(M, N)$  – потенциал скорости нормированного вихря с циркуляцией равной – 1.

Решив уравнение (5), мы найдем распределение плотности  $g(N)$  потенциала двойного слоя по границе  $L$ , и вычислим скорости фильтрации во всей области  $D$ , за исключением ореола  $L_\varepsilon$  охватывающего  $L$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_L g(N) \frac{\partial}{\partial l_N} \bar{V}_2(M, N) dl_N, \quad M \in D/L_\varepsilon. \quad (6)$$

## 2. Дискретная схема

На  $L$  выберем двойную систему точек  $(x_m, y_m)$ ,  $m = \overline{1, n}$  – расчетные точки и  $(x_{m \pm \frac{1}{2}}, y_{m \pm \frac{1}{2}})$ ,  $m = \overline{1, n}$  – точки расположения особенностей.

Расчетные точки выбраны таким образом, что сток  $\varphi_0$  располагается в одной из них.

Если расчетная точка стока имеет индекс  $t$ , то дискретный аналог уравнений (5) и (6) имеет вид

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n g_k \left( \bar{V}_{2m, k + \frac{1}{2}} \bar{n}_m - \bar{V}_{2m, k - \frac{1}{2}} \bar{n}_m \right) = \bar{v}_{0m} \cdot \bar{n}_m, \quad m = \overline{1, n}, \quad m \neq t, \quad (7)$$

$$\bar{v}_j = \bar{v}_{0j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n g_k \left( \bar{V}_{2j, k + \frac{1}{2}} - \bar{V}_{2j, k - \frac{1}{2}} \right), \quad (8)$$

где  $v_j = M_j$ ,  $M_j$  – точка сетки. (7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом Гаусса с выбором главного элемента [3].

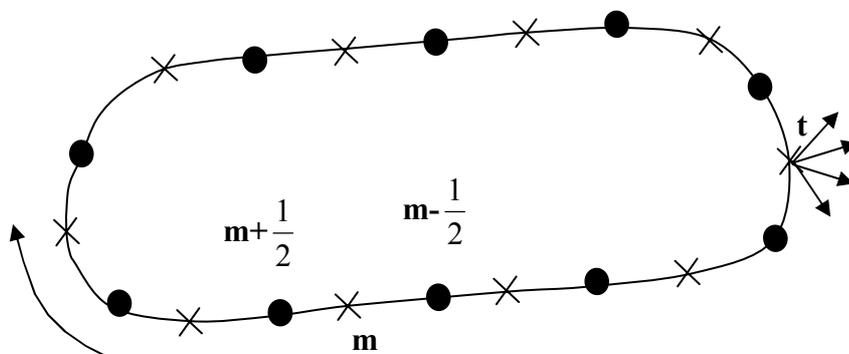


Рис. 1. Двойная система точек со стоком в расчетной точке

### 3. Исследование дискретной схемы

Выберем  $L$  в виде окружности радиусом  $a$  и с центром, расположенным в начале координат, а координаты стока  $M_1(0, a)$ . В качестве характерного расстояния  $L_0$  выберем радиус окружности  $a$ .

Введем величину

$$\eta_j = \left| 1 - \frac{v_j}{v_j^A} \right| \cdot 100\%, \quad (9)$$

где  $v_j^A$  – модуль скорости в точке  $M_j$ , вычисленного по аналитическим формулам [4].

В ходе численных экспериментов было установлено, что наибольшее значение величина  $\eta_j$  принимает, когда точка  $M_j$  расположена в области противоположной стоку, относительно окружности. Последнее объясняется расположением критической точки.

В табл. 1 представлена зависимость  $\eta_j$  от  $n$  в точке  $M_j(-1.1, 0)$ .

**Табл. 1.** Сходимость дискретной схемы

$n$	50	100	200	400
$\eta_j$	0,851855	0,007257	0,00001	машинный ноль

Видим, что численное решение задачи (7) – (8) сходится к аналитическому. Отметим, что поле скоростей, построенное по (7), (8) совпадает с полем скоростей, приведенным в [4].

### Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.
3. Рябенкий В.С. Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000. – 296 с.
4. Никольский Д.Н. Фильтрационное течение от источника на окружности или прямой// Текущий сборник. С. 75-78.

УДК 532.546

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОТ ИСТОЧНИКА К ВОДОЗАБОРУ В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

Е.В. Ноздрина

Россия, Орловский государственный университет

Изучена работа водозабора в виде несовершенной скважины при наличие поступательного потока и источника загрязнения. Указана максимальная мощность водозабора, при которой он не загрязняется. Исследовано влияние бассейна жидкости на работу водозабора.

### 1. Постановка задачи

Выберем координатную ось  $Ox$  вдоль кровли полубесконечного пласта грунта, а ось  $Oz$  в глубь. Пусть источник загрязнения мощностью  $Q_2$  находится в точке  $(a,0)$ . Скорость  $V$  поступательного потока направлена параллельно кровли пласта против оси  $Ox$ . Поместим эксплуатационную скважину дебита  $Q_2$  и радиуса  $r_0$  в точку  $(2a,0)$ . (рис. 1.). Грунт анизотропный с коэффициентами главных направлений анизотропии  $K_p = \text{const}$ ,  $K_q = \text{const}$ .

Необходимо найти максимальное значение мощности скважины  $Q_2$ , при которой водозабор не загрязняется.

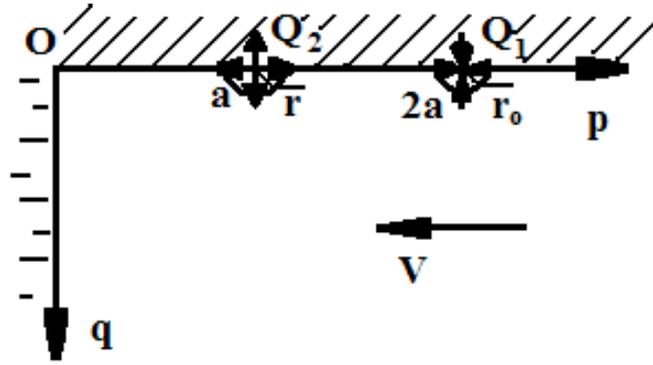


Рис. 1. Постановка задачи

Если рассматривать течение в пространстве, то оно является осесимметричным (Ор - ось симметрии течения). Это течение в анизотропном грунте описывается потенциалом -  $\Phi$  и функцией тока -  $\Psi$ , которые удовлетворяют обобщенным уравнениям Коши-Римана [1]:

$$V_p = K_p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{1}{q} \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad V_q = K_q \frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\frac{1}{q} \frac{\partial \Psi}{\partial p}. \quad (1)$$

## 2. Решение задачи в отсутствие бассейна.

Сначала решим данную задачу в отсутствие бассейна жидкости. Водозабор в виде несовершенной скважины будем моделировать стоком мощности  $Q_2$ , источник загрязнения – источником мощности  $Q_1$ . Потенциал и функция тока этого течения в анизотропной среде должны удовлетворять уравнениям (1) и будут иметь вид [2]:

$$\Phi = \frac{Q_2}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-a)^2 + q^2}} - \frac{Q_1}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-2a)^2 + q^2}} - V \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} p,$$

$$\Psi = \sqrt{K_p K_q} \left( \frac{Q_2 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} (p-a)}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-a)^2 + q^2}} - \frac{Q_1 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} (p-2a)}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-2a)^2 + q^2}} - \frac{1}{2} V q^2 \right).$$

Чтобы жидкость из загрязненного источника не попала в водозабор, критическая точка (точка, в которой  $V_p=0$  и  $V_q=0$ ) должна находиться на границе водозабора. Из уравнений (1) находим  $V_p$  и  $V_q$ :

$$V_p = \frac{Q_1 K_q (p-2a)}{2\pi \left( \frac{K_q}{K_p} (p-2a)^2 + q^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q_2 K_q (p-a)}{2\pi \left( \frac{K_q}{K_p} (p-a)^2 + q^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - V \sqrt{K_p K_q} = 0, \quad (2)$$

$$V_q = \frac{Q_1 K_q q}{2\pi \left( \frac{K_q}{K_p} (p-2a)^2 + q^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q_2 K_q q}{2\pi \left( \frac{K_q}{K_p} (p-a)^2 + q^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Максимальный дебит скважины будет в том случае, если критическая точка имеет координаты  $(a+r, 0)$ . Подставляя эти значения  $r_{\text{критич}}$  и  $q_{\text{критич}}$  в формулу (2) получаем  $Q_{1\text{max}}$ .

$$Q_{1\text{max}} = 2V\pi(a-r)^2 \frac{K_q}{K_p} - Q_2 \left( \frac{a-r}{r} \right)^2.$$

При этом чтобы критические точки левой и правой ветви линии тока совпали, для  $Q_{2\text{max}}$  должно выполняться выражение:

$$Q_{2\text{max}} = 2V(\pi-1) \frac{K_q}{K_p} \frac{(a-r)^3}{a}. \quad (3)$$

Ведem безразмерные величины  $Q_1^* = \frac{Q_1}{Q_0}$ ,  $Q_2^* = \frac{Q_2}{Q_0}$ ,  $Q_{1\text{max}}^* = \frac{Q_{1\text{max}}}{Q_0}$ ,  $V^* = \frac{V}{V_0}$ ,  $r^* = \frac{r}{L_0}$ ,  $a^* = \frac{a}{L_0}$  и подставим эти выражения в (3). Для того чтобы получилась исходная формула в величинах со звездочкой, между  $Q_0$ ,  $L_0$  и  $V_0$  должно выполняться соотношение:

$$Q_0 = V_0 L_0^2. \quad (4)$$

Проанализируем зависимость  $Q_{1\text{max}}$  от коэффициентов анизотропии. Введем для простоты коэффициент  $\eta$ :

$$\eta = \frac{Q_{1\text{max}} - Q_{1\text{max}}^{из}}{Q_{1\text{max}}^{из}}, \quad (5)$$

где  $Q_{1\text{max}}^{из}$  -  $Q_{1\text{max}}$  в изотропной среде.

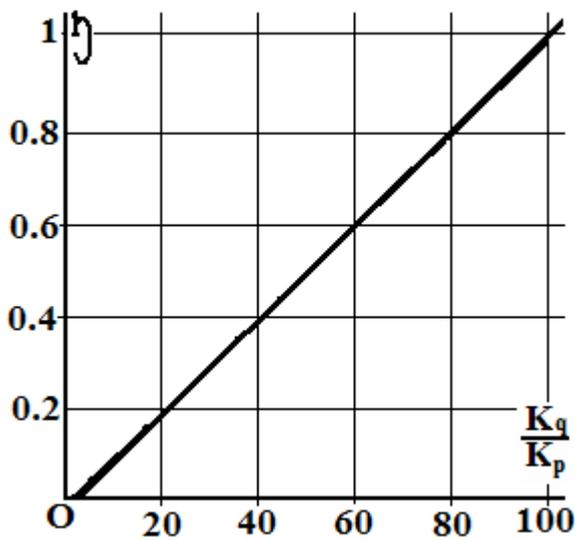
Построим графическую зависимость  $\eta$  от  $\frac{K_q}{K_p}$  (рис.2). Видим что при

$\frac{K_q}{K_p} \in (0,5]$  анизотропией среды можно пренебречь.

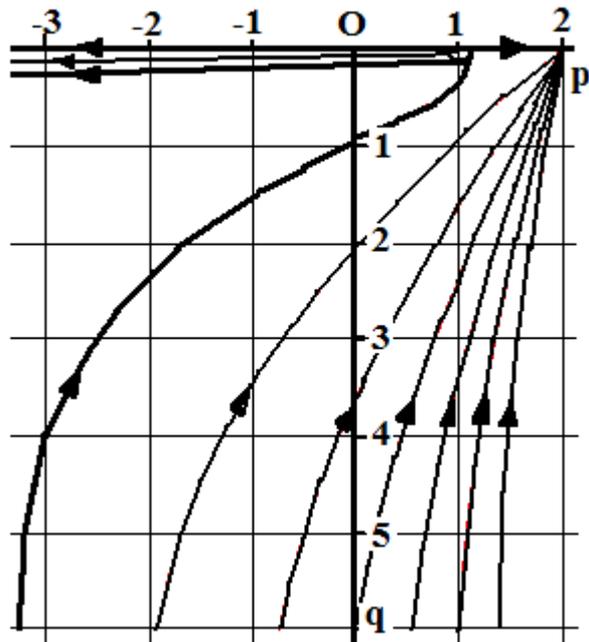
Построим линию тока  $\Psi(p,q) = \Psi(r_{\text{критич}}, q_{\text{критич}})$ , которая ограничивает область загрязнения (рис.3, рис.4) (линия выделена жирно).

Можно найти асимптоты к линии тока, ограничивающей область захвата. При этом как видно из рисунков (рис.3, рис.4) их будет две. Из  $\Psi(p,q) = \Psi(r_{\text{критич}}, q_{\text{критич}})$  выразим  $q$ , переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$   $q \rightarrow q_{ac1}$ , получим асимптоту для правой ветви линии тока, переходя к пределу при  $p \rightarrow -\infty$   $q \rightarrow q_{ac2}$ , получим асимптоту для левой ветви линии тока.

$$q_{ac1} = \sqrt{\frac{Q_1}{\pi V}}, \quad q_{ac2} = \sqrt{\frac{Q_2}{\pi V}}.$$



**Рис. 2.** Зависимость  $\eta$  от коэффициентов анизотропии,  $V=1$



**Рис. 3.** Область захвата  $V=1$ ,  $K_p=1$ ,  $K_q=4$

### 3. Решение задачи при наличии бассейна

Теперь решим данную задачу при наличии бассейна жидкости. На границе раздела жидкости должно выполняться краевое условие (6).

$$\Phi(p,q)=0, \quad p=0, \quad q \in [0, \infty). \quad (6)$$

Потенциал и функция тока этого течения в анизотропной среде, с учетом (6), будут иметь вид [2]:

$$\Phi = \frac{Q_2}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-a)^2 + q^2}} - \frac{Q_1}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-2a)^2 + q^2}} - \frac{Q_2}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p+a)^2 + q^2}} + \frac{Q_1}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p+2a)^2 + q^2}} - V \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} p$$

$$\Psi = \sqrt{K_p K_q} \left[ \frac{Q_2 \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-a)}}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-a)^2 + q^2}} - \frac{Q_1 \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-2a)}}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p-2a)^2 + q^2}} - \frac{1}{2} V q^2 \right] + \sqrt{K_p K_q} \left[ - \frac{Q_2 \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p+a)}}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p+a)^2 + q^2}} + \frac{Q_1 \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p+2a)}}{2\pi \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p+2a)^2 + q^2}} \right]$$

Чтобы жидкость из загрязненного источника не попала в водозабор, критическая точка должна находиться на границе водозабора, то есть иметь координаты  $(a+r, 0)$ . Из уравнений (1) находим  $V_p$  и  $V_q$ , подставляя в них  $r_{критич}$ . И  $Q_{критич}$  находим  $Q_{1max}$ .

$$Q_{1max} = Q_2 \frac{r^2(a-r)^2(3a+r)^2((r^2 - (2a+r)^2))}{r^2(2a+r)^2((3a+r)^2 + (a-r)^2)} + 2V\pi \frac{K_q(a-r)^2(3a+r)^2}{K_p((3a+r)^2 + (a-r)^2)}$$

При этом чтобы критические точки левой и правой ветви линии тока совпали, для  $Q_{2max}$  должно выполняться выражение:

$$Q_{2max} = 2V(\pi - 1) \frac{K_q}{K_p} \frac{(a-r)^2(3a+r)^3}{a((3a+r)^2 + (a-r)^2)}. \quad (7)$$

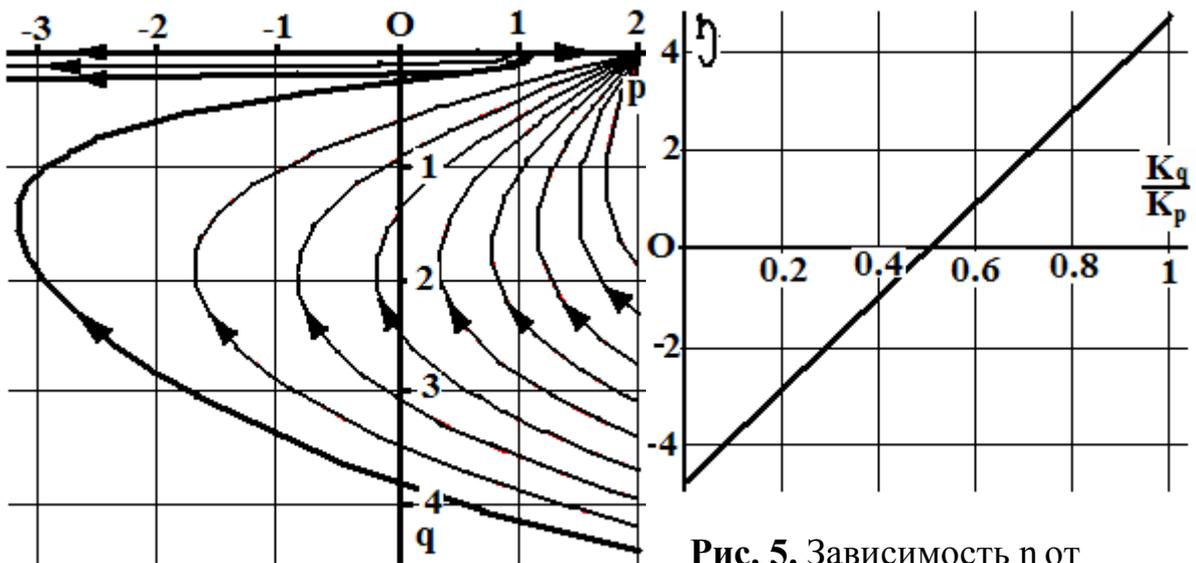


Рис. 4. Область захвата  $V=1$ ,  $K_p=4$ ,  $K_q=1$

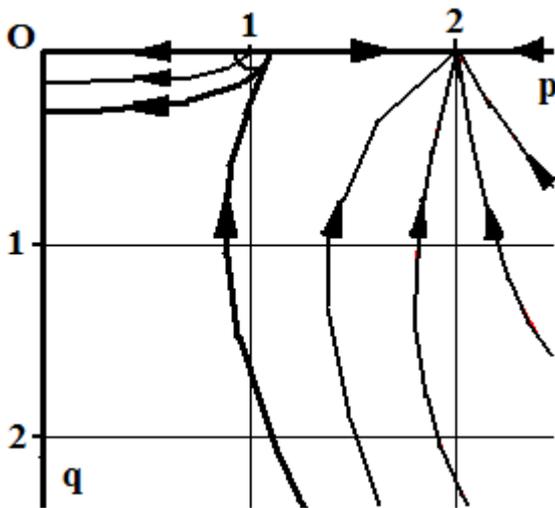
Рис. 5. Зависимость  $\eta$  от коэффициентов анизотропии,  $V=1$

Введем безразмерные величины  $Q_1^* = \frac{Q_1}{Q_0}$ ,  $Q_2^* = \frac{Q_2}{Q_0}$ ,  $Q_{1max}^* = \frac{Q_{1max}}{Q_0}$ ,  $V^* = \frac{V}{V_0}$ ,  $r^* = \frac{r}{L_0}$ ,  $a^* = \frac{a}{L_0}$  и подставим эти выражения в (7). Для того чтобы получилась исходная формула в величинах со звездочкой, между  $Q_0$ ,  $L_0$  и  $V_0$  должно выполняться соотношение (4).

