Орловский государственный университет

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

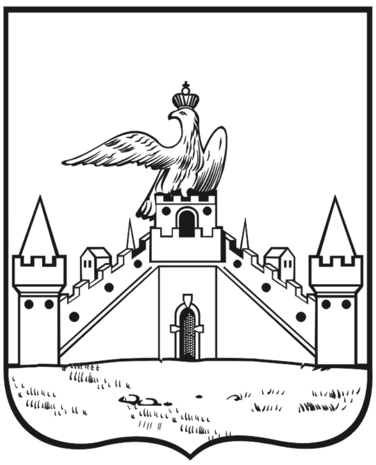
Институт вычислительной математики РАН

Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского

ТРУДЫ

МЕЖДУНАРОДНЫХ ШКОЛ-СЕМИНАРОВ «МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Выпуск 6



Орёл • 2008

УДК 517+519.6+519.634+532.5+532.546+533.6+622.276.031

Печатается по решению организационного комитета Международных школ-семинаров молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

Труды Международных школ-семинаров **«Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»**. Выпуск 6. – Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2008. – 132 с.

В сборнике представлены статьи участников Международных школ-семинаров молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школ-семинаров. Школы-семинары «МДОЗМФ» проводятся с 2000 года.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем теории фильтрации, аэро- и гидродинамики, теплопроводности, электродинамики и других областей механики и физики, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, численных методов и других методов математической физики.

Компьютерная вёрстка Федяев Ю.С.

Сборник трудов Международных школ-семинаров «МДОЗМФ» издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-96303) и Федерального агентства по образованию.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Международная школа-семинар молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» начала свою работу в декабре 2000 года на базе Орловского госуниверситета. Организаторы этой школы Орловский госуниверситет, Институт вычислительной математики РАН, Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского (Россия) и Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина (Украина). Состоялось шесть заседаний школы, на которых были прочитаны обзорные лекции ведущими специалистами в области гидро-аэродинамики, теории фильтрации, электродинамики и вычислительной математики. Слушатели школы – молодые преподаватели, докторанты, аспиранты и студенты из Москвы, Орла, Брянска, Калуги, Харькова и других городов России и Украины выступили с докладами, приняли участие в дискуссиях и получили консультации. Обширна культурная часть программы школы. Проведены экскурсии в Спасское-Лутовиново (родовое поместье И.С. Тургенева), национальный парк «Орловское Полесье», по музеям и другим заповедным местам города Орла и его окрестностей. Работа школы продолжается в период между её заседаниями. Участники школы готовят статьи в сборник научных трудов школы (опубликовано шесть выпусков трудов) и доклады к очередному заседанию школы. Информация о работе школы размещается на сайте http://mdozmf.phys-math.ru/.

Заседание шестой школы-семинара состоялось в феврале 2008 года. С лекциями выступили чл.-корр. РАН Е.Е. Тыртышников, профессора Г.В. Голубев, В.Ф. Пивень, А.В. Сетуха (Россия), Ю.В. Гандель, доцент В.О. Мищенко (Украина). Результаты работы этой школы отражены в шестом выпуске трудов. Тематика представленных в нём статей охватывает широкий спектр проблем гидро-аэродинамики, теории фильтрации и электродинамики, которые исследуются аналитическими и численными методами с широким применением методов дискретных особенностей. Авторы статей – исследователи из России, Украины и Азербайджана. Этот выпуск трудов издаётся при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303) и Федерального агентства по образованию России.

Оргкомитет школ-семинаров и редколлегия сборника трудов выражают глубокую благодарность ректору Орловского госуниверситета профессору Ф.С. Авдееву за финансовую и организационную помощь в проведении этих школ и издании сборников трудов.

Оргкомитет школы-семинара приглашает участников школы на XIV Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», проведение которого намечено на июнь 2009 года в Украине (пос. Лазурное Херсонской области). Сайт симпозиума http://dsmmph.univer.kharkov.ua/.

Ответственный редактор В.Ф. Пивень
Ноябрь 2008 года

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МОЗАИЧНО-СКЕЛЕТОННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЯХ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Апаринов
Россия, Институт вычислительной математики РАН,
e-mail: aparinov@provokator.ru

Рассматривается вопрос о возможности применения метода мозаично-скелетонных аппроксимаций для ускорения вычислений в рамках метода дискретных вихрей. Предложена численная схема расчетов, позволяющая значительно ускорить вычисления по сравнению с алгоритмом прямого матричного умножения.

Введение

Вопрос об ускорении вычислений при использовании метода дискретных вихрей [1,2] начал рассматриваться очень давно. Например, еще в 1986 году в работе [3], рассматривалась возможность аппаратного ускорения для МДВ и проводились некоторые теоретические оценки.

В настоящий момент наиболее интересными способами ускорения вычислений в рамках МДВ выглядят методы быстрого матричного умножения [4], к которым и относится метод мозаично-скелетонных аппроксимаций.

Уравнения движения завихренности

Пусть $M=(x,y)$ – точка, в которой расположена жидкая частица, причем, $M=M(\mathbf{o},t)$, где $\mathbf{o}=(\xi_x,\xi_y)$ – лагранжевы координаты частицы, t – время. Пусть $\mathbf{w}=\mathbf{w}(M,t)$ – скорость жидкости, $\omega = rot\,\mathbf{w} \equiv \partial w_x/\partial y - \partial w_y/\partial x$ – завихренность. Движение точки M и изменение завихренности ω в точке M описываются уравнениями:

$$\frac{dM}{dt}=\mathbf{w},\quad \frac{d\omega}{dt}=0 \tag{1}$$

где d/dt – производная по времени в индивидуальной жидкой частице, т.е. при $\xi = const$. Пусть $\mathbf{o}$ есть начальное положение частицы и пусть ω_0 есть начальное распределение завихренности, причем, завихренность ω_0 отлична от нуля только в некоторой ограниченной области $\mathbf{D}$. Тогда течение жидкости описывается уравнениями (1) с начальными условиями:

$$\omega=\omega_0,\ M=\mathbf{o} \text{ при } t=0 \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{w}$ в точке M выражается через завихренность с помощью закона Био-Савара:

$$\mathbf{w}(M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_D \omega(N)\mathbf{v}(\mathbf{r})d\xi_x' d\xi_y' \tag{3}$$

где **щ** – завихренность в точке N с лагранжевыми координатами (ξ'_x, ξ'_y), $\mathbf{r} = \overrightarrow{NM}$,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\frac{(-y,x)}{r^2},\ \mathbf{r} = (x,y),\ r = |\mathbf{r}|.$$

Интеграл в правой части выражения (3) является несобственным. Осуществим его регуляризацию за счет искусственного сглаживания особенности. Введем параметр $\varepsilon > 0$ – радиус области сглаживания вокруг особой точки. Будем решать задачу (1)-(2), где

$$\mathbf{w}(M) = \frac{1}{2\pi}\int_G \omega(N)\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{r})dN \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})\theta_\varepsilon(r),\ \ \theta_\varepsilon = \begin{cases} 1, & r \ge \varepsilon \\ 3\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^4 - 2\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^6, & r < \varepsilon \end{cases}$$

При численном решении задачи (1)-(2), (4) разобьем область **D** на ячейки $\mathbf{B}_k$, $k = 1,...,K$ так, что область **D** есть объединение всех ячеек $\mathbf{B}_k$ и пересечение двух различных ячеек имеет нулевую площадь. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в каждой ячейке $\mathbf{B}_k$ выбрана точка $\mathbf{o}_k$. Пусть b_k - площадь ячейки $\mathbf{B}_k$ и пусть $\Gamma_k = \omega_0(\mathbf{o}_k)b_k$ - суммарная завихренность, сосредоточенная в ячейке $\mathbf{B}_k$. Уравнения (1)-(2),(4) будем аппроксимировать уравнениями движения точек $M_k = M_k(t)$:

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \mathbf{w}(M_k,t), \qquad k = 1,...,K, \tag{5}$$

$$M_k(0) = \mathbf{o}_k$$

где скорость жидкости приближенно определяется по формуле

$$\mathbf{w}(M,t) = \sum_{k=1}^{K}\Gamma_k\mathbf{v}_\varepsilon(M - M_k(t)).$$

Систему дифференциальных уравнений (5) можно решать численно методом Эйлера или схемами типа Рунге-Кутты. При этом на каждом шаге интегрирования по времени необходимо вычислить скорость жидкости $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}(M_j,t)$ во всех точках по формуле (5):

$$\mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^{K}\Gamma_k\mathbf{v}_\varepsilon(M_j - M_k),\ j = 1,...,K.$$

Последнюю формулу можно трактовать как умножение матрицы $A = (\mathbf{a}_{jk})$ на вектор-столбец $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1,...,\Gamma_K)^T$, где $\mathbf{a}_{jk} = \mathbf{v}_\varepsilon(M_j - M_k)$. Для ускорения вычислений набора скоростей $\mathbf{w}_j$ предлагается использовать методы приближенного ускоренного умножения матрицы на вектор.