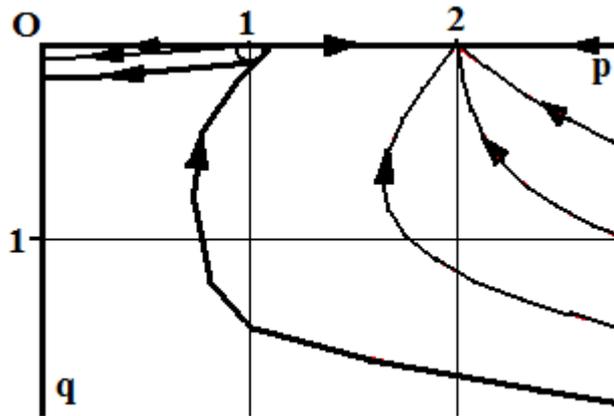
Проанализируем зависимость  $Q_{1max}$  от коэффициентов анизотропии. Введем для простоты коэффициент  $\eta$  согласно формуле (5).

Построим графическую зависимость  $\eta$  от  $\frac{K_q}{K_p}$  (рис.5). Видим, что при отношении  $K_q$  к  $K_p$  равном 0,5 анизотропией среды можно пренебречь.

Строим линию тока  $\Psi(p,q)=\Psi(r_{критич}, q_{критич})$ , которая ограничивает область загрязнения (рис.6, рис.7).



**Рис. 6.** Область захвата  $V=1$ ,  
 $K_p=1$ ,  $K_q=4$



**Рис. 7.** Область захвата  $V=1$ ,  
 $K_p=4$ ,  $K_q=1$

Можно найти асимптоту к правой ветви линии тока, ограничивающей область захвата. Для этого из  $\Psi(p,q)=\Psi(p_{\text{критич.}}, q_{\text{критич.}})$  выразим  $q$ , и переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$   $q \rightarrow q_{\text{ас}}$ , получим:

$$q_{\text{ас}} = \sqrt{\frac{Q_1}{\pi V}}$$

### Литература

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1971, 368 с.
2. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел, 1994, 148 с.
3. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983, 160 с

УДК 532.546

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ВОДОЗАБОРА ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПОТОКА ГРУНТОВЫХ ВОД В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

Л.Г. Ноздрина

Россия, Орловский государственный университет

Исследована работа водозабора вблизи источника загрязнения при наличии поступательного потока. Выписано уравнение линии тока, ограничивающей область захвата течения. Найдено максимальное значение дебита, при котором водозабор будет работать без загрязнения.

## 1. Постановка задачи

Плоскопараллельное фильтрационное течение в анизотропном грунте описывается основными уравнениями, которые представлены в работах О.В. Голубевой [1]:

$$V_p = K_p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \quad V_q = K_q \frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}. \quad (1)$$

Здесь  $K_p$  и  $K_q$  - главные направления анизотропии.

Пусть в грунте имеются источник загрязнения мощности  $Q_1$  и водозабор дебита  $Q_2$ . Источник и водозабор представляют собой совершенные скважины, работу которых моделируем источником и стоком мощности  $Q_1$  и  $Q_2$ . Поступательный поток грунтовых вод со скоростью  $V_0$  направлен противоположно оси  $O_p$  (рис.1).

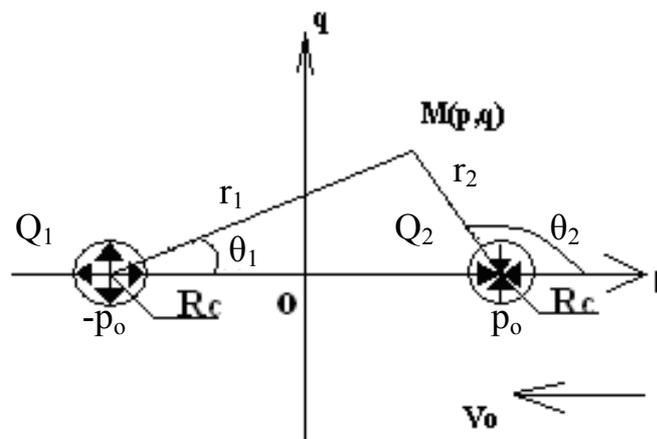


Рис. 1. Постановка задачи

## 2. Решение задачи

Потенциал скорости  $\Phi$  и функция тока  $\Psi$ , удовлетворяющие уравнениям (1), имеют вид [2]:

$$\Phi = \frac{Q_1}{2\pi} \ln r_1 - \frac{Q_2}{2\pi} \ln r_2 - V_0 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} p, \quad (2)$$

$$\Psi = \sqrt{K_p K_q} \left( \frac{Q_1}{2\pi} \theta_1 - \frac{Q_2}{2\pi} \theta_2 - V_0 q \right), \quad (3)$$

где

$$r_1 = \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p + p_0)^2 + q^2}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p - p_0)^2 + q^2},$$

$$\theta_1 = \arctg \frac{q}{\sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p + p_0)^2}}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{q}{\sqrt{\frac{K_q}{K_p} (p - p_0)^2}}.$$

Из формул (2) и (3) находим критические точки  $(p_1, 0)$  и  $(p_2, 0)$ , в которых скорость течения обращается в ноль ( $V_p = 0, V_q = 0$ ). Координаты  $p_1$  и  $p_2$  выражаются следующими формулами:

$$p_{1,2} = - \frac{(Q_2 - Q_1) \pm \sqrt{(Q_2 - Q_1)^2 - 8\pi V_0 p_0 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} \left( Q_1 + Q_2 - 2\pi V_0 p_0 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} \right)}}{4\pi V_0 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}}}. \quad (4)$$

Введем безразмерные мощность источника  $Q'_1 = \frac{Q_1}{Q_0}$ , дебит скважины  $Q'_2 = \frac{Q_2}{Q_0}$ , скорость потока  $V'_0 = \frac{V_0}{v_0}$ , координату  $p'_0 = \frac{p_0}{L_0}$ , в которых  $Q_0, v_0, L_0$  - характерные значения соответствующих величин, причем

$$Q_0 = v_0 L_0.$$

В безразмерных величинах выражение (4) полностью сохраняет свой вид, если опустить штрихи над этими величинами.

Из формул (4) замечаем, что при  $p_1 = p_2 = -(p_0 - R_c)$  водозабор будет работать без загрязнения, причем его дебит будет иметь максимальное значение:

$$Q_{2 \max} = Q_1 + 4\pi V_0 \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} (p_0 - R_c). \quad (5)$$

На рис. 2 и 3 представлены линии тока, проходящие через критические точки. Эти линии определяют область захвата жидкости, попавшей в водозабор (сплошная линия), и область загрязнения источника (пунктирная линия) для разных значений  $K_p$  и  $K_q$  при  $p_0 = 1, V_0 = 1, Q_2 = Q_{2 \max}$ .

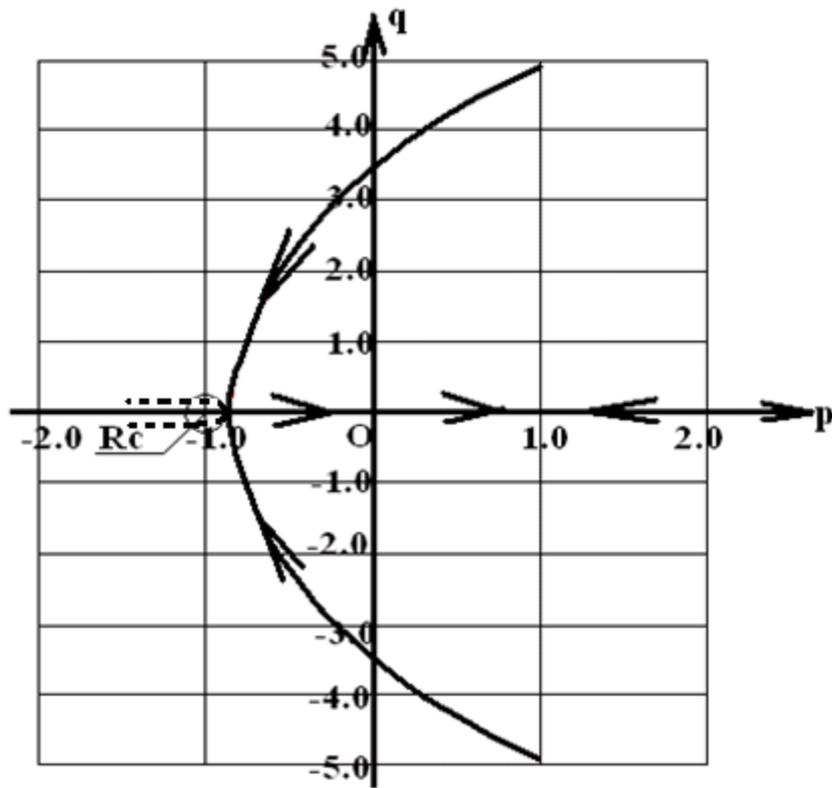
При этом линии тока, ограничивающие область захвата водозабора и область загрязнения источника, имеют асимптоты  $q_\infty$  и  $q_{-\infty}$  соответственно:

$$q_\infty = \pm \frac{Q_2}{2V_0}, \quad q_{-\infty} = \pm \frac{Q_1}{2V_0}.$$

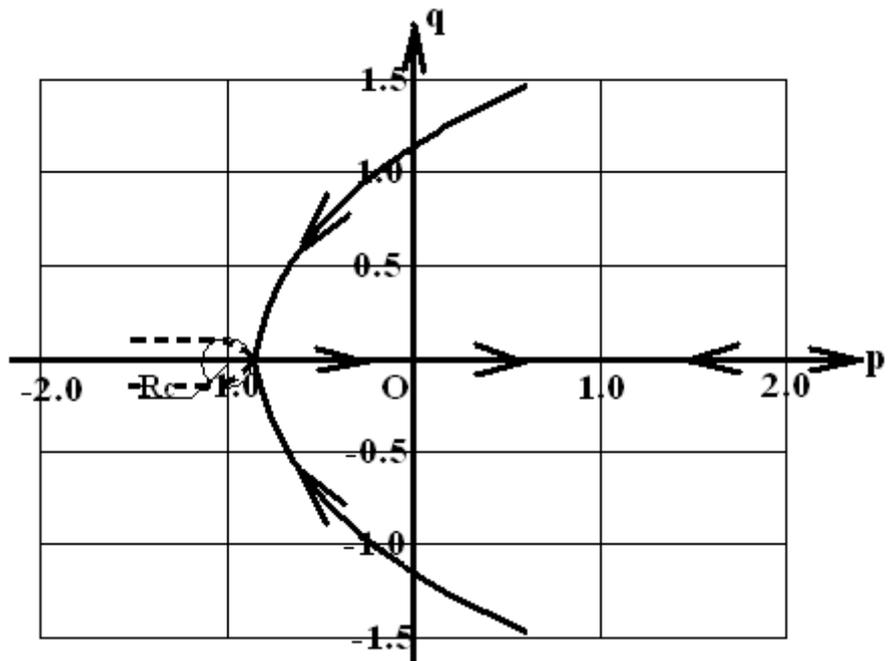
Отметим, что при  $K_p = \frac{\alpha}{\beta}, K_q = 1$  и при  $K_p = 1, K_q = \frac{\beta}{\alpha}$  ( $\alpha$  и  $\beta$  - произвольные положительные константы) получаем совершенно одинаковые картины течения.

В случае изотропного грунта ( $K_p = K_q$ ) из (4) следуют координаты критических точек:

$$p_{1,2} = - \frac{(Q_2 - Q_1) \pm \sqrt{(Q_2 - Q_1)^2 - 8\pi V_0 p_0 (Q_1 + Q_2 - 2\pi V_0 p_0)}}{4\pi V_0}.$$

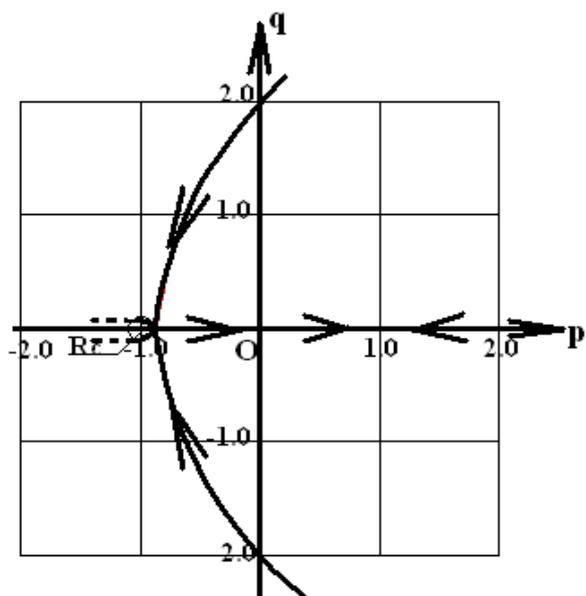


**Рис. 2.** Область захвата при  $K_p=1$ ,  $K_q=3$



**Рис. 3.** Область захвата при  $K_p=3$ ,  $K_q=1$

На рис. 4 представлен вид линий тока течения в изотропном грунте



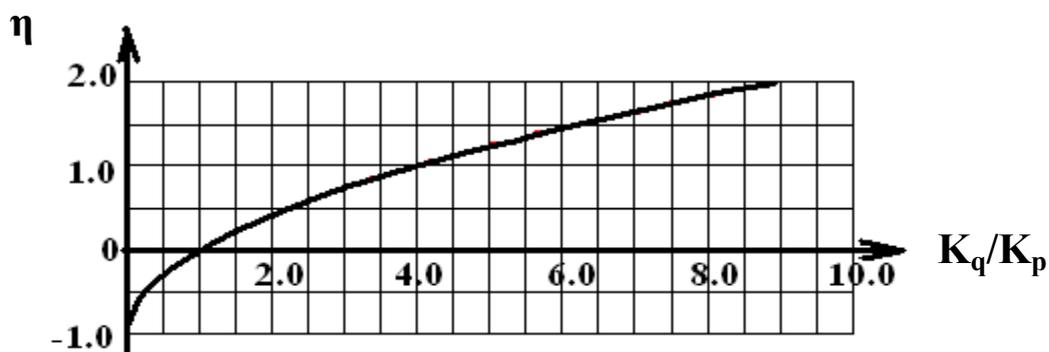
**Рис. 4.** Область захвата в изотропном грунте

Максимальное значение дебита водозабора  $Q_2$  в этом случае выражается следующей формулой:

$$\tilde{Q}_{2\max} = Q_1 + 4\pi V_0 (p_0 - R_c).$$

График зависимости величины  $\eta = \frac{Q_{2\max} - \tilde{Q}_{2\max}}{\tilde{Q}_{2\max}}$  от отношения  $\frac{K_q}{K_p}$

при заданных значениях  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $Q_1$  и  $R_c$  представлен на рис.5.



**Рис. 5.** Зависимость  $\eta$  от отношения  $K_q/K_p$

Анализируя данную зависимость, видим, что при  $0,5 < \frac{K_q}{K_p} < 1,5$

наличие анизотропии можно не учитывать.

### Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред, - М.: Высшая школа, 1972. – 368с.
2. Пивень В.Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах, Орел, 1994. – 148с.

## РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ<sup>1</sup>

В.Ф. Пивень

Россия, Орловский государственный университет

Предлагается метод решения граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды. Особенно эффективен этот метод в случае среды, обладающей главными направлениями анизотропии. Такую среду называют ортотропной. В случае ортотропно-однородной среды решение задач с каноническими границами (прямая, эллипс) получено в конечном виде. В случае ортотропно-неоднородной среды исследование задач с произвольным гладкими границами сведено к решению граничных интегральных уравнений.

1. Двумерную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом тонком анизотропно-неоднородном слое пористой среды с тензором проницаемости  $K = (K_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$  и толщиной  $H$  описываем обобщенным потенциалом  $\varphi$  и функцией тока  $\psi$ , которые как функции декартовых координат точки  $(x, y)$  плоского основания слоя удовлетворяют в области  $D$  (за исключением особых точек течения) эллиптической системе уравнений [1,2]

$$K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

В силу эллиптичности системы уравнений (1.1) коэффициенты  $K_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0, \quad D(K_s) = K_{11}K_{22} - \left( \frac{K_{12} + K_{21}}{2} \right)^2 > 0,$$

где  $D(K_s) \equiv \left| \frac{K_{ij} + K_{ji}}{2} \right|$  - определитель симметричной части  $K_s = \left( \frac{K_{ij} + K_{ji}}{2} \right)$

тензора проницаемости  $K = (K_{ij})$ .

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах [3]. Первое и второе уравнения определяют  $v_x$  и  $v_y$  составляющие вектора скорости фильтрации  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ .

Совершим неособое преобразование координат

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (1.2)$$

для которого якобиан  $J = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$  и  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$  - хотя бы один

раз дифференцируемые в области  $D$  функции  $x, y$ .

Как показано в [2], если  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  удовлетворяют системе уравнений типа Бельтрами

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

$$\begin{aligned} K_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{K_{12} + K_{21}}{2} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \sqrt{D(K_s)} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{K_{12} + K_{21}}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\sqrt{D(K_s)} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

то в переменных  $\xi, \eta$  система уравнений (1.1) принимает канонический вид

$$\begin{aligned} \sqrt{D(K_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(K_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ -\sqrt{D(K_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(K_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $D(K_a) \equiv \left| \frac{K_{ij} - K_{ji}}{2} \right| = \left( \frac{K_{12} - K_{21}}{2} \right)^2$  - определитель антисимметричной части  $K_a = \left( \frac{K_{ij} - K_{ji}}{2} \right)$  тензора проницаемости  $K = (K_{ij})$ .

Для описания течения введем две комплексные плоскости: физическую плоскость  $z = x + iy$  и вспомогательную плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ . В этих плоскостях воспользуемся комплексными операторами дифференцирования

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, & 2 \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}, \\ 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta}, & 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Преобразования (1.2) и уравнения (1.3) запишем

$$\zeta = \zeta(z) \quad \left( J = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right|^2 \neq 0 \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \left( \mu(z) = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}} \right). \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) называем уравнением Бельтрами в комплексной форме.

В плоскости  $\zeta$  введем комплексный потенциал течения

$$W = \varphi + i \frac{\psi}{P} \quad \left( P = H \left[ \sqrt{D(K_s)} - i \sqrt{D(K_a)} \right] \right), \quad (1.8)$$

который как функция  $\zeta$  удовлетворяет следующему из (1.4) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(\zeta)(W - \bar{W}) = 0 \quad \left( A(\zeta) = \frac{\bar{P}}{P + \bar{P}} \frac{\partial \ln P}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad (1.9)$$

где  $\bar{P} = H \left[ \sqrt{D(K_s)} + i \sqrt{D(K_a)} \right]$ .

Согласно [4] замечаем, что удовлетворяющий уравнению (1.9) комплексный потенциал (1.8) описывает в плоскости  $\zeta$  течение в изотропном неоднородном слое пористой среды с комплексной

проводимостью  $P = HK_*$ ,  $K_* = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}$  - комплексный коэффициент проницаемости слоя.

Таким образом, если известно какое-либо частное решение  $\zeta(z)$  уравнения Бельтрами (1.7) (или системы уравнений (1.3)), то, отыскивая комплексный потенциал  $W(\zeta)$ , удовлетворяющий уравнению (1.9) (функции  $\varphi(\xi, \eta)$ ,  $\psi(\xi, \eta)$  удовлетворяют уравнениям (1.4)), находим согласно (1.8) искомый обобщенный потенциал  $\varphi = \varphi(x, y)$  и функцию тока  $\psi(x, y)$ :

$$\varphi = \frac{PW + \bar{P}\bar{W}}{P + \bar{P}}, \quad \psi = \frac{P\bar{P}(W - \bar{W})}{i(P + \bar{P})}, \quad (1.10)$$

(где  $W = W[\zeta(x, y)] = W(x, y)$ ,  $P = P[\zeta(x, y)] = P(x, y)$ ), которые являются решениями уравнений (1.1). Следовательно, исследование двумерного течения в анизотропном слое сводится к нахождению решения  $\zeta(z)$  уравнения Бельтрами (1.7) и комплексного потенциала течения  $W(\zeta)$  в изотропном слое проводимости  $P = HK_*$ .

**2.** Предлагается следующий метод решения граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое. Пусть течение в анизотропно-неоднородном слое проницаемости  $K(z) = (K_{ij}(z))$  и толщины  $H(z)$  происходит в области  $D$  физической плоскости  $z$ . Полагаем, что эта область ограничена полностью или частично простой (без самопересечений) кривой  $L$ . Используем такое решение  $\zeta(z)$  уравнений Бельтрами (1.7), которое обеспечивает непрерывное и взаимно-однозначное преобразование области  $\bar{D} = D \cup L$  плоскости  $z$  на область  $\bar{D}' = D' \cup L'$  вспомогательной плоскости  $\zeta$  ( $L'$  - граничная кривая области  $D'$ ). Такое решение, следуя [5], называем гомеоморфизмом уравнения Бельтрами.

Согласно [6] гомеоморфизм  $\zeta(z)$  является в малом (в окрестности каждой точки плоскостей  $z$  и  $\zeta$ ) аффинным и сохраняющим направление обхода кривых  $L$  и  $L'$  на плоскостях  $z$  и  $\zeta$ , если  $|\partial\zeta/\partial z| > |\partial\zeta/\partial\bar{z}|$  ( $|\mu| < 1$ ), меняет его на обратное в случае  $|\partial\zeta/\partial z| < |\partial\zeta/\partial\bar{z}|$  ( $|\mu| > 1$ ) и является вырожденным при  $|\partial\zeta/\partial z| = |\partial\zeta/\partial\bar{z}|$  ( $|\mu| = 1$ ).

При переходе на плоскость  $\zeta$  проницаемость и толщина слоя изменяются. На плоскости  $\zeta$  течение происходит в изотропно-неоднородном слое проводимости  $P(\zeta) = H(\zeta)K_*(\zeta)$ , где

$$K_*(\zeta) = \sqrt{K_{11}(\zeta)K_{22}(\zeta) - \left(\frac{K_{12}(\zeta) + K_{21}(\zeta)}{2}\right)^2} - i\frac{K_{12}(\zeta) - K_{21}(\zeta)}{2}.$$

Будут изменяться заданные граничные условия на кривой  $L$  плоскости  $z$ , преобразуясь в соответствии с гомеоморфизмом  $\zeta(z)$  в условия на кривой  $L'$  плоскости  $\zeta$ .

Таким образом, решение граничной задачи сводится к отысканию в плоскости  $D'$  комплексного потенциала  $W(\zeta)$ , удовлетворяющего уравнению (1.9) и соответствующим условиям на граничной кривой  $L'$  этой области, и нахождению гомеоморфизмов  $\zeta(z)$  уравнения (1.7). Поскольку решение  $W(\zeta)$  уравнения (1.9) – обобщенная аналитическая функция, то для отыскания  $W(\zeta)$  можно использовать аппарат обобщенных аналитических функций [5], который применён в [4] к описанию течений в изотропных неоднородных слоях. В частности, когда слой анизотропно-однороден ( $P = const$ ) и, следовательно, согласно (1.9)  $\partial W / \partial \bar{\zeta} = 0$ ,  $W(\zeta)$  – аналитическая функция, то в этом случае применим аппарат аналитических функций.

**3. Метод отыскания гомеоморфизмов  $\zeta(z)$  уравнения Бельтрами (1.7)** предложен в работе [5], который в общем случае функции  $\mu(z)$  широкого класса приводит к решению интегрального уравнения.

Рассмотрим частный случай анизотропно-неоднородной среды, когда её тензор проницаемости

$$K = (K_{ij}) = (k_{ij})\chi, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где  $\chi$  – функция координат (хотя бы один раз непрерывно дифференцируемая),  $k_{ij}$  – постоянные. Пористую среду с тензором проницаемости (3.1) называем средой с отдельной анизотропией и неоднородностью. В этом случае коэффициент  $\mu$  уравнения (1.7) является комплексной постоянной и решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta = c(z + \mu\bar{z}) + d,$$

где  $c$  и  $d$  – вообще говоря, комплексные постоянные. Не нарушая общности суждений, выберем  $c = 1$  и  $d = 0$ . Это можно сделать надлежащим выбором в плоскостях  $z$  и  $\zeta$  осей координат и масштабов. Полагая  $\mu = a + ib$ , имеем

$$\zeta = z + \mu\bar{z} \quad (\xi = (1+a)x + by, \quad \eta = bx + (1-a)y), \quad (3.2)$$

где постоянные коэффициенты

$$a = \frac{k_{22} - k_{11}}{k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)}}, \quad b = -\frac{k_{12} + k_{21}}{k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)}},$$

$$D(k_s) = k_{11}k_{22} - \left(\frac{k_{12} + k_{21}}{2}\right)^2.$$

Причем, в силу того, что якобиан преобразования (3.2) в соответствии с (1.6)  $J = 1 - |\mu|^2 \neq 0$ , то  $|\mu|^2 = a^2 + b^2 \neq 1$ . Это соотношение накладывает ограничение на коэффициенты  $k_{ij}$ ,  $j, i = 1, 2$ . Преобразование (3.2) является на всей плоскости  $z$  аффинным: оно линейное и его якобиан  $J \neq 0$  при указанном ограничении на  $k_{ij}$ .

В зависимости от значений  $|\mu| = \sqrt{a^2 + b^2}$  преобразование (3.2) сохраняет направление обхода кривой при переходе из плоскости  $z$  в плоскость  $\zeta$ , если  $|\mu| < 1$  и меняет его на обратное в случае  $|\mu| > 1$ , и является вырожденным при  $|\mu| = 1$ .

4. Граничные условия поставленных в [3] основных задач фильтрации в анизотропной пористой среде, сформулируем в двумерном случае на физической плоскости  $z$  для обобщенного потенциала  $\varphi(z)$  и функции тока  $\psi(z)$ , а затем запишем их на вспомогательной плоскости  $\zeta$  для комплексного потенциала  $W(\zeta)$ . Если на границе  $\sigma_1$  задано давление  $p_0(z)$ , то  $\varphi(z)$  удовлетворяет на этой границе условию

$$\varphi^+(z) = f_0(z) \quad (f_0(z) = -[p_0(z) + \rho\Pi/\mu]), \quad z \in \sigma_1, \quad (4.1)$$

где  $\Pi(z)$  - потенциал массовой силы,  $\mu$  и  $\rho$  - вязкость и плотность жидкости. Здесь и далее «+» означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны нормали к ней. В частности, если фильтрация напорная ( $|\nabla p| \gg \rho|\nabla\Pi|$ ) и давление  $p_0$  постоянно, то в условии (4.1)  $f_0(z) = const$ .

Если граница  $\sigma_2$  непроницаема для жидкости, то она является линией тока:

$$\psi^+(z) = const, \quad z \in \sigma_2. \quad (4.2)$$

Когда граница  $\sigma_0$  ( $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ ) сингулярная, то есть на ней проницаемость  $K = (K_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$  обращается в бесконечность (на части  $\sigma_{01}$ ) и равна нулю (на части  $\sigma_{02}$ ) либо толщина слоя  $H$  на части  $\sigma_{02}$  равна нулю, то выполняются условия

$$\varphi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{01}; \quad \psi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{02}. \quad (4.3)$$

Если обобщенный потенциал  $\varphi(z)$  (а значит и сопряженная ему согласно уравнений (1.1) функция тока  $\psi(z)$ ) не имеет сингулярностей в бесконечности, то потребуем для  $\varphi(z)$  выполнения условий регулярности [7]

$$\varphi(z) = O(|z|^{-1}), \quad H(z)|K(z) \cdot \nabla\varphi(z)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Условия (4.4) означают что  $\varphi(z)$  и поток скорости  $\vec{v} = K(z) \cdot \nabla\varphi(z)$  через произвольный замкнутый контур стремятся к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Пусть граница сопряжения  $\Gamma$  делит область  $D$  на части  $D_1$  и  $D_2$ , тензоры проницаемости слоя в которых  $K_1(z)$  и  $K_2(z)$  (толщина  $H(z)$  слоя непрерывна в области  $D = D_1 \cup D_2$ ) и течение в которых описывают обобщенные потенциалы и функции тока  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$ ,  $\psi_2(z)$ . Условия непрерывности давления и расхода жидкости на границе  $\Gamma$  запишем (орт нормали к  $\Gamma$  направлен в  $D_1$ ):

$$\varphi_1^+(z) = \varphi_2^-(z), \psi_1^+(z) = \psi_2^-(z), \quad z \in \Gamma. \quad (4.5)$$

Запишем условия (4.1)-(4.5) на плоскости  $\zeta$  для комплексного потенциала (1.8). Учтём ковариантность условий (4.1)-(4.3) и (4.5) относительно гомеоморфизмов  $\zeta(z)$  (в частности, вида (3.2)), означающее сохранение формы записи этих условий на эквипотенциальной  $\sigma_1'$ , непроницаемой  $\sigma_2'$ , сингулярной  $\sigma_0'$  ( $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$ ) границах и границе сопряжения  $\Gamma'$  на плоскости  $\zeta$ . Поскольку в плоскости  $\zeta$  течение происходит в слое проводимости  $P(\zeta)$ , то условие (4.4) согласно [4] запишем

$$\varphi(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad |P(\zeta)| |\nabla \varphi(\zeta)| = O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

где

$|P(\zeta)| = H(\zeta) \sqrt{D(K(\zeta))}$  ( $D(K(\zeta)) \equiv |K_{ij}(\zeta)| = K_{11}(\zeta)K_{22}(\zeta) - K_{12}(\zeta)K_{21}(\zeta)$ ) - определитель тензора проницаемости  $K(\zeta) = (K_{ij}(\zeta))$ .

Наиболее просто граничные условия для комплексного потенциала  $W = W(\zeta)$  выглядят в случае ортотропной среды ( $K_{12} = K_{21}$ ). Поскольку в этом случае проводимость слоя вещественная функция ( $P(\zeta) = \bar{P}(\zeta)$ ):

$$P(\zeta) = H(\zeta) \sqrt{D(K(\zeta))} \quad (D(K(\zeta)) = K_{11}(\zeta)K_{22}(\zeta) - K_{12}^2(\zeta)) \quad (4.7)$$

и, следовательно, формулы (1.10) упрощаются

$$\varphi = \frac{W + \bar{W}}{2}, \quad \psi = \frac{P(W - \bar{W})}{2i}. \quad (4.8)$$

Учтём формулы (4.8). В случае напорной фильтрации в условии (4.1) выберем  $f_0(z) = 0$ , а в условии (4.2) положим  $const = 0$ . Получим

$$[W(\zeta) + \bar{W}(\zeta)]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_1', \quad (4.9)$$

$$[W(\zeta) - \bar{W}(\zeta)]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_2'. \quad (4.10)$$

Условие (4.3) принимает вид

$$[W(\zeta) + \bar{W}(\zeta)]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_{01}'; \quad [P(\zeta)(W(\zeta) - \bar{W}(\zeta))]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_{02}'. \quad (4.11)$$

Условие (4.6) запишем

$$\operatorname{Re} W(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad P(\zeta) \nabla \operatorname{Re} W(\zeta) = O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Пусть в областях  $D_1$  и  $D_2$  плоскости  $z$  тензоры проницаемость слоя  $K_1(z)$  и  $K_2(z)$ , таковы, что  $K_\nu = k_\nu K(z)$ ,  $K(z) = (K_{ij}(z))$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $k_\nu$  - постоянные,  $\nu = 1, 2$ . Тогда в плоскости  $\zeta$  этот слой характеризуется в областях  $D_1'$  и  $D_2'$  проводимостями  $P_1(\zeta)$  и  $P_2(\zeta)$  (причём  $P_\nu(\zeta) = k_\nu P(\zeta)$ ,  $\nu = 1, 2$ ,  $P(\zeta)$  имеет вид (4.7)) и течение описывается в этих областях комплексными потенциалами  $W_1(\zeta)$  и  $W_2(\zeta)$ :

$$W_\nu(\zeta) = k_\nu \varphi_\nu(\zeta) + i \frac{\psi_\nu(\zeta)}{P(\zeta)}, \quad \nu = 1, 2. \quad (4.13)$$

Учитывая (4.13), условия (4.5) на границе  $\Gamma'$  сопряжения областей  $D_1'$  и  $D_2'$  (орт нормали к  $\Gamma'$  направлен в  $D_1'$ ) запишем следуя [4] в виде

$$W_1^+(\zeta) - \lambda \bar{W}_1^+(\zeta) = (1 + \lambda)W_2^-(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma' \quad \left( \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right). \quad (4.14)$$

Итак, поставленные в [3] граничные задачи фильтрации формулируются в плоскости  $\zeta$  для комплексного потенциала  $W(\zeta)$  следующим образом. Первая и вторая краевые задачи состоят в отыскании  $W(\zeta)$ , удовлетворяющего уравнению (1.9) и соответствующим условиям ((4.9) и (4.10)). Задача сопряжения заключается в определении  $W(\zeta)$ , удовлетворяющего уравнению (1.9) и условию (4.14). Причём в уравнении (1.9)  $P(\zeta)$  имеет вид (4.7).