О методе мозаично-скелетонных аппроксимаций

Пусть A – матрица размеров $m \times n$. Если B ее подматрица, то $\Gamma(B)$ – матрица размеров $m \times n$, представляющая собой восполнение B нулями. Система блоков A_i называется покрытием A, если $A = \sum_i \Gamma(A_i)$. Будем называть покрытие матричным биением, если блоки не имеют общих элементов. Соответствующий биению мозаичный ранг матрицы A определяется формулой

$mrA = \sum_i memA_i / (m+n)$, где $memA_i = \min\{m_i n_i, rankA_i(m_i + n_i)\}$, $m_i \times n_i$ - размеры блока A_i.

Оказывается, что при решении интегральных уравнений часто возникают невырожденные матрицы, имеющие относительно малый мозаичный ранг. Если n - порядок матрицы, то ее удается аппроксимировать матрицей, имеющей мозаичный ранг вида $\log n$ (или $\log^{\nu} n$) [5].

Мозаичное биение матрицы строится с помощью мозаичного дерева или дерева кластеров. Полагая, что каждый элемент матицы a_{ij} в матрице характеризует взаимодействие элементов сетки с номерами i и j, поставим каждому номеру i в соответствие точку x_i в пространстве. Под кластером будем понимать некоторую совокупность точек x_i. Под кластером нулевого уровня понимается все множество точек, далее кластер разбивается на непересекающиеся подкластеры тем или иным методом сепарации. Любые две вершины дерева кластеров определяют блок в матрице. Любое мозаичное биение определяется некоторым набором вершин. Идея построения дерева кластеров – получить малый ранг для как можно более крупных блоков.

Далее для блоков матрицы, для которых предполагается возможность хорошего малорангового приближения, строятся скелетонные аппроксимации. В работах [6,7] показано, что существует крест из небольшого числа столбцов C и строк R, такой что $A_i = CGR$ при выборе подходящей матрицы G. Если матрица в пересечении C и R имеет наибольший модуль определителя среди всех подматриц порядка r и $r+1$ -е сингулярное число меньше ε, то такой крест обеспечивает точность порядка ε.

Ускоренное вычисление скоростей на системе точек

Рассмотрим на плоскости круг с постоянной завихренностью $\omega = 1$. Будем моделировать круг системой точечных вихрей с постоянной интенсивностью Γ. Для этого разобьем круг на ячейки по системе полярных координат ρ, φ (рисунок 1).

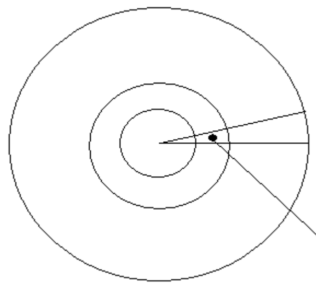


Рис. 1. Вихревое пятно

Построим систему точек M_{ij} - точка с полярными координатами $\rho_i = (i-0.5)\Delta\rho$, $\varphi_j = j\Delta\varphi$. Площадка S_{ij}, на которой расположена точка M_{ij} имеет площадь $S_{ij} = \frac{1}{2}\rho_i\Delta\rho\Delta\varphi$. Положим интенсивность точечного вихря, расположенного в точке M_{ij}, равной $\Gamma_{ij} = \omega S_{ij} = S_{ij}$.

Сделаем нумерацию вихрей сквозной. Скорость в произвольной точке M плоскости вычисляется по закону Био-Савара:

$\mathbf{w}(M) = \sum_{k=1}^{K}\Gamma_k \mathbf{v}_\varepsilon(M - M_k)$ – скорость жидкости в точке M, $M_k, \mathit{\Gamma}_k$ – положение и циркуляция точечного вихря с номером k.

Для вычисления приближенных значений скорости будем использовать метод мозаично-скелетонных аппроксимаций, применительно к матрице с элементами $a_{st} = \frac{1}{r^2}\theta_\varepsilon(r)$.

1. $A = [a_{st}] = \sum_{m=1}^{M} b_s^m c_t^m$ – мозаично-скелетонная аппроксимация.
2. $w_{st}^x = \frac{1}{2\pi} a_{st} \mathit{\Gamma}_t (y_s - y_t) = \frac{1}{2\pi} a_{st} (\mathit{\Gamma}_t y_s - \mathit{\Gamma}_t y_t)$
3. $w_s^x = \frac{1}{2\pi}\sum_t a_{st} (\mathit{\Gamma}_t y_s - \mathit{\Gamma}_t y_t) = \frac{1}{2\pi}\left(y_s A\overline{\mathit{\Gamma}}_t - A(\overline{\mathit{\Gamma}_t y_t})\right)$
4. $w_{st}^y = -\frac{1}{2\pi} a_{st} \mathit{\Gamma}_t (x_s - x_t) = -\frac{1}{2\pi} a_{st} (\mathit{\Gamma}_t x_s - \mathit{\Gamma}_t x_t)$
5. $w_s^y = -\frac{1}{2\pi}\sum_t a_{st} (\mathit{\Gamma}_t x_s - \mathit{\Gamma}_t x_t) = -\frac{1}{2\pi}\left(x_s A\overline{\mathit{\Gamma}}_t - A(\overline{\mathit{\Gamma}_t x_t})\right)$

Будем исследовать время расчета скоростей для завихренности, состоящей из 1, 2 или 4 пятен, расположенных так:

Рис. 2. Два вихревых пятна

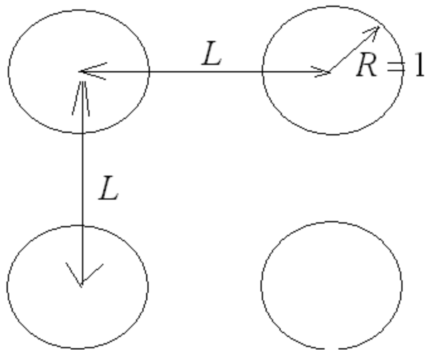
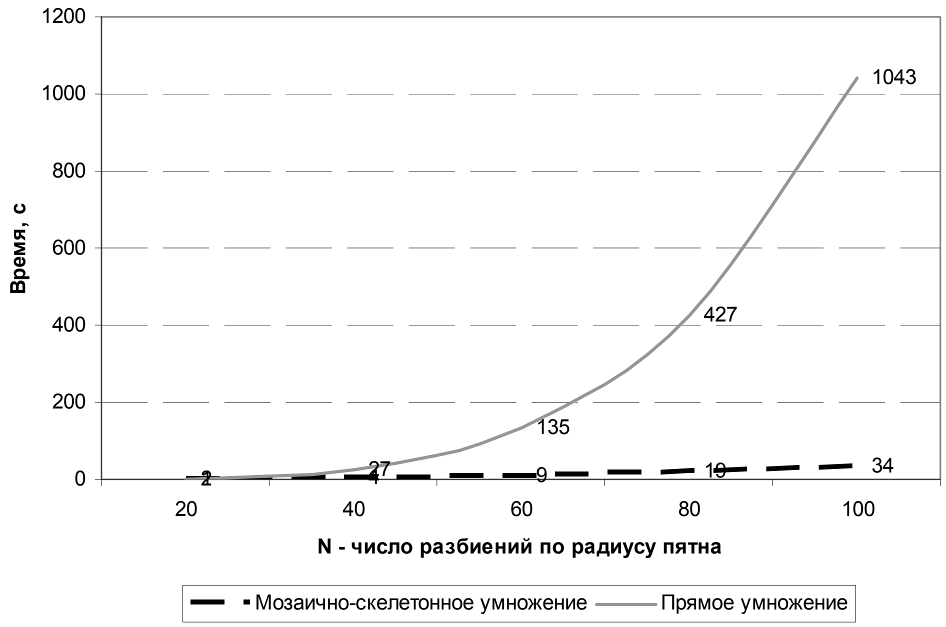


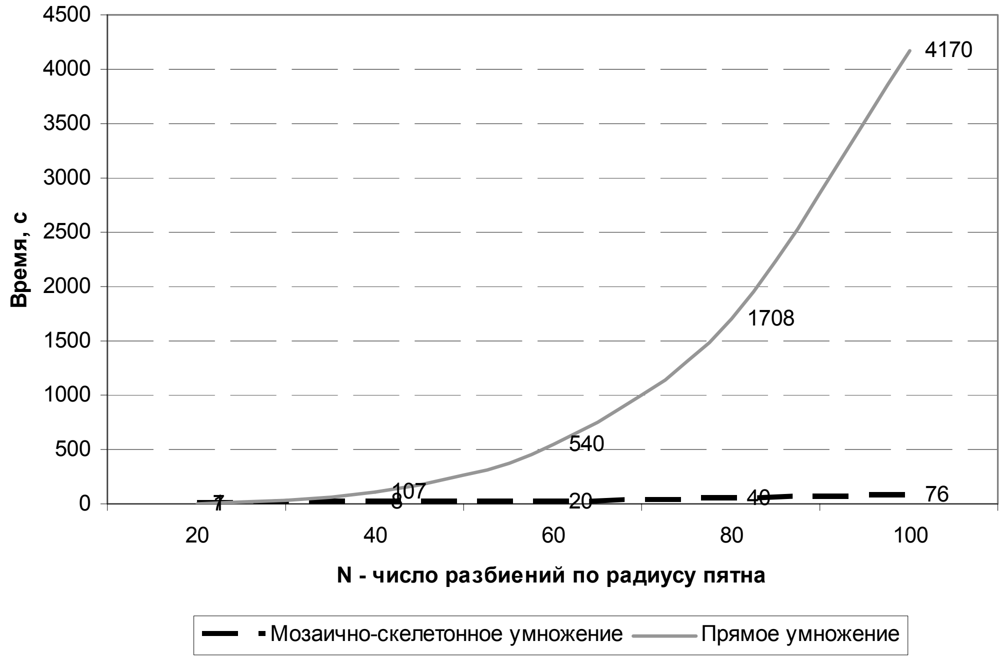
Рис. 3. Четыре вихревых пятна

Для проведения расчетов будем использовать параметры:
R (радиус пятна) = 1.0
L (расстояние между кольцами) = $3R$
N_ρ (число отрезков разбиений по радиусу пятна) – 20-100
N_φ (число секторов пятна) = $5N_\rho$
$\varepsilon \approx 3\Delta r$ (ε - радиус вихря, Δr - расстояние между вихрями)

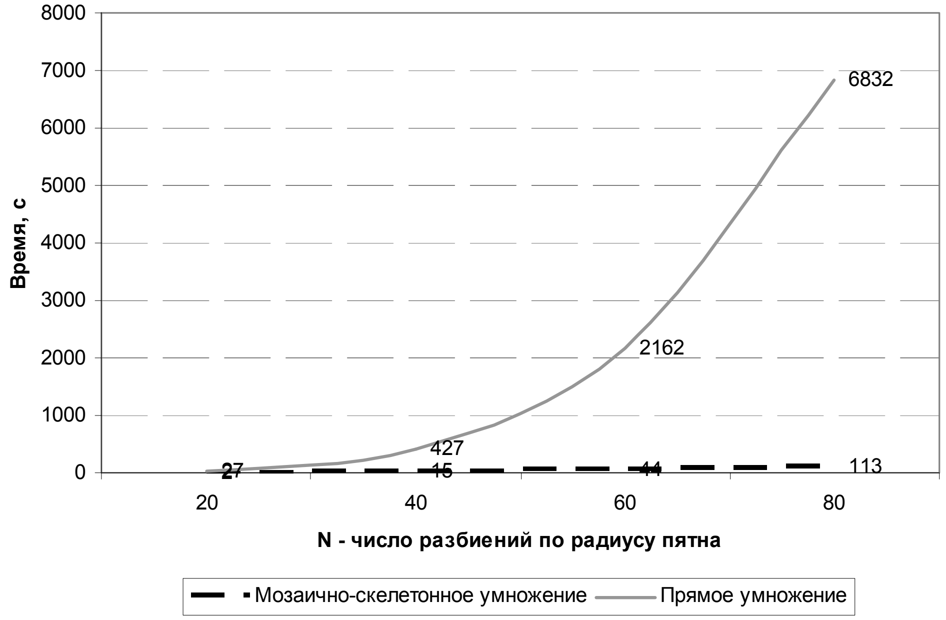
В результате расчетов получаем следующую зависимость времени счета от общего числа вихрей во всех пятнах:



Диагр. 1. Сравнение времени счета для 1 пятна



Диагр. 2. Сравнение времени счета для 2 пятен



Диагр. 3. Сравнение времени счета для 4 пятен

Табл. 1. Зависимость ускорения от числа особенностей, 1 пятно

Число особенностей	Прямое умножение, с	Быстрое умножение, с	Ускорение, раз
32000	427	19	22
50000	1043	34	31
72000	2162	74	29
98000	4005	89	45

Табл. 2. Зависимость ускорения от числа особенностей, 2 пятна

Число особенностей	Прямое умножение, с	Быстрое умножение, с	Ускорение, раз
16000	107	7	15
36000	540	19	28
64000	1708	40	43
100000	4170	76	55

Табл. 3. Зависимость ускорения от числа особенностей, 4 пятна

Число особенностей	Прямое умножение, с	Быстрое умножение, с	Ускорение, раз
8000	27	3	9
32000	427	15	28
72000	2162	44	49
128000	6832	113	60

Выводы:

1. Использование мозаично-скелетонных аппроксимаций дает существенный выигрыш во времени. Например, при числе особенностей 60000 – 130000 достигается ускорение 35-60 раз.
2. Выигрыш во времени становится более значительным, если объекты распределены по плоскости. Например, при числе особенностей 72000, сосредоточенных в 1 вихревом пятне ускорение – 29 раз, а при том же числе особенностей, сосредоточенных в 4 пятнах ускорение – 49 раз.

Литература

1. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука Гл. ред. физ-мат. лит., 1988
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978
3. Апаринов В.А., Локтев Б.Е., Ништ М.И. Нелинейные аэродинамические модели. Вопросы кибернетики, 47-69, М.: Научный совет АН СССР, 1986
4. Тыртышников Е.Е. Методы быстрого умножения и решение уравнений. Матричные методы и вычисления, 4-41, М.: Институ вычислительной математики РАН, 1999.
5. Tyrtyshnykov E.E. Modaic-Skeleton approximations. Calcolo. 1996. V. 33(1-2). p. 47-57
6. Горейнов С.А., Замарашкин Н.Л., Тыртышников Е.Е. Псевдоскелетонные аппроксимации матриц. Доклады РАН. 1995. №343(2). С. 151-152
7. Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E., Zamarashkin N.L. A Theory of Pseudo-Skeleton Approximations. Linear Algebra Appl. 1997. V. 261 p. 1-21

УДК 517

АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПАРАБОЛОИДЕ ВРАЩЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В.С. Булыгин

Украина, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Рассматривается задача дифракции Е-поляризованной электромагнитной волны на параболоиде вращения конечных размеров. Используя интегральное уравнение с логарифмической особенностью для азимутальной компоненты поверхностного тока, полученное в [1], задача сводится к сингулярному интегральному уравнению, которое решается методом дискретных особенностей.

Рассмотрим задачу дифракции Е-поляризованной электромагнитной волны на параболоиде вращения конечных размеров. Источником возбуждения может служить, например, осевой магнитный вибратор или виток с электрическим полем постоянной амплитуды. В этом случае полное электромагнитное поле не будет зависеть от φ.

Введем цилиндрическую систему координат r,φ,z таким образом, чтобы полярная ось совпала с осью параболоида S.