Если область течения ограничена сингулярной линией или/и содержит бесконечно удаленную точку, то комплексный потенциал должен удовлетворять условию (4.11) или/и (4.12).

Замечаем, что найденные в случае анизотропной (ортотропной) среды условия (4.9) – (4.12) и (4.14) аналогичны условиям в случае изотропной среды. Поэтому для решения сформулированных задач воспользуемся результатами, полученными в случае двумерных течений в изотропной среде [4].

По найденному комплексному потенциалу  $W(\zeta)$  определяем согласно (4.8) функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , а затем, используя гомеоморфизм  $\zeta(z)$  (например, вида (3.2) в случае проницаемости (3.1)), имеем искомые  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ .

**5.** Решение поставленных задач удаётся найти в конечном виде, когда фильтрация плоскопараллельная ( $H = 1$ ), среда ортотропная однородная или кусочно-ортотропно однородная ( $K_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  - постоянные или кусочно-постоянные коэффициенты) и границы канонические (прямая и эллипс). В этом случае имеет место гомеоморфизм (3.2).

Найдем решение задачи сопряжения. Пусть течение в ортотропной однородной среде проницаемости  $K = (K_{ij})$  описывают на плоскости  $z$  сопряженные согласно уравнений (1.1) обобщенный потенциал  $\varphi_0(z)$  и функция тока  $\psi_0(z)$ , которые имеют особые точки всюду в этой плоскости за исключением кривой  $\Gamma$ . Эта кривая делит плоскость  $z$  на части  $D_1$  и  $D_2$ . На плоскости  $\zeta$  течение в слое постоянной проводимости  $P$  ( $P = \sqrt{D(K)} = \sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} = const$ ) будет описывать комплексный потенциал  $W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\psi_0(\zeta)/P$ , который является согласно (1.9) аналитической функцией  $\zeta$ . Полагаем, что  $W_0(\zeta)$  можно представить в виде

$$W_0(\zeta) = W_{01}(\zeta) + W_{02}(\zeta),$$

где  $W_{01}(\zeta)$  и  $W_{02}(\zeta)$  имеют особые точки в частях  $D_1'$  и  $D_2'$  плоскости  $\zeta$ , сопрягающихся вдоль кривой  $\Gamma'$ , которая является согласно (3.2) образом кривой  $\Gamma$ . В областях  $D_1'$  и  $D_2'$  проводимость слоя  $P_1$  и  $P_2$ , причем  $P_\nu = k_\nu P$  ( $P = \sqrt{D(K)} = const$ ,  $k_\nu$  - постоянные,  $\nu = 1, 2$ ).

Пусть в плоскости  $z$  граница раздела областей  $D_1$  и  $D_2$  прямая  $\Gamma: z = e^{i\theta_0}$  ( $\theta_0$  - угол наклона прямой к оси  $Ox$ ). На плоскости  $\zeta$  граница раздела областей  $D_1'$  и  $D_2'$  прямая  $\Gamma': \zeta = e^{i\vartheta_0}$ , где  $\vartheta_0$  - угол наклона прямой к оси  $O\xi$ , причем

$$tg \vartheta_0 = \frac{b + (1-a)tg \theta_0}{1 + a + btg \theta_0}.$$

Пусть  $W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$  при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Тогда согласно фильтрационной теореме сопряжения на прямой [4] течение в плоскости  $\zeta$  описывают комплексные потенциалы

$$\begin{aligned} W_1(\zeta) &= W_0(e^{-i\vartheta_0}) + \lambda \left[ W_{02}(e^{-i\vartheta_0} \zeta) + \overline{W_{01}(e^{i\vartheta_0} \bar{\zeta})} \right], \quad \zeta \in D_1', \\ W_2(\zeta) &= W_0(e^{-i\vartheta_0}) - \lambda \left[ W_{01}(e^{-i\vartheta_0} \zeta) + \overline{W_{02}(e^{i\vartheta_0} \bar{\zeta})} \right], \quad \zeta \in D_2'. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В случае эллипса  $\Gamma: z = \frac{\alpha + \beta}{2} e^{i\theta} + \frac{\alpha - \beta}{2} e^{-i\theta}$  ( $\alpha, \beta$  - полуоси) его образом в плоскости  $\zeta$  является окружность единичного радиуса  $\Gamma': \zeta = e^{i\vartheta}$   
 $tg \vartheta = \frac{b\alpha + (1-a)\beta tg \theta}{(1+a)\alpha + b\beta tg \theta}$  ( $\theta, \vartheta \in [0, 2\pi]$ ).

Если выполнено условие  $W_{01}(\zeta) = O(|\zeta|)$  при  $|\zeta| \rightarrow 0$  и  $W_{02}(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$  при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ , то согласно фильтрационной теореме сопряжения на окружности [4] имеем комплексные потенциалы течения в области  $D_1'$  (вне окружности) и  $D_2'$  (внутри окружности):

$$\begin{aligned} W_1(\zeta) &= W_0(\zeta) + \lambda \left[ W_{02}(\zeta) + \overline{W_{01}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \right], \quad \zeta \in D_1', \\ W_2(\zeta) &= W_0(\zeta) - \lambda \left[ W_{01}(\zeta) + \overline{W_{02}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \right], \quad \zeta \in D_2'. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая формулы (4.8) и гомеоморфизм (3.2), находим из (5.1) и (5.2) искомые обобщенные потенциалы  $\varphi(z)$  и функции тока  $\psi(z)$  в случае границ в виде прямой и эллипса.

Решение первой и второй краевых задач в случае границ в виде прямой и эллипса следует из (5.1) и (5.2) при  $\lambda \rightarrow \pm 1$  (см. [4]) и последующем применении формул (4.8) и (3.2).

В случае произвольных гладких границ исследование поставленных выше задач сведем к решению граничных интегральных уравнений. Полагаем, что слой ортотропный и неоднородный. В плоскости  $\zeta$  комплексный потенциал течения представим в виде

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta). \quad (5.3)$$

Здесь  $W_0(\zeta)$  - комплексный потенциал течения на всей плоскости  $\zeta$  в слое проводимости (4.7). Особые точки  $W_0(\zeta)$  лежат вне простой гладкой кривой  $L'$  этой плоскости.  $W_*(\zeta)$  - комплексный потенциал возмущений, обусловленных границей, моделируемой кривой  $L'$ .

Следуя [4], комплексный потенциал  $W_*(\zeta)$  представим обобщенным интегралом типа Коши

$$W_*(\zeta) = \int_{L'} P(\tau) [g(\tau)w_1(\zeta, \tau) - f(\tau)w_2(\zeta, \tau)] dl_\tau, \quad \zeta \notin L'. \quad (5.4)$$

Здесь  $w_1(\zeta, \tau)$  и  $w_2(\zeta, \tau)$  - главные решения по переменной  $\zeta$  уравнения (1.9), которые выражаются через фундаментальные решения этого уравнения, где  $P(\zeta)$  имеет вид (4.7).  $g(\tau)$  и  $f(\tau)$  - вещественные функции.

Представление  $W_*(\zeta)$  в виде (5.4) позволяет удовлетворить комплексный потенциал  $W(\zeta)$  условию (4.12), а также условиям (4.11), если  $w_1(\zeta, \tau)$  и  $w_2(\zeta, \tau)$  удовлетворяют этим условиям.

Полагая, что  $g(\tau)$  и  $f(\tau)$  функции класса Гёльдера, находим согласно [4] предельные значения (5.4) на кривой  $L'$ :

$$W_*^\pm(\zeta) = \int_{L'} P(\tau) [g(\tau)w_1(\zeta, \tau) - f(\tau)w_2(\zeta, \tau)] dl_\tau \pm \frac{f(\zeta) + ig(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L', \quad (5.5)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Используем (5.3)-(5.5). Согласно (4.14) имеем в случае задачи сопряжения на границе  $\Gamma'$  комплексные потенциалы течений

$$W_\nu(\zeta) = W_0(\zeta) - \int_{\Gamma'} f(\tau)P(\tau)w_2(\zeta, \tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D'_\nu, \quad \nu = 1, 2, \quad (5.6)$$

где  $f(\tau)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) + 2\lambda \int_{\Gamma'} f(\tau)P(\tau) \operatorname{Re} w_2(\zeta, \tau) dl_\tau = 2\lambda \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'. \quad (5.7)$$

Для первой краевой задачи на основании (4.9) имеем комплексный потенциал

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) - \int_{\sigma_1'} f(\tau)P(\tau)w_2(\zeta, \tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D', \quad (5.8)$$

где  $f(\tau)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) - 2 \int_{\sigma_1'} f(\tau)P(\tau) \operatorname{Re} w_2(\zeta, \tau) dl_\tau = -2\varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma_1'. \quad (5.9)$$

Для второй краевой задачи согласно (4.10) имеем

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + \int_{\sigma_2'} g(\tau) P(\tau) w_1(\zeta, \tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D', \quad (5.10)$$

где  $g(\tau)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(\zeta) + 2 \int_{\sigma_2'} g(\tau) P(\tau) \operatorname{Im} w_1(\zeta, \tau) dl_\tau = -\frac{2\psi_0(\zeta)}{P(\zeta)}, \quad \zeta \in \sigma_2'. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.7), (5.9) и (5.11) – граничные интегральные неоднородные уравнения второго рода со слабой сингулярностью ядер (типа Фредгольма). Эти уравнения можно решить численно на основе известного метода дискретных особенностей.

По найденным функциям  $g(\zeta)$  и  $f(\zeta)$  определяем комплексные потенциалы (5.6), (5.8) и (5.10). Тогда согласно (4.8) определяем  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  и, используя гомеоморфизм  $\zeta(z)$  (который в случае проницаемости среды (3.1) имеет вид (3.2)), находим искомого обобщенный потенциал  $\varphi(z)$  и функцию тока  $\psi(z)$ .

Отметим, что уравнения (1.1) описывают также нестационарные двумерные течения (время входит в  $\varphi$  и  $\psi$  как параметр). Поэтому полученные выше результаты имеют место также в нестационарном случае.

### Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. школа. 1983. 160 с.
2. Пивень В.Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физ.-мат. факультета ГОУ ВПО «ОГУ». Вып. 6. Изд-во ОГУ, 2007. с. 120-125.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ».- Харьков-Херсон. 2007. С. 239-243.
4. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл.: Изд-во ГОУ ВПО «ОГУ». 2006. 508 с.
5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. 1988. 512 с.
6. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск.: Наука. 1974. 100 с.
7. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде // Вісник Харківського національного університету. №775. Харків. 2007. С. 205-215.

## ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ<sup>1</sup>

Ю.С. Федяев

Россия, Орловский государственный университет

Ставится двумерная задача о эволюции границы раздела различных жидкостей в неоднородных слоях грунта. Исследование этой задачи сведено к решению системы интегральных и дифференциальных уравнений. Получен первый интеграл движения границы раздела жидкостей. Предлагается методика контроля точности численно решения эволюционной задачи.

1. Рассмотрим двумерную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости постоянной плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$  в тонком неоднородном слое проводимости

$$P(M) = K(M)H(M) \quad (P(M) > 0). \quad (1.1)$$

Здесь  $M$  – точка в плоскости основания слоя,  $K(M)$  – коэффициент проницаемости слоя,  $H(M)$  – его толщина. Считаем, что основание слоя является горизонтальной плоскостью, на которой выбрана декартова система координат  $Oxy$ . Массовая сила  $\vec{F}$  параллельна основанию слоя. Проводимость  $P(M)$  моделируется непрерывной с первыми частными производными функцией координат. Движение жидкости обусловлено работой совершенных нагнетательных и эксплуатационных скважин, которые моделируются источниками и стоками течения. Они являются особыми точками поля скоростей жидкости.

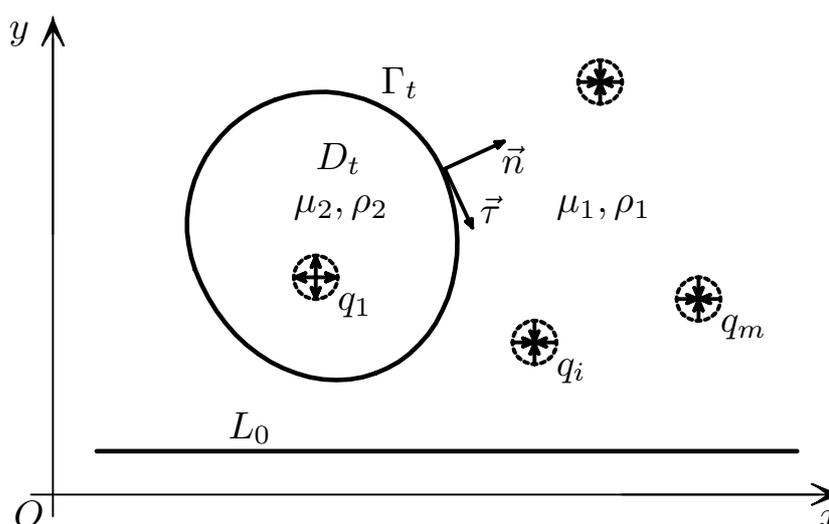


Рис. 1. Область фильтрации

Поле скоростей жидкости  $\vec{v}(M, t)$  в каждый момент времени  $t$  всюду в области течения  $D$ , за исключением особых точек, удовлетворяет следующей системе уравнений в безразмерных величинах [1]:

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_y(M,t)}{K(M)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x(M,t)}{K(M)} \right) = 0, \quad M \in D, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (H(M)v_x(M,t)) + \frac{\partial}{\partial y} (H(M)v_y(M,t)) = 0, \quad M \in D. \quad (1.3)$$

Полагаем, что в области фильтрации  $D$  присутствует изменяющаяся с течением времени область  $D_t$ , ограничена кривой  $\Gamma_t$ . Вне области  $D_t$  находится первая жидкость постоянной вязкости  $\mu_1$  и плотности  $\rho_1$ . В области  $D_t$  находится вторая жидкость постоянной вязкости  $\mu_2$  и плотности  $\rho_2$  (см. рис. 1). Скважины в области  $D_t$  нагнетают (отбирают) первую жидкость, а вне этой области – вторую жидкость. Граница  $\Gamma_t$  изменяется так, что её в любой момент времени можно моделировать простой (без самопересечений) кривой класса Ляпунова. Положение области  $D_t$  (границы  $\Gamma_t$ ) в начальный момент времени  $t=0$  известно, которое обозначим  $D_0$  ( $\Gamma_0$ ). Параметрическое уравнение границы  $\Gamma_0$  имеет вид

$$\text{при } t=0 \quad \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \quad M \in \Gamma_0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\vec{r}_M$  – радиус-вектор точки  $M$ ,  $\sigma$  – параметр.

В области течения  $D$  также может присутствовать сингулярная линия  $L_0$ , на которой проводимость слоя (1.1) обращается в ноль или бесконечность. Если проводимость слоя на ней обращается в бесконечность, обозначим её  $L_{01}$ . Когда же проводимость слоя на сингулярной линии обращается в ноль, обозначим её  $L_{02}$ . Сингулярная линия  $L_0 = L_{01} \cup L_{02}$  служит границей области фильтрации  $D$ . Обозначим  $\bar{D} = D \cup C$ , где контур  $C = \Gamma_t \cup L_0$ . Источники (стоки) течения располагаются только в области  $D$ , на границе  $\Gamma_t$  их нет.