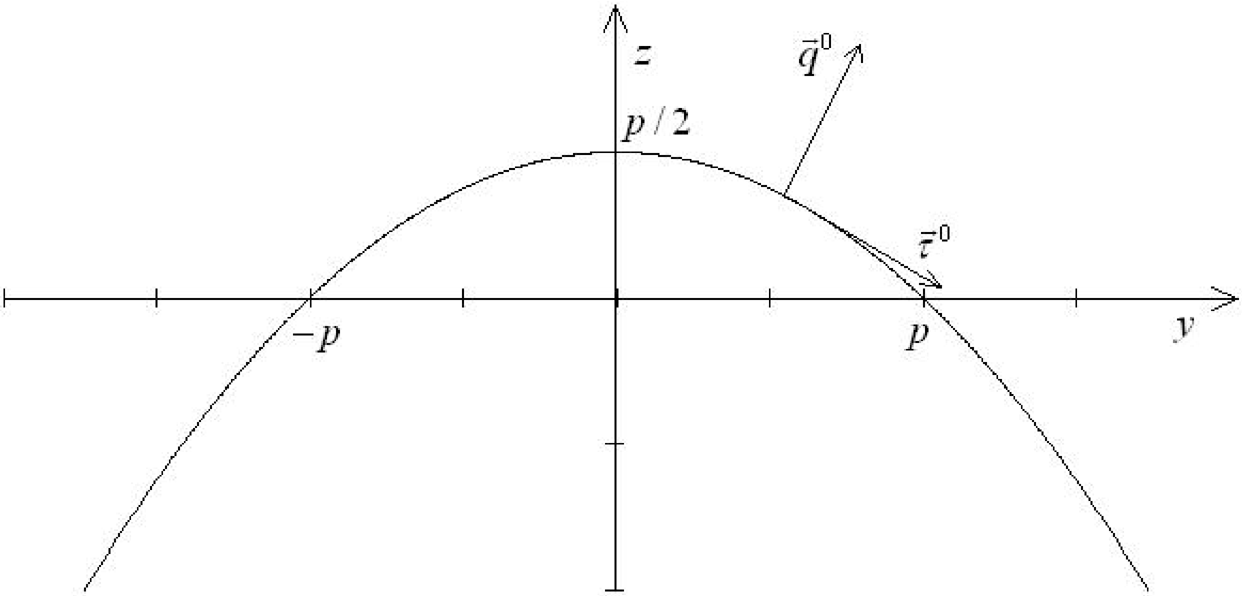


Рис. 1. Сечение параболоида плоскостью *YOZ*

Введем также параболоидную систему координат (q,τ,φ):

$$\begin{cases} x = q\cdot\tau\cdot\cos(\varphi) \\ y = q\cdot\tau\cdot\sin(\varphi) \\ z = \dfrac{1}{2}\left(q^2-\tau^2\right) \end{cases} \qquad (1)$$

Поверхность параболоида задается параметрически: $S:\ q=q_0,\ \tau\in[0,\alpha],\ \varphi\in[0,2\pi]$. Фокальное расстояние параболы $p={q_0}^2$. Фокус расположен в начале координат. Определенные в данной точке орты $\left(\vec{q}^{\,0},\vec{\tau}^{\,0},\vec{\varphi}^{\,0}\right)$ образую правую тройку векторов, а связь координат q и τ с цилиндрическими r и z выражается формулами: $r=q\cdot\tau$, $z=\frac{1}{2}\left(q^2-\tau^2\right)$.

В рассматриваемом случае поверхностная плотность тока $\vec{j}(\tau)=\vec{\varphi}^{\,0}j_\varphi(\tau)$.

Компонента $j_\varphi(\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению [1]:

$$\frac{i\omega\mu}{4\pi}\int_0^\alpha\left\{\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL(\tau,t,\psi)}}{L(\tau,t,\psi)}\cos(\psi)\,d\psi\right\}j_\varphi(t)\cdot q_0t\cdot h_\tau(t)\,dt=E_\varphi^0(\tau) \tag{2}$$

Здесь $L(\tau,t,\psi)=\sqrt{{q_0}^2\tau^2+{q_0}^2t^2-2{q_0}^2\tau\cdot t\cdot\cos(\psi)+\frac{1}{4}\left(t^2-\tau^2\right)^2}$,

$h_\tau(t)=\sqrt{{q_0}^2+t^2}$

Введем обозначение:

$$S(\tau,t)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikL(\tau,t,\psi)}}{L(\tau,t,\psi)}\cos(\psi)\,d\psi$$

Справедливо следующее представление:

$$S(\tau,t)=-\frac{1}{\tau}\left(3-\frac{t}{\tau}\right)\ln|\tau-t|+Q_1(\tau,t), \tag{3}$$

где $Q_1(\tau,t)$ - гладкая функция такая, что $\frac{\partial}{\partial\tau}Q_1(\tau,t)$ - Гельдерова.

Перепишем уравнение (2) :

$$\begin{aligned}&-2\int_0^\alpha\ln|\tau-t|\,j_\varphi(t)\cdot q_0t\cdot h_\tau(t)\,dt+\frac{1}{\tau}\int_0^\alpha(t-\tau)\ln|\tau-t|\,j_\varphi(t)\cdot q_0t\cdot h_\tau(t)\,dt\\&+\tau\int_0^\alpha Q_1(\tau,t)\,j_\varphi(t)\cdot q_0t\cdot h_\tau(t)\,dt=\frac{4\pi}{i\omega\mu}\tau E_\varphi^0(\tau),\qquad \tau\in(0,\alpha)\end{aligned} \tag{4}$$

Сделаем замену переменных:

$$\tau=\alpha\frac{y+1}{2},\ t=\alpha\frac{x+1}{2}$$

Введем обозначения:

$$g(x)=\frac{4\pi}{i\omega\mu}\tau(x)E_\varphi^0(\tau(x))$$

$$w(x)=\frac{j_\varphi(t(x))\cdot q_0t(x)\cdot h_\tau(t(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

В силу того, что при $t=\alpha$ $j_\varphi(t)$ имеет особенность типа $(\alpha-t)^{-1/2}$ функция $w(x)$ не будет иметь особенностей.

Уравнение (4) примет вид:

$$-\alpha\int_{-1}^{1}\ln|y-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\alpha}{2(y+1)}\int_{-1}^{1}(y-x)\ln|y-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1}Q_2(y,x)w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=g(y),\qquad \mathrm{y}\in(-1,1) \tag{5}$$

Здесь $Q_2(y,x)=\tau(y)S(\tau(y),t(x))+\left(3-\dfrac{t(x)}{\tau(y)}\right)\ln|y-x|$

Воспользуемся «правилом дифференцирования интеграла с логарифмическим ядром»[3]:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{-1}^{1}\ln|y-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{y-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{-1}^{1}(y-x)\ln|y-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\ln|y-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{-1}^{1}w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Уравнение (5) эквивалентно уравнению:

$$-\alpha\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{y-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\alpha}{2(y+1)}\int_{-1}^{1}\ln|y-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$
$$+\int_{-1}^{1}K(y,x)w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=g(y),\qquad \mathrm{y}\in(-1,1) \tag{6}$$

с дополнительным условием:

$$-\alpha\int_{-1}^{1}\ln|y^*-x|w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1}Q(y^*,x)w(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=g(y^*), \tag{7}$$

Здесь $\mathrm{y}^*\in(-1,1)$ - фиксированная точка,

$$K(y,x)=\frac{\alpha}{2}\left(\tau(y)\frac{\partial}{\partial y}S(\tau(y),t(x))+\frac{\alpha}{2}S(\tau(y),t(x))\right)+\frac{\alpha}{y-x}+\frac{1}{\tau(y)}\ln|y-x|,$$
$$Q(y,x)=\tau(y)S(\tau(y),t(x))+2\ln|y-x|$$

Приближенное решение $w_n(x)$ ищется в виде интерполяционного полинома степени $n-1$ по узлам Чебышева 1ого рода:

$$\{t_l^n\}_{l=0}^{n-1}=\left\{\cos\frac{2l-1}{2n}\right\}_{l=0}^{n-1}:\ w_n(t_l^n)=w(t_l^n).$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_n(x)}{y-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\alpha}{2\pi(y+1)}\int_{-1}^{1}\ln|y-x|w_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{n-1_y n_x}(y,x)w_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\pi}g_n(y), \qquad \text{y}\in(-1,1) \tag{8}$$

с дополнительным условием:

$$-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|y^*-x|w_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\alpha}{2\pi}\int_{-1}^{1}Q_{n-1_y n_x}(y^*,x)w_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\pi}g_n(y^*) \tag{9}$$

Здесь $Ker_{n-1_y n_x}(y,x)$, $Q_{n-1_y n_x}(y^*,x)$ - интерполяционные полиномы степени n по переменной x, построенный по узлам Чебышева 1ого рода $\left\{t_l^n\right\}_{l=0}^{n-1}$, и степени $n-1$ по переменной y, построенный по узлам Чебышева 2ого рода $\left\{t_{0m}^n\right\}_{i=0}^{n-2}=\left\{\cos\frac{m+1}{n}\right\}_{m=0}^{n-2}$, $g_n(y)$- интерполяционные полиномы степени $n-2$, построенный по узлам Чебышева 2ого рода.