Пусть известно поле скоростей  $\vec{v}_0(M,t)$  течения «разноцветные» жидкостей ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ) в неоднородной среде. Это поле скоростей обусловлено работой скважин, расположенных в точках  $M_{0i}$  области фильтрации  $D$ , которые моделируются источниками (стоками) мощности  $q_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ . Тогда поле скоростей  $\vec{v}_0(M,t)$  имеет вид

$$\vec{v}_0(M,t) = \sum_{i=1}^m q_i(t) \vec{V}_i(M, M_{0i}), \quad M \in \bar{D}. \quad (1.5)$$

Функции  $\vec{V}_i(M, M_{0i})$  имеют сингулярность типа  $1/|\vec{r}_M - \vec{r}_{M_{0i}}|$  в точках нахождения особенностей  $M_{0i}$ , а их вид зависит от закона изменения проводимости слоя. Скорость  $\vec{v}_0(M,t)$  всюду в области  $D$ , за исключением особых точек, удовлетворяет основным уравнениям (1.2) и граничному условию на сингулярной линии  $L_0$  [1].

Учтём поле скоростей  $\vec{v}_0(M,t)$  и представим искомое поле скоростей  $\vec{v}(M,t)$  следующим образом

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0(M, t) + \vec{v}_*(M, t), \quad M \in D, \quad (1.6)$$

где  $\vec{v}_*(M, t)$  – скорость возмущения, обусловленного наличием границы  $\Gamma_t$ .  
Скорость возмущения  $\vec{v}_*(M, t)$  должна удовлетворять основным уравнениям (1.2), (1.3) и соответствующим условиям на границах  $\Gamma_t$  и  $L_0$  [1].

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы по сравнению с силами гидродинамического давления. Тогда на подвижной границе  $\Gamma_t$  выполняются условия непрерывности расхода жидкости и давления, которые для скорости возмущения имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{*n}^+(M, t) &= v_{*n}^-(M, t), \\ (1 - \lambda_\mu) v_{*\tau}^+(M, t) - (1 + \lambda_\mu) v_{*\tau}^-(M, t) &= \\ &= 2 \left[ \lambda_\mu v_{0\tau}(M, t) + \alpha K(M) \frac{\partial \Pi(M, t)}{\partial \tau_M} \right], \quad M \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и далее «+» («-») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе со стороны нормали  $\vec{n}$  (или противоположной стороны). Нормаль направлена из области  $D_t$ , а вектор касательной  $\vec{\tau}$  образует с вектором нормали  $\vec{n}$  правую тройку. Параметр  $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1)$ ,  $\lambda_\mu \in (-1; 1)$ ,  $\alpha = (\rho_2 - \rho_1) / (\mu_2 + \mu_1)$ . Функция  $\Pi(M, t)$  – потенциал массовой силы  $\vec{F} = -\nabla \Pi$ .

На сингулярной линии  $L_{01}$  выполняется условие постоянства давления

$$v_{*\tau}^+(M, t) = 0, \quad M \in L_{01}, \quad (1.8)$$

а на сингулярной линии  $L_{02}$  выполняется условие отсутствия расхода жидкости

$$\left[ H(M) v_{*n}(M, t) \right]^+ = 0, \quad M \in L_{02}. \quad (1.9)$$

Нормаль к границе  $L_0$  направлена в область фильтрации  $D$ .

Если область  $D$  содержит бесконечно удалённую точку, то скорость возмущения должна затухать на бесконечности

$$\vec{v}_*(M, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho(M, \Gamma_t) \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Здесь  $\rho(M, \Gamma_t)$  – расстояние между точкой  $M$  и границей  $\Gamma_t$ .

В начальный момент времени  $t = 0$  положение подвижной границы определяется уравнением (1.4). Для нахождения положения границы  $\Gamma_t$  в последующие моменты времени  $t > 0$  запишем дифференциальное уравнение её движения. Учитывая связь физической скорости и скорости фильтрации, согласно [2] это уравнение имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M, t) + \frac{\vec{v}_*^+(M, t) + \vec{v}_*^-(M, t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t. \quad (1.11)$$

Таким образом, нахождение поля скоростей  $\vec{v}(M, t)$  и положения границы  $\Gamma_t$  в неоднородном слое сводится к отысканию скорости

возмущения  $\vec{v}(M, t)$ , удовлетворяющей уравнениям (1.2), (1.3) условиям (1.7) – (1.10), и интегрировании дифференциального уравнения движения границы (1.11) при начальном условии (1.4).

2. Будем искать скорость возмущения  $\vec{v}_*(M, t)$  в виде потенциала вихревого слоя, распределённого с плотностью  $f(M, t)$  на границе  $\Gamma_t$ :

$$\vec{v}_*(M, t) = \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{v}_B^*(M, N) d\ell_N, \quad M \in D. \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{v}_B^*(M, N) = \vec{v}_B(M, N)/K(N)$ ,  $\vec{v}_B(M, N)$  – скорость в точке  $M$  от нормированного вихря, расположенного в точке  $N$ . Эта скорость выражается через функцию тока вихря  $\Psi(M, N)$  по формуле [2]

$$\vec{v}_B(M, N) = \frac{1}{H(M)} \left[ \frac{\partial \Psi(M, N)}{\partial y_M} \vec{i} - \frac{\partial \Psi(M, N)}{\partial x_M} \vec{j} \right], \quad (2.2)$$

где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  – орты координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ . При наличии в области фильтрации сингулярной линии  $L_0$  скорость  $\vec{v}_B(M, N)$  удовлетворяет граничным условиям (1.8) и (1.9). Поэтому скорость возмущения (2.1) тоже удовлетворяет этим условиям. Для скорости возмущения также выполняется условие на бесконечности (1.10).

Непрерывно продолжим скорость  $\vec{v}_*(M, t)$  на границу  $\Gamma_t$ . Следуя [2], получаем её предельные значения

$$\vec{v}_*^\pm(M, t) = \vec{v}_*(M, t) \pm \frac{f(M, t)}{2} \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.3)$$

Здесь под  $\vec{v}_*(M, t)$  понимается прямое значение скорости возмущения (2.1) на границе  $\Gamma_t$ .

Из (2.3) следует, что нормальная составляющая предельного значения скорости возмущения на границе  $\Gamma_t$  непрерывна. Подставляя (2.3) в условия (1.7) получаем неоднородное интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма относительно функции  $f(M, t)$

$$\begin{aligned} f(M, t) - 2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} f(N, t) v_{B\tau}^*(M, N) d\ell_N = \\ = 2 \left[ \lambda_\mu v_{0\tau}(M, t) + \alpha K(M) \frac{\partial \Pi(M, t)}{\partial \tau_M} \right], \quad M \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $v_{B\tau}^*(M, N) = \vec{v}_B^*(M, N) \cdot \vec{\tau}_M$ .

Подставляя (2.3) в (1.11), получим уравнение движения границы  $\Gamma_t$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M, t) + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{v}_B^*(M, N) d\ell_N, \quad M \in \Gamma_t. \quad (2.5)$$

Следовательно, для нахождения скорости возмущения  $\vec{v}_*(M, t)$  необходимо решить уравнение (2.4) относительно плотности вихревого слоя на границе  $\Gamma_t$ . Вычислив интеграл (2.1) получим искомую скорость.

Положение границы  $\Gamma_t$  находим при решении дифференциального уравнения (2.5) при начальном условии (1.4).

3. Получим первый интеграл движения границы раздела жидкостей. В случае вытеснения жидкости по модели Лейбензона (течения Хеле-Шоу) бесконечная серия первых интегралов получена Ричардсоном [3]. Обобщим этот результат на случай поршневого вытеснения жидкости в слое проводимости  $P(M)$ . Пусть в точках области  $M_{0i}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) области  $D_t$ , находятся источники (стоки) течения полного расхода  $\Pi_i$  ( $\Pi_i = q_i H(M_{0i})$ ). Подошва и кровля слоя непроницаемы. Для малого промежутка времени  $\Delta t$  имеет место соотношение (см. рис. 2)

$$\int_{D_{t+\Delta t}} H(M) dx dy = \int_{D_t} H(M) dx dy + \int_{\Gamma_t} H(M) v_n(M, t) \Delta t d\ell_M + o(\Delta t). \quad (3.1)$$

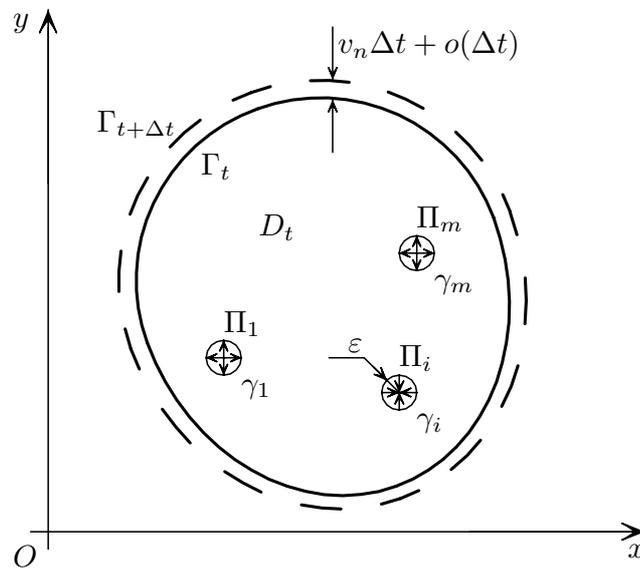


Рис. 2. Движение границы  $\Gamma_t$

Здесь учтено, что нормальная составляющая скорости движения границы раздела жидкостей  $v_n(M, t)$  непрерывна на границе  $\Gamma_t$ . Разделив (3.1) на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} H(M) dx dy = \int_{\Gamma_t} H(M) v_n(M, t) d\ell_M. \quad (3.2)$$

Используя формулу Остроградского-Гаусса из (3.2) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} H(M) dx dy = \int_{D_\gamma} \operatorname{div}(H(M) \vec{v}(M, t)) dx dy + \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} H(M) v_n(M, t) d\ell_M. \quad (3.3)$$

Здесь  $D_\gamma$  есть область  $D_t$  без  $\gamma$  кругов малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках расположения особых точек  $M_{0i}$ . Учитывая, что подынтегральное выражение в интеграле по области  $D_\gamma$ , согласно (1.3), обращается в ноль, а

$\int_{\gamma_i} H(M) v_n(M, t) d\ell_M = \Pi_i$  из уравнения (3.3) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} H(M) dx dy = \sum_{i=1}^m \Pi_i. \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) выражает закон сохранения объёма фильтрующей жидкости.

Получим дискретный аналог равенства (3.4), который можно использовать для контроля точности нахождения положения подвижной границы  $\Gamma_t$ . Считаем, что нам известно положение границы  $\Gamma_t$  в моменты времени  $t_p$  и  $t_{p+1}$ , которые задаются множествами точек  $\{x_i^p, y_i^p, i = 0 \dots n_p\}$  и  $\{x_i^{p+1}, y_i^{p+1}, i = 0 \dots n_{p+1}\}$ . Тогда, используя теорему о среднем значении интеграла и аппроксимируя производную по времени правой разностью, соотношение (3.4) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n_p} H(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i^{p+1} \approx \sum_{i=1}^m \Pi_i \Delta t_{p+1}. \quad (3.5)$$

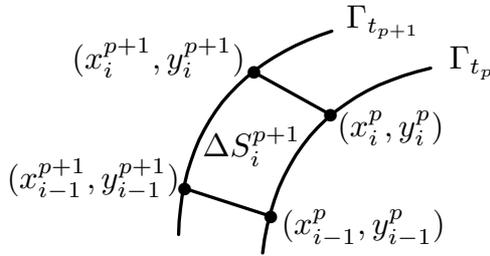


Рис. 3. Движение границы

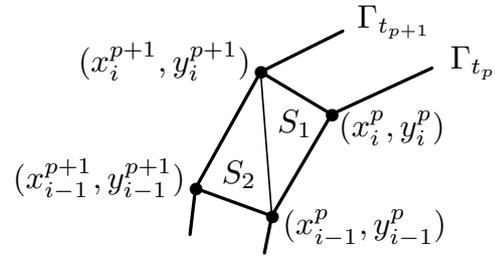


Рис. 4. Интерполяция границы

Здесь  $\Delta S_i^{p+1}$  – изменение площади области  $D_t$ , вызванное смещением точек границы  $(x_{i-1}^p, y_{i-1}^p), (x_i^p, y_i^p)$  в положение  $(x_{i-1}^{p+1}, y_{i-1}^{p+1}), (x_i^{p+1}, y_i^{p+1})$  (см. рис. 3), точка  $(x_i^*, y_i^*) \in \Delta S_i^{p+1}$ ,  $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$ ,  $p = 0, 1, \dots$ . При интерполяции границы  $\Gamma_t$  линейными сплайнами  $\Delta S_i^{p+1}$  представляет собой площадь четырёхугольника, в вершинах которого находятся точки  $(x_{i-1}^p, y_{i-1}^p), (x_i^p, y_i^p), (x_{i-1}^{p+1}, y_{i-1}^{p+1}), (x_i^{p+1}, y_i^{p+1})$  (см. рис. 4).

Найдём площадь четырёхугольника  $\Delta S_i^{p+1}$ . Согласно рисунку 4  $\Delta S_i^{p+1} = S_1 + S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  – площади треугольников, построенных на вершинах  $(x_{i-1}^p, y_{i-1}^p), (x_i^p, y_i^p), (x_i^{p+1}, y_i^{p+1})$  и  $(x_{i-1}^p, y_{i-1}^p), (x_i^{p+1}, y_i^{p+1}), (x_{i-1}^{p+1}, y_{i-1}^{p+1})$  соответственно. Используя формулу для площади треугольника [5] получим:

$$S_1 = \frac{1}{2} \left[ (x_i^p - x_{i-1}^p)(y_i^{p+1} - y_{i-1}^p) - (x_i^{p+1} - x_{i-1}^p)(y_i^p - y_{i-1}^p) \right], \quad (3.6)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[ (x_i^{p+1} - x_{i-1}^p)(y_{i-1}^{p+1} - y_{i-1}^p) - (x_{i-1}^{p+1} - x_{i-1}^p)(y_i^{p+1} - y_{i-1}^p) \right].$$

Здесь величины  $S_1$  и  $S_2$  больше нуля, если смещение точек  $(x_{i-1}^p, y_{i-1}^p)$  и  $(x_i^p, y_i^p)$  вызывают увеличение площади области  $D_i$  и меньше нуля, в противоположном случае. Следовательно, сумма  $S_1 + S_2$  равна изменению площади области  $D_i$  между точками  $(x_{i-1}^p, y_{i-1}^p)$  и  $(x_i^p, y_i^p)$ . Выражение (3.5) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n_p} (H(x_{1i}^*, y_{1i}^*)S_1 + H(x_{2i}^*, y_{2i}^*)S_2) \approx \sum_{i=1}^m \Pi_i \Delta t_{p+1}. \quad (3.7)$$

где  $x_{1i}^* = (x_{i-1}^p + x_i^p + x_i^{p+1})/3$ ,  $y_{1i}^* = (y_{i-1}^p + y_i^p + y_i^{p+1})/3$ ,  $x_{2i}^* = (x_{i-1}^p + x_i^{p+1} + x_{i-1}^{p+1})/3$ ,  $y_{2i}^* = (y_{i-1}^p + y_i^{p+1} + y_{i-1}^{p+1})/3$ .

Соотношение (3.7) можно использовать для контроля точности нахождения положения границы  $\Gamma_t$ . Для этого введём параметр  $\delta$ , который характеризует точность выполнения интегрального соотношения (3.5)

$$\delta = \left( \sum_{i=1}^m \Pi_i \Delta t_{p+1} - \sum_{i=1}^{n_p} H(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i^{p+1} \right) / \sum_{i=1}^m \Pi_i \Delta t_{p+1} \cdot 100\%. \quad (3.8)$$

Наряду с выполнением интегрального соотношения (3.4), следующего из уравнения неразрывности (1.3), для поля скоростей должно выполняться уравнений (1.2), которое запишем в виде.

$$\text{rot} \frac{\vec{v}(M, t)}{K(M)} = 0. \quad (3.9)$$

Используя теорему Стокса [5] из (3.9) получим, что

$$\oint_L \frac{\vec{v}(M, t)}{K(M)} d\vec{\ell}_M = 0. \quad (3.10)$$

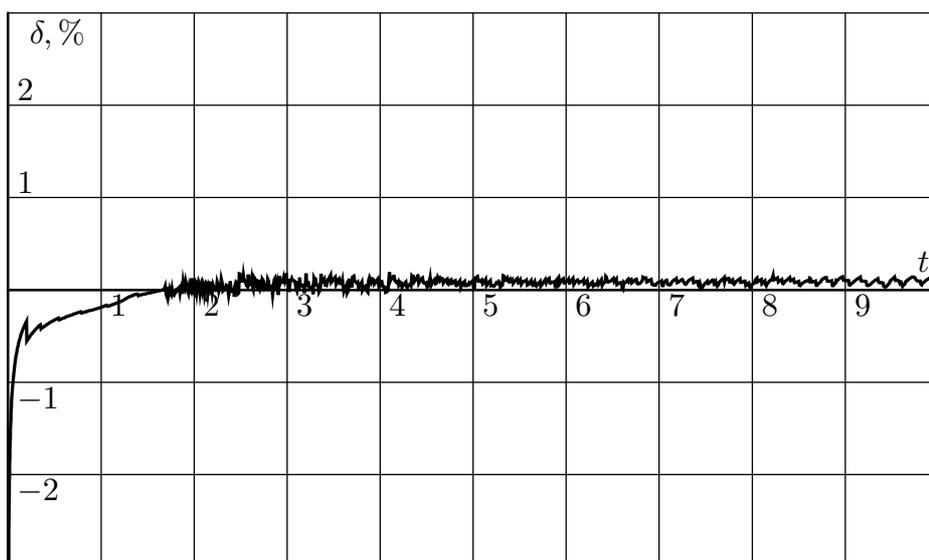
В уравнении (3.10) область, охватываемая контуром  $L$ , не содержит особых точек течения. Если же в этой области находятся особые точки, то циркуляция скорости по контуру  $L$  будет равна суммарной интенсивности вихрей, охватываемых этим контуром.

Моделирование границы  $\Gamma_t$  вихревым слоем не должно приводить к появлению дополнительных особых точек в области фильтрации. Поэтому суммарная интенсивность вихрей на этой границе должна обращаться в ноль. Следовательно, для плотности вихревого слоя на  $\Gamma_t$  имеет место равенство

$$\oint_{\Gamma_t} f(N, t) d\ell_N = 0. \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11) можно использовать для контроля точности нахождения функции  $f(M, t)$  при решении интегрального уравнения (2.4).

Заметим, что первый интеграл движения границы раздела жидкостей имеет место и при движении жидкости в кусочно-неоднородной среде. Это является следствием того, что в этом случае поле скоростей также удовлетворяет системе уравнений (1.2), (1.3) [1].



**Рис. 5.** Погрешность выполнения интегрального соотношения

На рис. 5 показан характерный вид зависимости параметра  $\delta$  от времени  $t$ . В задаче рассматривалось движение границы раздела разнвязких жидкостей ( $\lambda_\mu = 0,5$ ,  $\alpha = 0$ ) от нагнетательной скважины постоянной мощности в кусочно-однородном грунте. Задача решалась численно на основе метода дискретных особенностей [4].

Видим, что около нагнетательной скважины погрешность составляет несколько процентов и резко уменьшается по мере удаления от контура скважины. Далее погрешность осциллирует около нуля. Это говорит о хорошей точности выполнения интегрального соотношения (3.4) при решении задачи выбранным методом.

### Литература

1. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. 508 с.
2. Пивень В.Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. №12. С. 1705–1710.
3. Варченко А.Н., Этингоф П.И. Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса. М.: Наука: Изд. фирма «Физ.-мат. лит.», 1995. 76 с.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 554 с.

## РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ПЛОСКОМ УГЛЕ

М.И. Ходотова

Россия, Брянский государственный университет  
имени академика И.Г. Петровского, e-mail: marina.khodotova@mail.ru

1. В работе [1] для уравнения Лапласа в плоском угле с граничными условиями Дирихле и Неймана был применен метод волновой факторизации для доказательства разрешимости соответствующей краевой задачи. В настоящей работе показывается, что задача с косой производной может быть рассмотрена аналогичным методом и сведена к системе двух разностных уравнений первого порядка аналогично [2].

2. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию  $u_+$ , определенную в  $C_+^a$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$(\Delta u_+)(x) = 0, \quad x \in C_+^a, \quad (1)$$

а на сторонах угла  $\partial C_+^a$  краевому условию Неймана (на одной)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_2=x_1, x_1>0} = 0 \quad (2)$$

и краевому условию (на другой)

$$a \frac{\partial u}{\partial x_2} + b \frac{\partial u}{\partial x_1} + cu \Big|_{x_2=-x_1, x_1<0} = g, \quad (3)$$

где  $n$  - нормаль к прямой  $x_2 = x_1$ .

Делая замену переменных в задаче (1) – (3)  $x_1' = x_1 + x_2, x_2' = x_1 - x_2$  и переходя к образам Фурье, имеем общий вид решения задачи с учетом волновой факторизации [1]:

$$\widetilde{U}_+(t_1, t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) \left( \widetilde{c}(t_1) + \widetilde{d}(t_2) \right). \quad (4)$$

Введем следующие обозначения:  $\widetilde{U}_+(t_1, t_2) = \widetilde{u}_+((t_2 + t_1)/2, (t_2 - t_1)/2)$ ,  
 $a_{\neq}(t_1, t_2) = A_{\neq}((t_2 + t_1)/2, (t_2 - t_1)/2)$ ,  $\widetilde{c}(t_1) = \widetilde{c}_0(t_1)$ ,  $\widetilde{d}(t_2) = \widetilde{d}_0(t_2)$ ,

где неизвестные функции  $\widetilde{c}_0, \widetilde{d}_0$  удовлетворяют условиям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_1 \widetilde{U}_+(t_1, t_2) dt_1 = 0, \quad (5)$$

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} t_1 \widetilde{U}_+(t_1, t_2) dt_2 + b \int_{-\infty}^{+\infty} t_2 \widetilde{U}_+(t_1, t_2) dt_2 + c \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}_+(t_1, t_2) dt_2 = \widetilde{g}'(t_1).$$

Подставляя (4) и (5), получаем следующую систему двух линейных интегральных уравнений относительно  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{d}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_1 a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) \tilde{c}(t_1) dt_1 + \tilde{d}(t_2) \int_{-\infty}^{+\infty} t_1 a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) dt_1 = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{c}(t_1) \int_{-\infty}^{+\infty} (at_1 + bt_2 + c) a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) dt_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (at_1 + bt_2 + c) a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) \tilde{d}(t_2) dt_2 = \tilde{g}'(t_1).$$

Для упрощения системы требуется вычисление следующих интегралов:

$$b(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) dt_2, \quad b_1(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t_2 a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) dt_2, \quad b_2(t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t_1 a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) dt_1.$$

С учетом предельного перехода при  $k \rightarrow 0$  выпишем выражение

$$a_{\neq}(t_1, t_2) = \begin{cases} (t_2 - t_1)/\sqrt{2} + \sqrt{-t_1 t_2} \operatorname{sgn}(t_2 - t_1), & t_1 t_2 < 0, t_1 \neq t_2, \\ (t_2 - t_1)/\sqrt{2} + i\sqrt{t_1 t_2}, & t_1 t_2 > 0. \end{cases}$$

Поскольку функция  $b(t_1)$  однородна степени нуль, достаточно вычислить  $b(\pm 1)$  [1]. Аналогично поступаем с  $b_1(t_1)$ ,  $b_2(t_2)$ .

Систему (6) перепишем в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t_2) \tilde{c}(t_1) dt_1 + \tilde{d}(t_2) = 0, \quad (7)$$

$$a\tilde{c}(t_1) + (bb_1(t_1)b^{-1}(t_1) + c)t_1^{-1}\tilde{c}(t_1) + (a + ct_1^{-1}) \int_{-\infty}^{+\infty} L(t_1, t_2) \tilde{d}(t_2) dt_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} M(t_1, t_2) \tilde{d}(t_2) dt_2 = \tilde{g}_1(t_1),$$

где введены следующие обозначения:

$$K(t_1, t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) b_2^{-1}(t_2) t_1, \quad L(t_1, t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) b^{-1}(t_1),$$

$$M(t_1, t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2) b^{-1}(t_1) t_2 t_1^{-1}, \quad \tilde{g}_1(t_1) = \tilde{g}'(t_1) b^{-1}(t_1) t_1^{-1}.$$

Для всех  $t_1 > 0, t_2 > 0$  обозначим  $K_{11}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2)$ ,  $K_{12}(t_1, t_2) = K(-t_1, t_2)$ ,  $K_{21}(t_1, t_2) = K(-t_1, -t_2)$ ,  $K_{22}(t_1, t_2) = K(t_1, -t_2)$ .

Аналогично определяем ядра  $M_{ij}(t_1, t_2)$ ,  $L_{ij}(t_1, t_2)$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Отметим, что все ядра представляют собой функции, однородные степени  $-1$ .

Обозначим через  $c_0(t_1)$  сужение  $\tilde{c}(t_1)$  на  $(0; +\infty)$ ,  $c_1(t_1)$  сужение  $\tilde{c}(-t_1)$  на  $(0; +\infty)$ ; аналогично определим функции  $d_0(t_2)$ ,  $d_1(t_2)$ . Наконец, обозначим через  $g_{10}(t_1)$  сужение  $\tilde{g}_1(t_1)$  на  $(0; +\infty)$ ,  $g_{11}(t_1)$  сужение  $\tilde{g}_1(-t_1)$

на  $(0; +\infty)$ . В результате вместо системы двух линейных интегральных уравнений (7) относительно двух неизвестных  $\tilde{c}(t_1), \tilde{d}(t_2)$  имеем систему четырех линейных интегральных уравнений относительно четырех неизвестных функций  $c_0(t_1), c_1(t_1), d_0(t_2), d_1(t_2)$  на положительной полуоси, ядра которых однородны степени  $-1$ , что позволяет применять для исследования разрешимости этой системы преобразование Меллина.

Последнее преобразование сводит указанную  $(4 \times 4)$  – систему линейных интегральных уравнений к  $(4 \times 4)$  – системе разностных уравнений относительно неизвестных  $\widehat{c}_0(\lambda), \widehat{c}_1(\lambda), \widehat{d}_0(\lambda), \widehat{d}_1(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
& \widehat{K}_{11}(\lambda)\widehat{c}_0(\lambda) + \widehat{K}_{12}(\lambda)\widehat{c}_1(\lambda) + \widehat{d}_0(\lambda) = 0, \\
& \widehat{K}_{21}(\lambda)\widehat{c}_0(\lambda) + \widehat{K}_{22}(\lambda)\widehat{c}_1(\lambda) + \widehat{d}_1(\lambda) = 0, \\
& a\widehat{c}_0(\lambda) + (bb_1(1)b^{-1}(1) + c)\widehat{c}_0(\lambda - 1) + (a\widehat{L}_{11}(\lambda) + b\widehat{M}_{11}(\lambda))\widehat{d}_0(\lambda) + \\
& + (a\widehat{L}_{12}(\lambda) + b\widehat{M}_{12}(\lambda))\widehat{d}_1(\lambda) + c\widehat{L}_{11}(\lambda)\widehat{d}_0(\lambda - 1) + c\widehat{L}_{12}(\lambda)\widehat{d}_1(\lambda - 1) = \widehat{g}_{10}(\lambda), \\
& a\widehat{c}_1(\lambda) - (bb_1(-1)b^{-1}(-1) + c)\widehat{c}_1(\lambda - 1) + (a\widehat{L}_{21}(\lambda) + b\widehat{M}_{21}(\lambda))\widehat{d}_0(\lambda) + \\
& + (a\widehat{L}_{22}(\lambda) + b\widehat{M}_{22}(\lambda))\widehat{d}_1(\lambda) - c\widehat{L}_{21}(\lambda)\widehat{d}_0(\lambda - 1) - c\widehat{L}_{22}(\lambda)\widehat{d}_1(\lambda - 1) = \widehat{g}_{20}(\lambda),
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $\widehat{\phantom{x}}$  обозначает преобразование Меллина соответствующих функций,  $\widehat{K}_{ij}(\lambda), \widehat{M}_{ij}(\lambda), \widehat{L}_{ij}(\lambda)$  – преобразование Меллина функций  $K_{ij}(1, t), M_{ij}(t, 1), L_{ij}(t, 1), i, j = 1, 2$ , соответственно. Таким образом, необходимо вычислить преобразования Меллина функций  $K_{ij}(1, t), M_{ij}(t, 1), L_{ij}(t, 1)$  [1]:

$$\begin{aligned}
K_{11}(1, t) &= a_{\neq}^{-1}(1, t)b_1^{-1}(t) = (4\pi)^{-1} e^{-i\pi/4} t^{-1} \left( (t-1)/\sqrt{2} + i\sqrt{t} \right)^{-1}, \\
K_{12}(1, t) &= -a_{\neq}^{-1}(-1, t)b_1^{-1}(t) = -(4\pi)^{-1} e^{-i\pi/4} t^{-1} \left( (t+1)/\sqrt{2} + \sqrt{t} \right)^{-1}, \\
K_{21}(1, t) &= -a_{\neq}^{-1}(-1, -t)b_1^{-1}(-t) = -(4\pi)^{-1} e^{i\pi/4} t^{-1} \left( (1-t)/\sqrt{2} + i\sqrt{t} \right)^{-1}, \\
K_{22}(1, t) &= a_{\neq}^{-1}(1, -t)b_1^{-1}(-t) = -(4\pi)^{-1} e^{i\pi/4} t^{-1} \left( (t+1)/\sqrt{2} + \sqrt{t} \right).
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляем  $M_{ij}(t, 1)$  и  $L_{ij}(t, 1)$ . Имеем:

$$L_{11}(t,1) = -(4\pi)^{-1} e^{-i\pi/4} \left( (1-t)/\sqrt{2} + i\sqrt{t} \right)^{-1} = -itK_{21}(1,t),$$

$$L_{12}(t,1) = (4\pi)^{-1} e^{i\pi/4} \left( (t+1)/\sqrt{2} + \sqrt{t} \right)^{-1} = -tK_{22}(1,t),$$

$$L_{21}(t,1) = (4\pi)^{-1} e^{i\pi/4} \left( (t-1)/\sqrt{2} + i\sqrt{t} \right)^{-1} = itK_{11}(1,t),$$

$$L_{22}(1,t) = (4\pi)^{-1} e^{-i\pi/4} \left( (t+1)/\sqrt{2} + \sqrt{t} \right)^{-1} = -tK_{12}(1,t).$$

$$M_{11}(t,1) = t^{-1}L_{11}(t,1), M_{12}(t,1) = t^{-1}L_{12}(t,1),$$

$$M_{21}(t,1) = -t^{-1}L_{21}(t,1), M_{22}(t,1) = -t^{-1}L_{22}(t,1).$$

С вычислительной точки зрения удобнее найти преобразования Меллина функций  $L_{ij}(t,1)$ ,  $i, j = 1, 2$ , а затем с учетом свойств преобразования Меллина  $\widehat{t^{-1}f(t)} = \widehat{f}(\lambda-1)$  получить преобразования Меллина функций  $M_{ij}(t,1)$  и  $K_{ij}(1,t)$ .

Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1}}{(t-1)/\sqrt{2} + i\sqrt{t}} = 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{y^{2\lambda-1}}{y^2 + \sqrt{2}iy - 1}.$$

Заметим, что справедливо представление

$$(y^2 + \sqrt{2}iy - 1)^{-1} = -\frac{i+1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{i-1}y \right)^{-1} - \frac{i-1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{i+1}y \right)^{-1}.$$

Тогда получим  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1} dt}{a_{\neq}(1,t)} =$

$$= 2\sqrt{2} \left( \frac{i-1}{2} \frac{\pi}{(\sqrt{2}/(i+1))^{2\lambda}} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) - \frac{i+1}{2} \frac{\pi}{(\sqrt{2}/(i-1))^{2\lambda}} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \right) =$$

$$= -2\pi \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{i(\pi/4)(2\lambda-1)} - e^{i(3\pi/4)(2\lambda-1)} \right),$$

откуда следует, что

$$\widehat{L}_{21}(\lambda) = -(1/2) e^{i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{i(\pi/4)(2\lambda-1)} - e^{i(3\pi/4)(2\lambda-1)} \right),$$

и тогда  $\widehat{K}_{11} = -i\widehat{L}_{21}(\lambda-1)$ ,

$$\widehat{K}_{11}(\lambda) = (i/2) e^{i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi(\lambda-1)) \left( e^{i(\pi/4)(2\lambda-3)} - e^{i(3\pi/4)(2\lambda-3)} \right) =$$

$$= (1/2) e^{i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{i(\pi/4)(2\lambda-1)} - e^{i(3\pi/4)(2\lambda-1)} \right).$$

$M_{21}(t,1) = -\widehat{L}_{21}(\lambda-1)$ , следовательно,

$$\widehat{M}_{21}(\lambda) = -(1/2)e^{3i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{i(\pi/4)(2\lambda-1)} - e^{i(3\pi/4)(2\lambda-1)} \right).$$

Аналогично,

$$\widehat{L}_{22}(\lambda) = -e^{-i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \sin((\pi/4)(2\lambda-1)),$$

$$\widehat{K}_{12}(\lambda) = \widehat{M}_{22}(\lambda) = -\widehat{L}_{22}(\lambda-1) = -e^{-i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \cos((\pi/4)(2\lambda-1)),$$

$$\widehat{L}_{12}(\lambda) = -e^{i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \sin((\pi/4)(2\lambda-1)),$$

$$\widehat{K}_{22}(\lambda) = \widehat{M}_{12}(\lambda) = -\widehat{L}_{12}(\lambda-1) = -e^{i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \cos((\pi/4)(2\lambda-1)),$$

$$\widehat{L}_{11}(\lambda) = (1/2)e^{-i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{-i(3\pi/4)(2\lambda-1)} - e^{-i(\pi/4)(2\lambda-1)} \right),$$

$$\widehat{K}_{21}(\lambda) = i\widehat{L}_{11}(\lambda-1) = (1/2)e^{-i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{-i(3\pi/4)(2\lambda-1)} + e^{-i(\pi/4)(2\lambda-1)} \right),$$

$$\widehat{M}_{21}(\lambda) = -\widehat{L}_{11}(\lambda-1) = -(1/2)e^{i\pi/4} \operatorname{cosec}(2\pi\lambda) \left( e^{-i(3\pi/4)(2\lambda-1)} + e^{-i(\pi/4)(2\lambda-1)} \right).$$

Нетрудно систему (8) с помощью элементарных преобразований свести к системе двух разностных уравнений с двумя неизвестными  $\widehat{c}_0(\lambda)$ ,  $\widehat{c}_1(\lambda)$ .