Воспользуемся квадратурными формулами [3] и перепишем (8), (9) в виде следующей СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений):

$$\sum_{m=0}^{n-1}w(t_m^n)\frac{1}{n}\left[\frac{-\alpha}{t_{0l}^n-t_m^n}+\frac{\alpha}{2(t_{0l}^n+1)}\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(t_{0l}^n)\frac{T_p(t_m^n)}{p}\right]+K_{n-1_y n_x}(t_{0l}^n,t_m^n)\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}g(t_{0l}^n), \qquad l=0..n-2 \tag{10}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1}w(t_m^n)\left[\frac{\alpha}{n}\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(y^*)\frac{T_p(t_m^n)}{p}\right]+\frac{\alpha}{2n}Q_{n-1_y n_x}(y^*,t_m^n)\right]=\frac{1}{\pi}g(y^*) \tag{11}$$

Азимутальная компонента плотности поверхностного тока выражается через решение интегрального уравнения (6) с дополнительным условием (7):

$$j_\varphi(x)=\frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}\,\frac{x+1}{2}\sqrt{q_0{}^2+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}$$

Выражение для компоненты поля $E_\varphi(q,\tau)$ через решение интегрального уравнения (6) с дополнительным условием (7) $w(x)$ имеет вид:

$$E_\varphi(q,\tau)=\frac{i\omega\mu\alpha}{8\pi}\int_{-1}^{1}S(q,\tau,t(x))w(x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Здесь

$$S\left(q,\tau,t\right)=\left\{\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{-ikL(q,\tau,t,\psi)}}{L\left(q,\tau,t,\psi\right)}\cos\left(\psi\right)d\psi\right\}$$

$$L\left(q,\tau,t,\psi\right)=\sqrt{q^2\tau^2+q_0{}^2t^2-2q\tau\cdot q_0t\cdot\cos(\psi)+\frac{1}{4}\left(\left(q^2-\tau^2\right)-\left(q_0{}^2-t^2\right)\right)^2},$$

$$h_\tau\left(q,t\right)=\sqrt{q^2+t^2}$$

Воспользовавшись квадратурной формулой [3] получим выражение для приближенных значений $E_\varphi\left(q,\tau\right)$:

$$E_\varphi^n\left(q,\tau\right)=\frac{i\omega\mu\alpha}{8n}\sum_{k=0}^{n-1}S\left(q,\tau,\alpha\frac{t_k^n+1}{2}\right)\cdot w\left(t_k^n\right)$$

Удобней находить поле в цилиндрической системе координат с помощью выражений: $q\left(r,z\right)=\sqrt{z+\sqrt{z^2+r^2}}$, $\tau\left(r,z\right)=\sqrt{-z+\sqrt{z^2+r^2}}$

Диаграмма рассеяния выражается через $w\left(x\right)$ следующим образом:

$$F(\theta,\varphi)=\frac{i\omega\mu\alpha}{8n}\int\limits_{-1}^{1}e^{\frac{ik}{2}\cos(\theta)\left(q_0{}^2-t^2\right)}2\pi iJ_1\left(q_0kt\sin\left(\theta\right)\right)w\left(x\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Здесь $J_1\left(t\right)$ - функция Бесселя первого порядка.

Воспользовавшись квадратурной формулой [3], получим выражение для приближенных значений $F\left(\theta,\varphi\right)$:

$$F^n\left(\theta,\varphi\right)=-\frac{\omega\mu\alpha\pi}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{ik}{2}\cos\left(\theta\right)\left(q_0{}^2-\left(\alpha\frac{t_k^n+1}{2}\right)^2\right)\right)J_1\left(q_0k\alpha\frac{t_k^n+1}{2}\sin\left(\theta\right)\right)\cdot w\left(t_k^n\right)$$

Численный эксперимент проводился для элементарного магнитного вибратора, расположенного в начале координат.

В этом случае

$$g\left(y\right)=-4\pi i\cdot\alpha\frac{y+1}{2}\cdot\frac{e^{-ikR(y)}}{R\left(y\right)^2}\left(iky+\frac{y}{R\left(y\right)}\right)$$

Здесь

$$R\left(y\right)=\sqrt{q_0{}^2\left(\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(q_0{}^2-\left(\frac{y+1}{2}\right)^2\right)^2}$$

Приведем примеры нормированных диаграмм рассеяния в случае параболоида $q_0=1$, $\alpha=1$

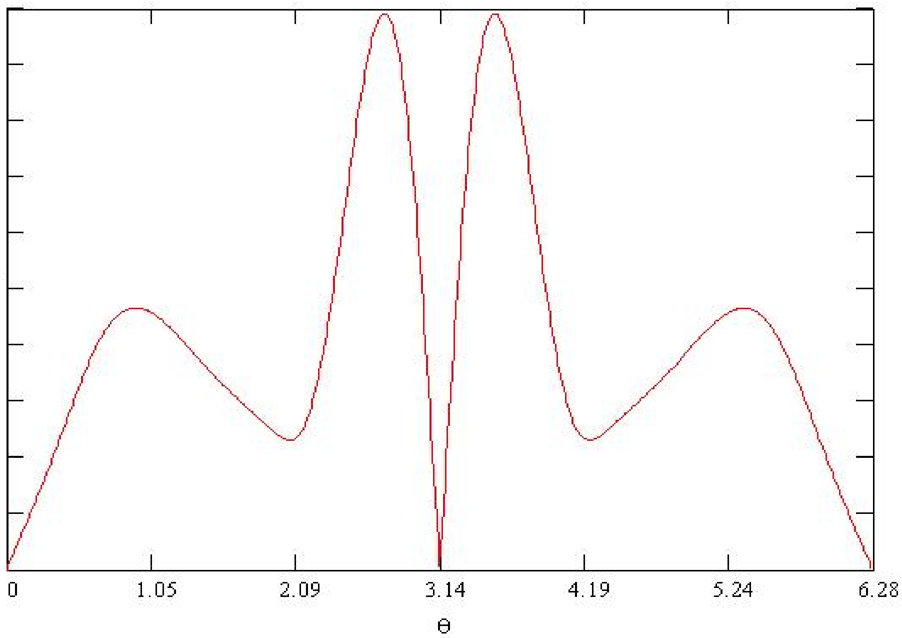


Рис. 2. Диаграмма рассеяния $k = 2\pi$, $n = 50$

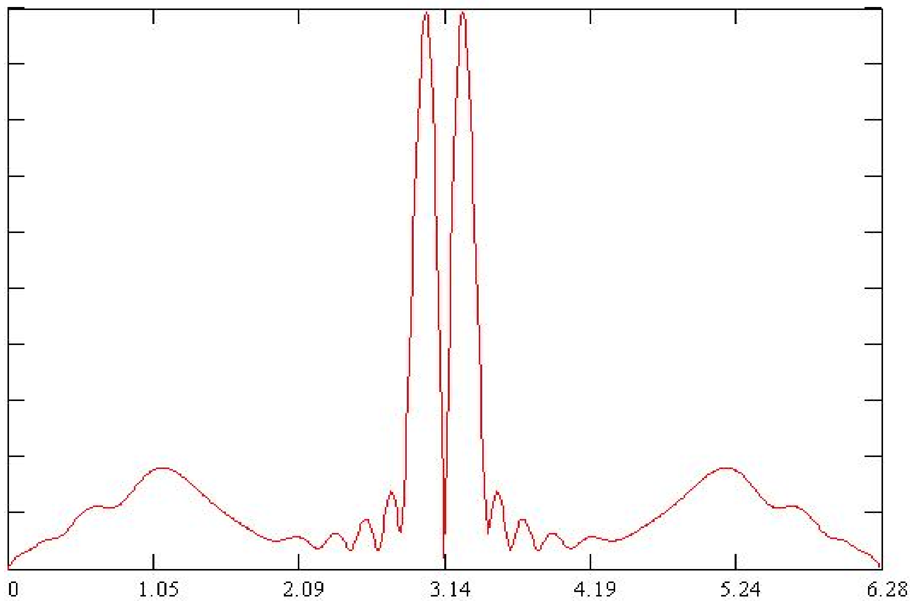


Рис. 3. Диаграмма рассеяния $k = 5\pi$, $n = 100$

Литература

1. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах. М.: Ротапринт ИРЭ АН СССР, 1984. 71 с.
2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 167 с.
3. Гандель Ю.В. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков, 2001. 92 с.
4. Захаров Е. В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Ротапринт ИРЭ АН СССР, 1982. 184 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛОВОГО ИМПУЛЬСА В НЕОДНОРОДНОЙ ИСКРИВЛЕННОЙ СТЕНКЕ

Ю.А. Гладышев, Е.А. Кремкова
Россия, КФ МГТУ имени Н.Э. Баумана

Показано, что с помощью сравнительно простой операции дифференцирования по параметру можно из простой краевой задачи получить решение более сложных задач. Суперпозиция этих задач позволяет построить решение задач теплопроводности в неоднородной стенке при любом виде конечного импульса.