Таким образом, решение задачи (1) с краевыми условиями (2) и (3) сводится к решению следующей системы:

$$\begin{cases} \widehat{A}(\lambda)\widehat{c}_0(\lambda) + \widehat{B}(\lambda)\widehat{c}_1(\lambda) + \widehat{P}(\lambda)\widehat{c}_0(\lambda-1) + \widehat{R}(\lambda)\widehat{c}_1(\lambda-1) = \widehat{g}_{10}(\lambda), \\ \widehat{A}_1(\lambda)\widehat{c}_0(\lambda) + \widehat{B}_1(\lambda)\widehat{c}_1(\lambda) + \widehat{P}_1(\lambda)\widehat{c}_0(\lambda-1) + \widehat{R}_1(\lambda)\widehat{c}_1(\lambda-1) = \widehat{g}_{20}(\lambda), \end{cases}$$

где

$$\widehat{A}(\lambda) = a \left( 1 - \widehat{K}_{11}(\lambda)\widehat{L}_{11}(\lambda) - \widehat{K}_{21}(\lambda)\widehat{L}_{12}(\lambda) \right) - b \left( \widehat{K}_{11}(\lambda)\widehat{M}_{11}(\lambda) + \widehat{K}_{21}(\lambda)\widehat{M}_{12}(\lambda) \right),$$

$$\widehat{B}(\lambda) = -a \left( \widehat{K}_{12}(\lambda)\widehat{L}_{11}(\lambda) + \widehat{K}_{22}(\lambda)\widehat{L}_{12}(\lambda) \right) - b \left( \widehat{K}_{12}(\lambda)\widehat{M}_{11}(\lambda) + \widehat{K}_{22}(\lambda)\widehat{M}_{12}(\lambda) \right),$$

$$\widehat{P}(\lambda) = bb_1(1)b^{-1}(1) + c \left( 1 - \widehat{K}_{11}(\lambda)\widehat{L}_{11}(\lambda) - \widehat{K}_{12}(\lambda)\widehat{L}_{12}(\lambda) \right),$$

$$\widehat{R}(\lambda) = -c \left( \widehat{K}_{12}(\lambda)\widehat{L}_{11}(\lambda) + \widehat{K}_{22}(\lambda)\widehat{L}_{12}(\lambda) \right),$$

3. В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору В.Б. Васильеву за введение в круг вопросов, связанных с краевыми задачами в негладких областях.

### Литература

1. Васильев В. Б. Краевые задачи для уравнения Лапласа в бесконечном плоском угле. Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, №. 9, С. 1155-1164.
2. Солонников В. А., Фролова Е. В. Задача с косой производной для уравнения Лапласа в плоском угле. Нелинейные граничные задачи, вып. 3. Киев, Наукова думка, 1991. С. 86-94.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДВИЖЕНИЯ  
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ  
В АНИЗОТРОПНО-ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ ОТ ИСТОЧНИКА  
ВБЛИЗИ БАССЕЙНА ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ  
ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПОТОКА<sup>1</sup>**

Д.Е. Шестерин

Россия, Орловский государственный университет,  
e-mail: dshesterin@yandex.ru

**Поставлена задача эволюции границы раздела разноцветных жидкостей в анизотропном грунте. Исследована задача о работе источника загрязнения в однородно-анизотропном грунте вблизи бассейна свободной жидкости при наличии поступательного потока.**

1. Фильтрацию несжимаемой жидкости вязкости  $\mu$  и плотности  $\rho$  в недеформируемом анизотропном грунте описывают обобщенный закон Дарси [1]:

$$\vec{v} = K \cdot \nabla \varphi \quad \left( \varphi = -\frac{p + \rho\Pi}{\mu} \right) \quad (1.1)$$

и уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\nabla$  - оператор Гамильтона,  $\varphi$  - обобщенный потенциал,  $\vec{v}$  - скорость фильтрации,  $p$  - давление,  $K = (K_{ij})$ ,  $i, j = 1..3$  - тензор второго ранга, характеризующий свойства среды,  $\Pi$  - потенциал массовых сил.

Уравнения (1.1), (1.2) записаны в безразмерных величинах. Уравнения (1.1), (1.2) описывают также нестационарную фильтрацию, время  $t$  входит в них в этом случае как параметр.

Пусть течение происходит в тонком пласте грунта толщины  $H$  с плоским основанием, где выберем декартову систему координат  $\xi O \eta$ . Обобщенный потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению [4]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ H \left( K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ H \left( K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] = 0, \quad (1.3)$$

где  $(\xi, \eta)$  - координаты точки в основании слоя. Перейдем в плоскости  $(\xi, \eta)$  к главным направлениям анизотропии  $p$  и  $q$ . Уравнение (1.3) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[ H \left( K_p \frac{\partial \varphi}{\sqrt{E} \partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q} \left[ H \left( K_q \frac{\partial \varphi}{\sqrt{G} \partial q} \right) \right] = 0, \quad (1.4)$$

где  $E$  и  $G$  - коэффициенты Ламэ, связанные с квадратом элемента дуги формулами [5]:

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)^2}, G = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)^2}, dS^2 = E dp^2 + G dq^2. \quad (1.5)$$

Запишем уравнение (1.4) в каноническом виде. Для этого воспользуемся, согласно [5], заменой переменных  $p, q$  на  $x, y$ , которые связаны уравнениями Бельтрами:

$$\sqrt{\frac{K_p G}{K_q E}} \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \sqrt{\frac{K_q E}{K_p G}} \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial p}. \quad (1.6)$$

Выбирая одно из решений уравнений (1.6)  $x = x(p, q)$ ,  $y = y(p, q)$  в качестве новых координат запишем уравнение (1.5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( P \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left( P \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) = 0, \quad P = H \sqrt{K_p K_q}. \quad (1.7)$$

2. Будем рассматривать частный случай фильтрации в слоях, удовлетворяющих следующим условиям: сеть координат  $(p, q)$  изотермическая ( $\sqrt{E} = \sqrt{G} = C$ ,  $dS^2 = C^2(p, q)(dp^2 + dq^2)$ ), слой имеет постоянную толщину  $H = 1$ ,  $K_p, K_q$  - постоянные. В этом случае решение уравнений Бельтрами (1.6) имеет вид:

$$x = \sqrt{\frac{K_q}{K_p}} p, \quad y = q. \quad (2.1)$$

Используя (2.1), перепишем (1.5) в виде [5]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.2)$$

3. Пусть в неограниченной области фильтрации  $D$  располагается ограниченная кривой  $\Gamma$  область, заполненная свободной жидкостью. Тогда на границе  $\Gamma$  выполняется условие [3]

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M = (p, q) \in \Gamma, \quad (3.1)$$

здесь «+» означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны нормали.

Потребуем также выполнения для обобщенного потенциала  $\varphi$  условий в бесконечности

$$\varphi(M) = O(r_{MM_0}^{-1}), \quad \left| \sqrt{K_p K_q} \cdot \nabla \varphi(M) \right| = O(r_{MM_0}^{-2}), \quad r_{MM_0} \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Перепишем условия (3.1)-(3.2) в координатах  $(x, y)$

$$\Phi^+(M) = 0, \quad M = (x, y) \in \Gamma', \quad (3.1')$$

$$\Phi(M) = O(r_{M'M'_0}^{-1}), \quad \left| \nabla \Phi(M) \right| = O(r_{M'M'_0}^{-2}), \quad r_{M'M'_0} \rightarrow \infty. \quad (3.2')$$

Заметим, что по форме условия (3.1'), (3.2') не меняются, но (3.1) записываются уже на новой границе  $\Gamma'$ , которая представляют собой границу  $\Gamma$  преобразованную с помощью выражений (2.2).

4. Продвижение границы раздела «разноцветных» жидкостей описывает уравнение, записанное в безразмерных величинах

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.1)$$

Подвижную границу раздела разноцветных жидкостей  $\Gamma_t$  описываем параметрически

$$p = p(t, S), \quad q = q(t, S), \quad (4.2)$$

где  $S$  - параметр. В начальный момент времени  $t = 0$  положение границы  $\Gamma_t$  считаем известным

$$p_0 = p(0, S), \quad q_0 = q(0, S). \quad (4.3)$$

Дифференциальные уравнения движения границы  $\Gamma_t$  имеют вид [5]:

$$\frac{dp}{dt} = K_p \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad \frac{dq}{dt} = K_q \frac{\partial \varphi}{\partial q}. \quad (4.4)$$

Таким образом, задача эволюции границы «разноцветных» жидкостей состоит в следующем: по заданным в области фильтрации источникам и стокам течения, характеристикам грунта, форме границы  $\Gamma$ , известной форме подвижной границы раздела «разноцветных» жидкостей в начальный момент времени  $\Gamma_0$  требуется определить положение границы  $\Gamma_t$  в последующие моменты времени  $t > 0$ . Для этого необходимо найти обобщенный потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнению (1.7), условиям (3.1), (3.2) и интегрировать дифференциальные уравнения движения границы  $\Gamma_t$  (4.4) при начальных условиях (4.3).

5. Решение задачи ищем в виде

$$\Phi(M) = \Phi_0(M) + \Phi_*(M), \quad M = (x, y), \quad (5.1)$$

где  $\Phi_0(M)$  - обобщенный потенциал, описывающий течение в области фильтрации в отсутствие границы  $\Gamma'$ ,  $\Phi_*(M)$  - потенциал возмущения. Перепишем условие (3.1') для потенциала возмущения:

$$\Phi_*(M) = -\Phi_0(M), \quad M = (x, y) \in \Gamma'. \quad (5.2)$$

Потенциал возмущений  $\Phi_*(M)$  ищем в виде потенциала двойного слоя [2]

$$\Phi_*(M) = \int_{\Gamma'} g(N) \frac{\partial F_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N, \quad N = (x, y) \in \Gamma', \quad (5.3)$$

где  $F_1(M, N)$  - первое фундаментальное решение уравнения (2.3),  $\vec{n}$  - орт нормали к границе  $\Gamma$  в точке  $M$ .

Предельное значение потенциала возмущений  $\Phi_*(M)$  на границе  $\Gamma'$  имеет вид [2]

$$\Phi_*^+(M) = \int_{\Gamma'} g(N) \frac{\partial F_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N + \frac{g(M)}{2}, \quad M = (x, y) \in \Gamma'. \quad (5.4)$$

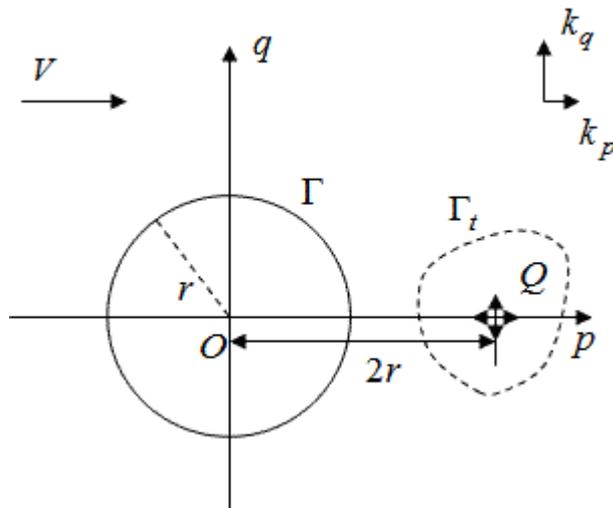
Учитывая (5.3) и (5.4), из условия (5.2) имеем для  $g(N)$  неоднородное интегральное уравнения типа Фредгольма:

$$g(M) - 2 \int_{\Gamma'} g(N) \frac{\partial F_1(M, N)}{\partial n_N} dl_N = 2\Phi_0(M), \quad M = (x, y) \in \Gamma'. \quad (5.5)$$

Решая уравнение (5.5) относительно  $g(M)$ , найдем по формулам (5.3) и (5.1) потенциал  $\Phi(M)$ . Воспользовавшись преобразованиями, обратными (2.1), получим обобщенный потенциал  $\varphi(p, q)$ , подставляя который в дифференциальные уравнения (4.4) и интегрируя которые при начальном условии (4.3) найдем положение границы  $\Gamma_t$  в любой момент времени  $t > 0$ .

Рассмотрим конкретную задачу эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей. Пусть в области фильтрации работает нагнетательная скважина дебита  $Q$ , которую моделируем точечным источником мощностью  $Q$ , расположенная на расстоянии  $r$  от границы бассейна в форме круга радиуса  $r$  (см. рис. 1.). В грунте также присутствует поступательный поток со скоростью  $V$ , направление которого совпадает с направлением оси  $Op$ . Примем радиус окружности  $r$  за характерный размер, за характерное время  $T_0$  выберем время достижения загрязнением бассейна в случае изотропного грунта  $k_p/k_q=1$  в отсутствие поступательного потока ( $V=0$ ):

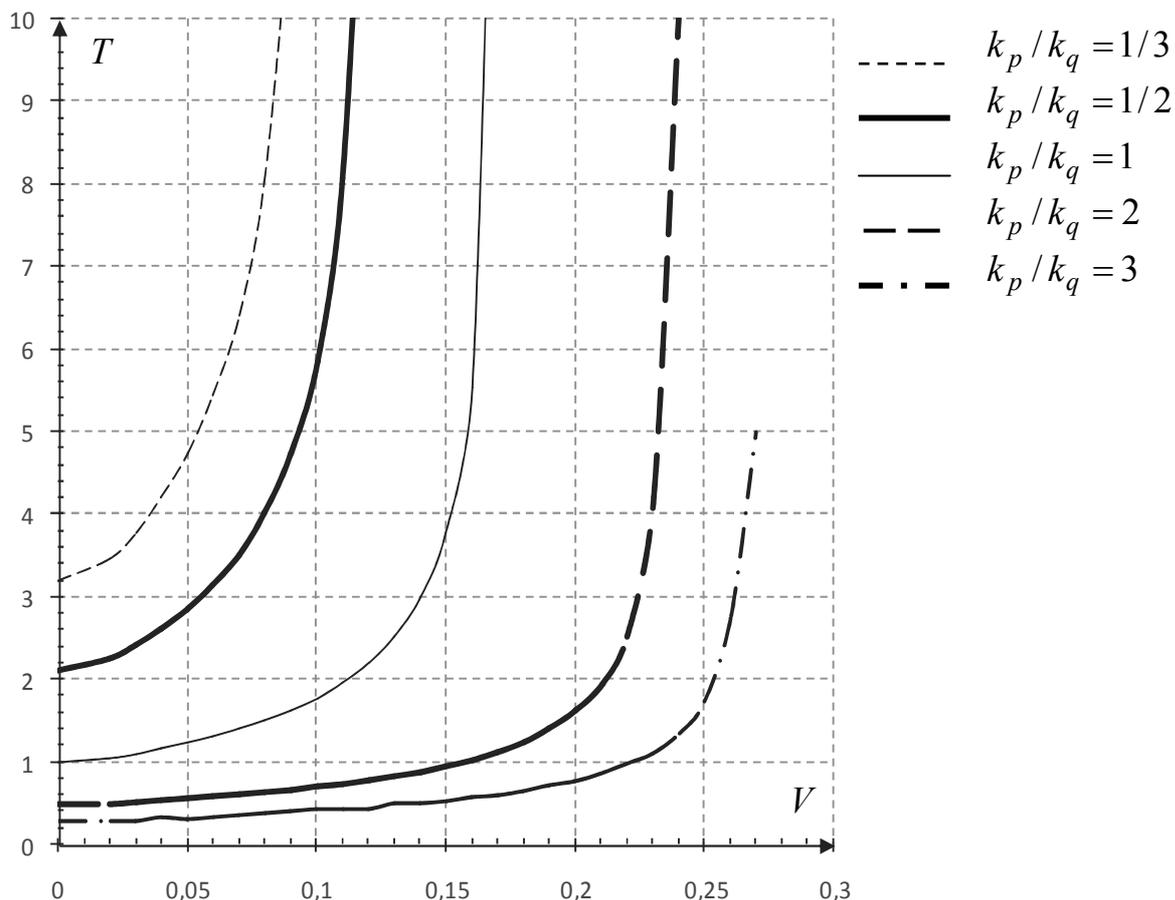
$$T_0 = \frac{\pi}{Q} \int_{2r}^r \frac{p(2p-1)(p-2r)}{p^2-p+r} dp$$



**Рис.1.** Область фильтрации

За характерный дебит примем дебит источника загрязнения  $Q$ , за характерную скорость примем скорость  $V_0 = Q/r$ .