Рассмотрим одномерный процесс нестационарной теплопроводности в неоднородной стенке подчиненный уравнению [1].

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)H(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho(x)c(x)H(x)\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

Считаем коэффициент теплопроводности k, теплоемкость c вещества стенки и ее плотность ρ зависящими от координаты. Чтобы учесть возможное искривление стенки введем параметр H (коэффициент Ламэ), который имеет значение

$$H=x^n. \tag{2}$$

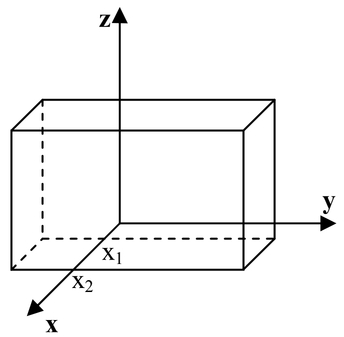


Рис. 1. Плоская стенка

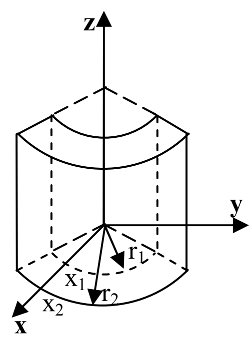


Рис. 2. Цилиндрическая стенка

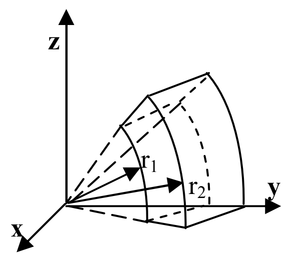


Рис. 3. Сферическая стенка

Случай $n=0$ соответствует плоской стенке (рис.1), $n=1$ – цилиндрической стенке (рис.2), а $n=2$ – сферической (рис.3). В последних двух случаях целесообразно x обозначить как r. Таким образом уравнение (1) включает большое число важных в приложениях частных случаев. Не исключен случай, когда параметры k,c,ρ имеют разрывы первого рода, то есть среда стенки кусочно-непрерывна (многослойная стенка).

Запишем уравнение (1) в виде

$$a_2\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3}$$

где

$$a_1=k(x)H,\ a_2=(c\rho H)^{-1}. \tag{4}$$

Начнем со сравнительно простой задачи, когда на границах стенки заданы температуры

$$T\big|_{x_1}=T_m e^{-\alpha^2 t},\ T\big|_{x_2}=0, \tag{5}$$

где, α – произвольный параметр, определяющий скорость падения температуры при $x = x_1$. Параметр α можно связать со временем t_o, за которое стенка остывает в e раз.

$$\alpha^2 = \frac{1}{t_o}$$

Начальную температуру внутри стенки считаем нулевой

$$T\big|_{t=0} = 0, \qquad (6)$$

ибо если это не так, то решением задачи Фурье этого можно достигнуть. Для построения искомого решения используем аппарат обобщенных степеней Берса [2]. Обратим внимание, что в этом случае используются обычные размерные переменные.

Начнем с очевидного решения уравнения (3) в виде

$$T = T_m \frac{\sin \alpha X(x, x_2)}{\sin \alpha X(x_1, x_2)} e^{-\alpha^2 t}. \qquad (7)$$

Здесь функции $\sin \alpha X(x, x_2)$ представлены как ряды обобщенных степеней Берса[2]

$$\sin \alpha X(x, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^{2i+1} X^{(2i+1)}(x, x_2)}{(2i+1)!}. \qquad (8)$$

Очевидно, что граничные условия (5) выполнены, так как

$$\sin \alpha X(x_2, x_2) = 0.$$

Методы построения обобщенных степеней, а также выражения функций $\sin \alpha X(x, x_2)$, $\cos \alpha X(x, x_2)$ для конкретных значений α_1, α_2, можно найти в работах [2].

Для выполнения начального условия (6) необходимо выражение

$$T\big|_{t=0} = T_m \frac{\sin \alpha X(x, x_2)}{\sin \alpha X(x_1, x_2)} \qquad (9)$$

разложить в ряд Фурье на промежутке (x_1, x_2).

Для разложения функции $\sin \alpha X(x, x_2)$

$$\sin \alpha X(x, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k \frac{1}{N_n} \sin \lambda_n X(x, x_2), \ \alpha \neq \lambda_n \qquad (10)$$

по собственным функциям

$$f_n(x) = \frac{1}{N_n} \sin \lambda X(x, x_2), \qquad (11)$$

составляющим ортогональный нормированный базис относительно скалярного произведения

$$(f_i, f_k) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a_2} f_i f_k dx, \qquad (12)$$

имеем

$$C_k = \frac{\lambda_n}{N_n\left(\lambda_n^2 - \alpha^2\right)} \sin\alpha X(x_1, x_2) cos\lambda_n \tilde{X}(x_1, x_2),$$

$$N_n^2 = -\frac{1}{2}\cos\lambda_n \tilde{X}(x_1, x_2)\left(X(x_1, x_2)\cos\lambda_n X(x_1, x_2)\right). \tag{13}$$

Поэтому для искомого решения получим

$$T(x,t) = T_m\left(\frac{\sin\alpha X(x, x_2)}{\sin\alpha X(x_1, x_2)} e^{-\alpha^2 t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\left(\lambda_n^2 - \alpha^2\right)} \frac{\sin\lambda_n X(x, x_2)}{\left(X(x_1, x_2)\cos\lambda_n X(x_1, x_2)\right)} e^{-\lambda_n^2 t}\right), \tag{14}$$

где принято $\cos\lambda_n X(x_1, x_2) \neq 0$, $\alpha \neq \lambda_n$.

Найдем плотность потока тепла $j(x,t)$ в любой точке в произвольный момент времени:

$$j = -D_1 T(x, y) = -T_m\left(\frac{\alpha\cos\alpha\tilde{X}(x, x_2)}{\sin\alpha X(x_1, x_2)} e^{-\alpha^2 t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n{}^2}{\left(\lambda_n^2 - \alpha^2\right)} \frac{\cos\lambda_n \tilde{X}(x, x_2)}{\left(X(x_1, x_2)\cos\lambda_n X(x_1, x_2)\right)} e^{-\lambda_n^2 t}\right). \tag{15}$$

Найдем общее количество тепла, прошедшее через стенку за время t. Для этого проинтегрируем выражение (15) по t от 0 до t.

$$Q(t)\big|_{x_2} = \int_0^t j\big|_{x_2} dt =$$

$$= -T_m\left(\frac{1 - e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sin\alpha X(x_1, x_2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1 - e^{-\lambda_n^2 t}\right)}{\left(\lambda_n^2 - \alpha^2\right)\left(X(x_1, x_2)\cos\lambda_n X(x_1, x_2)\right)}\right). \tag{16}$$

Количество тепла Q_c, содержащееся в стенке к данному моменту времени t определено разностью

$$Q_c = Q(t)\big|_{x_1} - Q(t)\big|_{x_2}. \tag{16`}$$

Если $t \to \infty$, то получим все тепло, прошедшее через стенку в точке x_2:

$$Q(\infty)\big|_{x_2} = -T_m\left(\frac{1}{\alpha\sin\alpha X(x_1, x_2)} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda_n^2 - \alpha^2\right)\left(X(x_1, x_2)\cos\lambda_n X(x_1, x_2)\right)}\right). \tag{17}$$

Если учесть разложение, указанное в работе [4]:

$$\frac{1}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} = -\frac{1}{\alpha X(x_2,x_1)} + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\left(\alpha^2 - \lambda_n^2\right)\left(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2)\right)}, \tag{18}$$

то получим очень простую формулу для $Q(\infty)\big|_{x_2}$ вида

$$Q(\infty)\big|_{x_2} = T_m \frac{1}{\alpha^2 X(x_2,x_1)}. \tag{19}$$

При подстановке значения α^2через среднее время t_o, за которое начальная температура на внешней стенке падает в e раз, получим

$$Q(\infty)\big|_{x_2} = T_m t_o \frac{1}{X(x_2,x_1)}. \tag{20}$$

Напомним, что степень $X(x_2,x_1) > 0$ имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{k(x)} = R,\ x_2 > x_1. \tag{21}$$

Величина R имеет смысл теплового сопротивления. Это параметр стенки, определенный для стационарного процесса. Тот факт, что величина R и время t_o определяет тепловой поток через стенку, является интересным результатом проведенного рассмотрения. Напомним, что величина $Q(t)$ относится к единице площади поверхности стенки. Разумеется, и это можно показать, что придем к тому же результату, если найдем $Q(\infty)\big|_{x_1}$, т.е. поток на внешней стенке.