В начальный момент времени  $t=0$  граница раздела жидкостей  $\Gamma_0$  совпадает с контуром нагнетательной скважины. Будем исследовать время  $T$ , за которое «загрязнение», нагнетаемое скважиной попадет в бассейн, ограниченный окружностью  $\Gamma$  в зависимости от скорости поступательного потока. Как видно из графиков, приведенных на рис. 2, существуют условия, при которых «загрязнение» не достигнет бассейна свободной жидкости.



**Рис. 2.** Зависимости времени  $T$  достижения «загрязнением» бассейна от скорости поступательного потока

Как показывает численный эксперимент, в случае  $k_p/k_q = 1/3$  загрязнение не попадет в бассейн при скорости  $V > 0.09$ , в случае  $k_p/k_q = 1/2$  при  $V > 0.12$ , в случае  $k_p/k_q = 1$  при  $V > 0.17$ ,  $k_p/k_q = 2$  при  $V > 0.24$ , а в случае  $k_p/k_q = 3$  бассейн останется незагрязненным при скорости поступательного потока  $V > 0.29$  (см. рис. 2).

### Литература

1. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде // Вісник Харківського національного університету №775. Харьков. 2007. с. 205-215.

2. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости.- Орёл. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет. 2006. 508 с.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ».- Харьков-Херсон. 2007.
4. Пивень В.Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки (сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физико-математического факультета). Орел. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет». 2007.
5. Радыгин В. М., Голубева О.В. Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники. -М.: Высшая школа. 1983. 160 с.

**УДК 532.546**

## **ПОСТРОЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ СТОРОНАМИ УГЛА**

А.Я. Шпилевой, А.А. Зайцев, Е.Ю. Шелудкевич  
Россия, Российский государственный университет  
имени И. Канта, e-mail: shpilevaya@albertina.ru

**Для исследования фильтрационных течений в области, ограниченной сторонами угла, использованы методы изображения особых точек и конформных отображений. Получены комплексные потенциалы течения источника при различных граничных условиях.**

1. Для исследования плоскопараллельных фильтрационных течений, подчиняющихся закону Дарси, используется комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

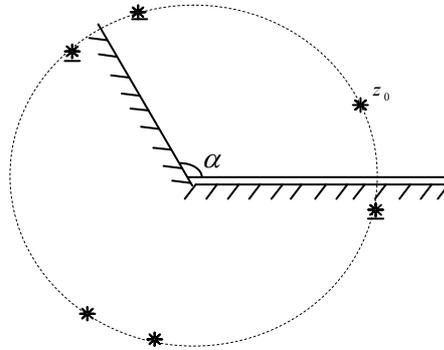
с помощью которого можно определить скорость фильтрации и давление [1]. В случаях, когда границами раздела области фильтрации являются прямые и окружности, для получения комплексного потенциала используются метод изображения особых точек этот метод удобно использовать совместно с методом конформных отображений [2, 3].

2. Рассмотрим область фильтрации, ограниченную непроницаемыми сторонами угла величиной  $\alpha$ . Определим комплексный потенциал течения для точечного источника. Различные случаи данной задачи рассматривались в электростатике [4], теории теплопроводности твердых тел [5], в теории фильтрации [6].

Решим задачу для источника методом изображений. Пусть сначала  $\alpha = \pi/n$ , тогда последовательные отражения от границ сектора дают  $2n-1$  изображений в точках  $\exp(\pi ki/n)z_0$  и  $\exp(\pi ki/n)\bar{z}_0$ ,  $k = 0, n-1$ . Для комплексного потенциала течения получаем; используя разложение по корням:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \ln \left( z - \exp\left(\frac{\pi ki}{n}\right) z_0 \right) + \ln \left( z - \exp\left(\frac{\pi ki}{n}\right) \bar{z}_0 \right) \right) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^n - z_0^n)(z^n - \bar{z}_0^n).$$

Аналогичным способом получается решение для угла  $\alpha = \pi m/n$ . В этом случае изображения располагаются на  $m$ -листной поверхности, которая образуется стандартной склейкой вдоль луча  $\text{Re } z \geq 0$ . Снова их число равно  $2n-1$  и координаты их проекций на физический лист те же, что и в предыдущем случае. На рис. 1 указано расположение мнимых изображений на двулистной римановой поверхности в случае  $\alpha = 2\pi/3$ .



**Рис. 1.** Источник в секторе с углом раствора  $\alpha = 2\pi/3$  и его мнимые изображения, подчеркнутые изображения находятся на втором листе римановой поверхности

Учитывая, что комплексный потенциал течения единственного источника на  $m$ -листной римановой поверхности есть

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(m\sqrt[m]{z} - m\sqrt[m]{z_0}\right),$$

в рассматриваемом случае для потенциала получаем

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \ln \left( m\sqrt[m]{z} - \exp\left(\frac{\pi ki}{nm}\right) m\sqrt[m]{z_0} \right) \left( m\sqrt[m]{z} - \exp\left(\frac{\pi ki}{nm}\right) m\sqrt[m]{\bar{z}_0} \right) \right) = \\ = \frac{Q}{2\pi} \ln \left( z^{\frac{n}{m}} - z_0^{\frac{n}{m}} \right) \left( z^{\frac{n}{m}} - \bar{z}_0^{\frac{n}{m}} \right).$$

Если учесть, что  $\alpha = \pi m/n \rightarrow n/m = \pi/\alpha$ , то полученный результат можно записать в виде

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left( z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \right) \left( z^{\frac{\pi}{\alpha}} - \bar{z}_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \right). \quad (1)$$

Поскольку любое иррациональное число является пределом некоторой последовательности рациональных чисел, то формула (1) будет верна для любого числа  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi$ ).

3. Решение той же задачи получается с помощью конформного отображения

$$\omega = z^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (2)$$

которое отображает сектор с углом раствора  $\alpha$  на верхнюю полуплоскость. Решение для полуплоскости получается с помощью теоремы о прямой [2]

$$W(\omega) = \frac{Q}{2\pi} \ln(\omega - \omega_0)(\omega - \bar{\omega}_0).$$

Заменяя здесь  $\omega$  на  $z$  с помощью формулы (2), получаем решение в виде (1).

4. Пусть сектор с углом раствора  $\alpha$  ограничен свободной жидкостью (рис. 2)



Рис. 2. Сектор ограничен свободной жидкостью

Для определения комплексного потенциала точечного источника используем снова конформное отображение (2). Решение задачи для полуплоскости здесь имеет вид [2]

$$W(\omega) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \bar{\omega}_0}.$$

Заменяя здесь  $\omega$  на  $z$  (формула (2)), получаем

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}{z^{\frac{\pi}{\alpha}} - \bar{z}_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}. \quad (3)$$

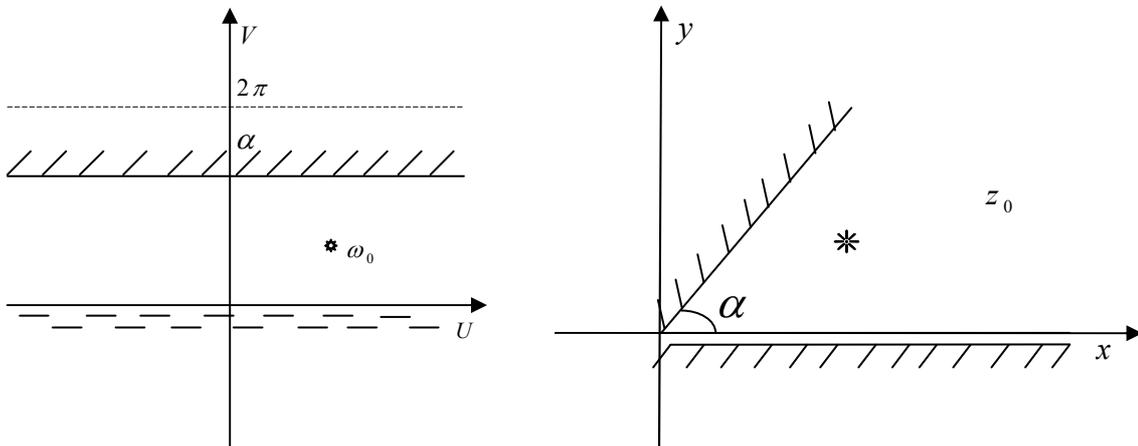


Рис. 3. Конформное отображение плоскости  $z$  на бесконечно-лиственную риманову поверхность листов  $z$

5. Пусть сектор с углом раствора  $\alpha$  ограничен непроницаемыми стенками и вдоль оси  $x$  ( $\text{Re } z > 0$ ) имеется щель заполненная свободной жидкостью (рис. 3). Пусть  $f(z)$  – аналитическая функция, моделирующая течение в области фильтрации. Требуется определить комплексный потенциал этого течения в секторе при наличии щели.

Рассмотрим конформное отображение, осуществляемое функцией

$$z = e^{\omega}, \quad (4)$$

Функция (4) отображает плоскость  $\omega$  на бесконечно-лиственную риманову поверхность, причем полоса  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  отображается на лист римановой поверхности  $z$  с разделом вдоль оси  $x$  ( $\text{Re } z > 0$ ). Полоса  $0 \leq \nu \leq \alpha$  ( $\alpha < 2\pi$ ) отображается в сектор с углом раствора  $\alpha$ . Вид листа  $z$  и плоскости  $\omega$  указаны на рис. 3. Полоса сверху ограничена непроницаемой границей ( $\nu = \alpha$ ), а нижняя область ( $\nu < \alpha$ ) заполнена свободной жидкостью. Используя последовательно теорему о прямой для неоднородной среды плоскости  $\omega$  (рис. 3), определим комплексный потенциал течения, вызванного особыми точками функции  $f(\omega)$  [2]:

$$W(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k f(\omega + 2kih) - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k \bar{f}(\omega + 2kih). \quad (5)$$

Записывая выражение (5) для функции  $f(e^{\omega})$  и переходя к переменной  $z$ , получаем:

$$W(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k f(ze^{2kih}) - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k \bar{f}(ze^{2kih}). \quad (6)$$

Выражение (6) представляет собой общее решение задачи для сектора с непроницаемыми границами и щелью, заполненную жидкостью.

Пусть в секторе находится точечный источник, в этом случае

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (7)$$

Записывая общее решение (6) для функции и преобразуя полученное выражение, находим:

$$W(z) = \ln\left(z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right) + \ln\left(z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + \bar{z}_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right) - \ln\left(z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - \bar{z}_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right) - \ln\left(z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + z_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right). \quad (8)$$

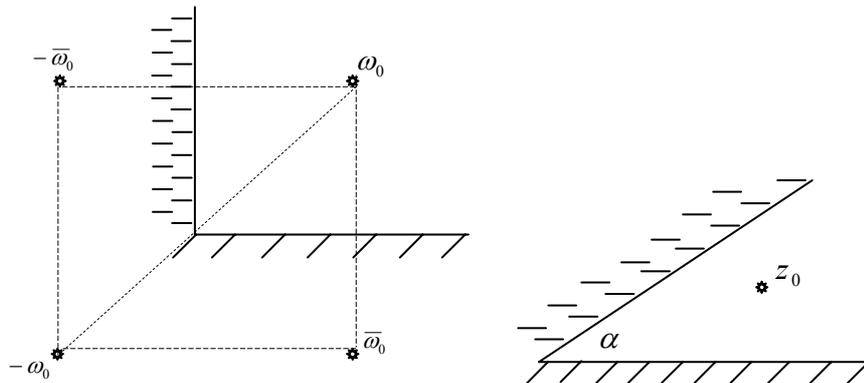


Рис. 4. Сектор с различными граничными условиями

6. Пусть сектор с углом раствора  $\alpha$  имеет непроницаемую стенку и ограничен свободной жидкостью (рис. 4). Решение задачи получаем с помощью конформного отображения:

$$\omega = z^{\frac{\pi}{2\alpha}}. \quad (9)$$

В плоскости  $\omega$  прямой угол ограничен непроницаемой стенкой и свободной жидкостью. Комплексный потенциал точечного источника имеет вид:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left[ \left( z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - z_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \right) + \ln \left( z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + \bar{z}_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \right) - \right. \\ \left. - \ln \left( z^{\frac{\pi}{2\alpha}} - \bar{z}_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \right) - \ln \left( z^{\frac{\pi}{2\alpha}} + z_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \right) \right] \quad (10)$$

Такой же результат (10) мы получим, если в задаче пункта 5 вместо щели с жидкостью будем рассматривать непроницаемую стенку.

Способ решения задачи с помощью конформного отображения (2) является наиболее простым, однако другие рассматриваемые способы, использующие римановы поверхности, представляют значительный интерес и могут быть использованы для решения новых трудных задач.

### Литература

1. О.В. Голубева. Курс механики сплошных сред. М., 1972. 368 с.
2. А.А. Зайцев, А.Я. Шпилевой. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах. Калининград: издательство КГУ, 2001. 126 с.
3. А.Я. Шпилевой. Метод изображения особых точек в задачах исследования фильтрационных течений в кусочно-однородных средах. Труды IX международного симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орел 2000 с. 471-474.
4. К. Бинс, П. Лауренсон. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М., Энергия, 1970.
5. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
6. Г.В. Голубев, Г.Г. Тумашев. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань, 1972.

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксюхин А.А.	5	Пивень В.Ф.	91
Булыгин В.С.	12	Федяев Ю.С.	101
Ганиев Ш.Ф.	17	Ходотова М.И.	109
Гинзгеймер С.А.	25	Шестерин Д.Е.	114
Гладышев Ю.А.	22, 25	Шелудкевич Е.Ю.	119
Гинзгеймер С.А.	25	Шпилевой А.Я.	119
Голубев Г.В.	29		
Голубева М.С.	25		
Гром А.С.	34, 38		
Гуляев В.В.	17, 43		
Деткова Ю.В.	78		
Джаксбаев В.А.	43		
Духопельников С.В.	48		
Еременко С.М.	34, 38		
Зайцев А.А.	119		
Иванисова О.В.	53		
Квасов А.А.	58		
Липован П.С.	62		
Марков О.И.	66		
Никольская Т.А.	70		
Никольский Д.Н.	75, 78		
Ноздрин Е.В.	81		
Ноздрин Л.Г.	86		

Орловский государственный университет  
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина  
Институт вычислительной математики РАН  
Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского

## **VI Международная школа-семинар молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»**

г. Орёл, 11 – 15 февраля 2008 г.

Оргкомитет XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ) по согласованию с ректором Орловского государственного университета принял решение провести с 11 (заезд) по 15 (отъезд) февраля 2008 г. **VI Международную школу-семинар молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».**

Приглашаем преподавателей и студентов принять участие в школе-семинаре. Иногородних участников школы-семинара предполагается разместить в гостиницах г. Орла и, возможно, в общежитии университета. Оплата проживания за счёт участников школы-семинара. Заявка с указанием фамилии, имени, отчества, места работы (учёбы) участников школы-семинара направлять на e-mail оргкомитета до 20 января 2008 г.

Адрес оргкомитета: 302026, Россия, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95, Орловский государственный университет, физико-математический факультет, Федяеву Юрию Сергеевичу.

Телефон (4862) 77-78-25, e-mail: mdozmf@yandex.ru, <http://mdozmf.phys-math.ru>

### **ЛЕКТОРИЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА**

- Доктор физ.-мат. наук, профессор Гандель Ю.В. (Украина)  
«Метод дискретных особенностей и численный эксперимент».
- Доктор технических наук, профессор Желанников А.И. (Россия)  
«Численное решение сингулярных интегральных уравнений в аэродинамике».
- Доктор физ.-мат. наук, профессор Пивень В.Ф. (Россия)  
«Основные граничные задачи фильтрации и их решение методом дискретных особенностей».
- Доктор физ.-мат. наук, профессор Сетуха А.В. (Россия)  
«Математические основы вихревых методов решения задач математической физики».
- Член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор Тыртышников Е.Е. (Россия)  
«Тензорное разложение, аппроксимация и их применение в численном анализе».
- Кандидат физ.-мат. наук, доцент Мищенко В.О. (Украина)  
«Алгоритмическое и программное обеспечение численных экспериментов по МДО в задачах электродинамики».

Оргкомитет Международных  
школ-семинаров «МДОЗМФ»





Научное издание

## **Т Р У Д Ы**

**Международных школ-семинаров  
«Методы дискретных особенностей  
в задачах математической физики»  
Выпуск 5**

Компьютерная верстка: Ю.С. Федяев

Подписано в печать 10.11.2007 г. Формат 60x84 1/16  
Печать ризография. Бумага офсетная. Гарнитура Times  
Объём 8 усл. печ. л. Тираж 100 экз.  
Заказ № 759 от 14.11.2007 г.

Редакционно-издательский отдел  
ГОО ВПО «Орловский государственный университет»  
302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95

Лицензия ПД №8-0023 от 25.09.2000 г.  
Отпечатано с готового оригинал-макета  
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»  
г. Орёл, ул. Васильевская, 138. Тел./факс (4862)741152