Следует указать ряд характерных для процесса промежутков во времени. Это время, когда стенка содержит максимальное количество тепла. Для выяснения условий, проинтегрируем уравнение (1) по x в пределах x_1, x_2, получим:

$$j(x_2) - j(x_1) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} c\rho H T dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a_2} T dx. \tag{22}$$

Здесь интеграл определяет содержание тепла, как функцию времени. Поэтому условие равенства плотности потоков $j_1 = j_2$ очевидно определяет время $t_{\max}$ максимального запаса тепла. В результате это время найдем из трансцендентного уравнения

$$\frac{\alpha(\cos\alpha\tilde{X}(x_1,x_2)-1)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} e^{-\alpha^2 t_m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n^2(\cos\lambda_n\tilde{X}(x_1,x_2)-1)}{\left(\lambda_n^2 - \alpha^2\right)\left(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2)\right)} e^{-\lambda_n^2 t_m} = 0.$$

В конечном итоге время максимального теплосодержания стенки есть функция характерного времени t_o

$$t_m = f(t_o).$$

Зная это время, можно найти по (16`) количество тепла.

Характерной чертой процесса является время $t_{воз}$ возникновения обратного потока тепла на передней стенке. Оно определяется из условия:

$$j\,|_{x_1} = 0 \tag{23}$$

или в развернутой форме

$$\frac{\alpha\cos\alpha\tilde{X}(x_1,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)}e^{-\alpha^2 t_{воз}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda_n^2\cos\lambda_n\tilde{X}(x_1,x_2)}{\left(\lambda_n^2-\alpha^2\right)\left(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2)\right)}e^{-\lambda_n^2 t_{воз}} = 0$$

и в свою очередь есть функция характерного времени импульса t_o.

В ряде случаев важно знать время наступления наибольшей плотности потока в стенке при $x = x_2$ (внешняя стенка) – обозначим его как $t_{\max 2}$. Оно определено выражением

$$\frac{d}{dt}\left(j|_{x_2}\right) = 0.$$

Представляет интерес движение максимального значения температуры со временем, которое происходит в направлении от x_1 к x_2 и определено условием

$$j(x,t) = 0.$$

Это неявное выражение определяет закон движения максимума температуры.

Поставим более сложное условие на передней стороне стенки:

$$T\,|_{x_1} = Ate^{-\alpha^2 t}, \tag{24}$$

где, как и ранее, α – произвольный параметр и A – заданная константа. Эти постоянные можно выразить через характеристики импульса: время t_m наступления максимальной температуры T_m:

$$\alpha^2 = \frac{1}{t_m} \qquad\qquad T_m\big|_{x_1} = \frac{T_m}{t_m}t\,e^{1-\frac{t}{t_m}} \tag{25}$$

Для нахождения искомого решения продифференцируем (12) по α, подставив вместо T_m произвольную константу C.

$$T^{(1)}(x,t) = C\Bigg[-2\alpha te^{-\alpha^2 t}\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} + e^{-\alpha^2 t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right) + \\ + \sum\frac{4\alpha\lambda_n\sin\lambda_n X(x,x_2)}{({\lambda_n}^2-\alpha^2)^2(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2))}e^{-{\lambda_n}^2 t}\Bigg] \tag{26}$$

Легко установить, что граничные условия в точке x_1 будут выполнены, если принять

$$C = -\frac{T_m e}{2\alpha t_m}. \tag{27}$$

Покажем, что условия при $x = x_2$ выполнены. Действительно функция $\sin\alpha X(x,x_2)\left(\sin\alpha X(x_1,x_2)\right)^{-1}$ является производящей функцией для последовательности нечетных степеней Берса с двумя нуль-точками x_1, x_2, то есть ее разложение в ряд по параметру α имеет вид

$$\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} = \frac{1}{X(x_1,x_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n+1)}X^{(2n+1)}(x;x_1,x_2). \tag{28}$$

Поэтому ее производные по α в точке x_2, так же как и в точке x_1 исчезают. Для дальнейшего отметим, что исчезают на краях промежутка $[x_1,x_2]$ и все более высокие производные по α

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right|_{x=x_2} = 0.$$

Дифференцирование рядов по α оправдано их сходимостью.

Выполнение начальных условий следует из того факта, что если провести разложение в ряд Фурье обобщенных степеней с двумя нуль-точками [2], то не трудно показать, что для разложения (28) найдем выражение приведенное в (26).

Поэтому окончательно найдём:

$$T = \frac{T_m e}{2\alpha t_m}\left[-2\alpha te\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} + \frac{X(x,x_2)\cos\alpha X(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} - \right.$$
$$-\frac{\sin\alpha X(x,x_2)}{\left(\sin\alpha X(x_1,x_2)\right)^2}X(x_1,x_2)\cos\alpha X(x_1,x_2) + \tag{29}$$
$$\left.+4\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\sin\lambda_n X(x,x_2)}{(\lambda_n{}^2-\alpha^2)\left(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2)\right)}\right]$$

Найдём плотность потока тепла j, для чего применим оператор D_1

$$j = -C\left[-2\alpha te^{-\alpha^2 t}\frac{\alpha\cos\alpha\tilde{X}(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\alpha\cos\alpha\tilde{X}(x,x_2)}{\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right)e^{-\alpha^2 t} + \right.$$
$$\left.+4\alpha\sum\frac{\lambda_n{}^2\cos\lambda_n\tilde{X}(x,x_2)e^{-\lambda_n{}^2 t}}{(\lambda_n{}^2-\alpha^2)^2(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2))}\right] \tag{30}$$

Отсюда легко найти плотности j при x_1, x_2. Например, при $x = x_2$

$$j|_{x_2} = -C\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\alpha\, e^{-\alpha^2 t}}{\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right) + \sum\frac{4\alpha\lambda_n{}^2\, e^{-\lambda_n{}^2 t}}{(\lambda_n{}^2-\alpha^2)^2(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2))}\right] \tag{31}$$

Чтобы найти потоки за время t проинтегрируем выражение (31) по t

$$Q(t)|_{x_2} = -C\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right)+\right.$$

$$\left.+4\alpha\sum\frac{1-e^{-\lambda_n{}^2 t}}{(\lambda_n{}^2-\alpha^2)^2\left(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2)\right)}\right] \tag{32}$$

Поэтому для полного потока при $t \to \infty$ установим

$$Q(\infty)|_{x_2} = -C\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha\sin\alpha X(x_1,x_2)}\right)+\right.$$

$$\left.+4\alpha\sum\frac{1}{(\lambda_n{}^2-\alpha^2)^2(X(x_1,x_2)\cos\lambda_n X(x_1,x_2))}\right] \tag{33}$$

Поделим соотношение (18) на α и продифференцируем по α. Подставив производную $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\sin\alpha X(x_1,x_2)\right)^{-1}$ и получим

$$Q(\infty)|_{x_2} = -C\left[\frac{2}{\alpha^3 X(x_2,x_1)}\right] = -\frac{2C}{\alpha^3 X(x_2,x_1)} \tag{34}$$

Взяв константу C по (27) найдем для полного потока

$$Q(\infty)|_{x_2} = \frac{T_m e}{2\alpha t_m \alpha^3 X(x_2,x_1)} \tag{35}$$

Окончательно, подставив α^4, по (28), установим

$$Q(\infty) = \frac{T_m e t_m}{2X(x_2,x_1)} = \frac{e}{2}\frac{T_m t_m}{X(x_2,x_1)} = T_m t_{yc} R^{-1} \tag{36}$$

Этот результат показывает, что условное время для потока тепла равно

$$t_{yc} = \frac{e}{2} t_m, \tag{37}$$

R определено по (21).

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Bers L. and Gelbart A. On class of functions defined by partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 56. – № 1. – P. 67-93.
3. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга: Облит. – 1997. – 260 с.
4. Гладышев Ю.А. Некоторые интегрированные свойства обобщенных степеней Берса. Вестник КГПУ, Калуга, 2005.

УДК 532.5

ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ СВОБОДНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ ПРИ ОТРЫВНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНКИ

А.И. Говорова
Россия, ГОУ ВПО Омский государственный университет
им. Ф.М. Достоевского, e-mail: GovorovaAI@mail.ru

Рассматривается задача отрывного нестационарного обтекания пластинки плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости. В рамках этой задачи предлагается алгоритм выбора положения свободных дискретных вихрей в начальные моменты времени. Алгоритм построен на основе учета локальных соотношений, выполняющихся в точках схода вихревых следов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость. Введем декартову систему координат Oxy, в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится. Предположим, что в жидкости находится пластинка L, которая начала перемещаться в момент времени $t=0$ со скоростью $\vec{U}(x,y,t)$, $(x,y)\in L$. Рассмотрим обращенное движение, то есть будем считать, что неподвижная пластинка обтекается плоским потоком жидкости со скоростью $\vec{v}_\infty = -\vec{U}(x,y,t)$, $(x,y)\in L$.

При $t>0$ циркуляция скорости $\Gamma(t)$ вокруг пластинки меняется с течением времени, порождая вихревые следы, которые будем моделировать линиями тангенциального разрыва $L_{w1}(t)$, $L_{w2}(t)$ (рис. 1.). Движение жидкости вне пластинки и вихревых следов предположим потенциальным.

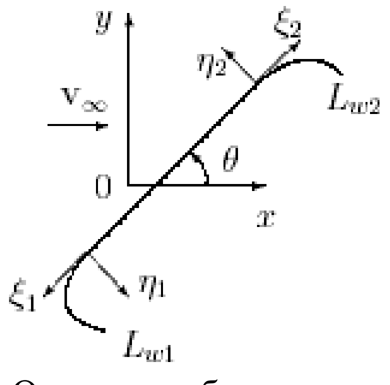


Рис. 1. Отрывное обтекание пластинки

Потенциальность течения позволяет ввести в рассмотрение комплексную скорость $\bar{v}(z,t) = v_x(x,y,t) - iv_y(x,y,t)$, выражение для которой представляется в виде:

$$\bar{v}(z,t) = \bar{v}_\infty + \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{wj}(t)}\frac{\gamma_{wj}(\sigma,t)d\sigma}{z - z_{wj}(\sigma,t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\gamma(s,t)ds}{z - z(s)}, \tag{1}$$

где $z(s) \in L$, $z_{wj}(\sigma,t) \in L_{wj}(t)$; $\gamma(s,t)$, $\gamma_{wj}(\sigma,t)$ интенсивности вихревых слоев, моделирующих пластинку и вихревые следы; s,σ - дуговые координаты. Интегрирование по контуру L ведется по часовой стрелке, а на вихревых следах дуговая координата σ отсчитывается от точки схода вихрей с пластинки L вдоль каждого вихревого следа $L_{wj}(t)$.

Сформулируем начально-краевую задачу для комплексной скорости. В области течения вне пластинки и вихревых следов найти аналитическую функцию $\bar{v}(z,t)$, представленную в виде (1), удовлетворяющей граничному условию затухания возмущенной скорости в бесконечно удаленной точке ($\bar{v}(z,t) = \bar{v}_\infty$ при $|z| \to \infty$) и условию непротекания жидкости через пластинку

$$\mathrm{Im}\{e^{i\theta(z,t)}\bar{v}(z,t)\} = 0, \quad z \in L, \tag{2}$$

а также условиям непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через вихревые следы. Последние условия выполняются, если вихревые следы свободно перемещаются вместе с жидкостью. Это имеет место, если комплексная координата $z_{wj}(\sigma,t)$ вихря, сошедшего с кромки z_{*j} пластинки в некоторый момент времени τ $(0 \le \tau < t)$, определяется решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{z}_{wj}}{dt} = \bar{v}(z_{wj},t), \tag{3}$$

с начальным условием

$$\bar{z}_{wj}(0,\tau) = \bar{z}_{*j}(\tau), \ \tau \in [0,t) \tag{4}$$

и заданным полем скоростей в момент времени τ. Кроме того, в области течения должна выполняться теорема Кельвина о постоянстве циркуляции скорости вокруг замкнутого жидкого контура.

Рассматриваемую задачу будем решать, используя процедуру дискретизации по времени и метод дискретных вихрей. В рамках предполагаемого моделирования возникает проблема выбора начального положения свободных дискретных вихрей, которая до сих пор не была решена. Для построения алгоритма решения этой проблемы введем в рассмотрение следующие соотношения, выполняющиеся в точках схода вихревых следов [3]:

$$\frac{d}{dt}\Gamma_j(t) = \gamma_{wj}(0,t)w_j(t) \tag{5}$$

$$\gamma_{wj}(0,t) = \gamma(s_{*j},t), \quad j = 1,2 \tag{6}$$

где $\gamma_{wj}(0,t)$ - интенсивность вихрей в точке схода, $w_j(t)$ - скорость их схода $\Gamma_j(t)$ - циркуляция скорости жидкости вокруг вихревого следа $L_{wj}(t)$, s_{*j} - дуговая координата кромки пластинки.

В данной работе предлагается алгоритм поиска начального положения свободных дискретных вихрей, который согласован с уравнениями (3)-(4) и соотношениями (5)-(6), выполняющимися в точках схода вихревых следов. Следует отметить, что в большинстве случаев при решении задачи нестационарного отрывного обтекания разомкнутого контура соотношения (5)-(6) не учитываются (см., например, [1], [2], [4]).

2. Моделирование пластинки и вихревых следов

Следуя методу дискретных вихрей [2], пластинку будем заменять системой дискретных вихрей z_m с интенсивностью Γ_m, $m=1,..,N$, и контрольных точек z_k, $k=1,..,N+1$, в которых выполняется условие непротекания жидкости через пластинку. Вихревые следы будем моделировать системой свободных дискретных вихрей $z_{wn}^{(j)}$ с интенсивностью $\Gamma_{wn}^{(j)}, n=1,..,N_t$, которые движутся свободно вместе с жидкостью. Здесь N_t – количество промежутков разбиения по времени.

В рамках этой модели выражение (1) для комплексной скорости примет вид:

$$\bar{v}(z_k,t_n)=\bar{v}_\infty+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Gamma_{wl}^{(j)}}{z_k-z_{wl}^{(j)}(t_n)}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\Gamma_m}{z_k-z_m},\ k=1,..,N+1 \quad (7)$$

Теорема Кельвина представится в виде:

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{wl}^{(j)}+\sum_{m=1}^{N}\Gamma_m=0. \quad (8)$$

Дискретный аналог соотношения (5) запишем в виде функции:

$$f_{jn}=\frac{\Gamma_{wn}^{(j)}}{\Delta t_n}-w_{jn}(t_n)\gamma_{wj}(0,t_n), \quad (9)$$

а соотношение (6) преобразуется в следующее:

$$\gamma_{wj}(0,t_n)=\gamma(s_{*j},t_n)\ \ j=1,2. \quad (10)$$

Отметим, что функция (9) обращается в ноль при точном решении задачи. Соотношение (9) дало возможность построения алгоритма выбора начального положения свободных дискретных вихрей.

3. Алгоритм поиска начального положения свободных дискретных вихрей

Введем на кромке z_{*j} пластинки L (в точке схода вихревых следов) систему координат $O\xi_j\eta_j$, $j=1,2$. Ось $O\xi_j$ направлена по касательной к контуру в точке z_{*j}, а ось $O\eta_j$ - перпендикулярно оси $O\xi_j$ так, чтобы система координат $O\xi_j\eta_j$ имела положительную ориентацию (рис. 1).

Пусть z_{wj} - комплексная координата первого свободного дискретного вихря Γ_{wj}, заменяющего элемент $\Delta L_{wj}(t_1)$ вихревого следа, сошедшего с пластинки за промежуток времени $[0,\ t_1]$ (рис. 2). В системе координат $O\xi_j\eta_j$ этот дискретный вихрь будет иметь координату $\varsigma_{wj} = \xi_{wj} + \eta_{wj}$. Пусть $\Delta_{wj}(t_1)$ – длина проекции элемента $\Delta L_{wj}(t_1)$ вихревого следа на ось $O\xi_j$. В области $[0, \Delta_{wj}(t_1)] \times [0, (-1)^{j+1}\Delta_{wj}(t_1)]$ введем сетку с шагом $h = \Delta_{wj}(t_1)/N_h$, где N_h – количество разбиений сетки. Пусть координаты свободного дискретного вихря определяются следующим образом: $\xi_{wj} = \delta_{1j}\Delta_{wj}(t_1)$, $\eta_{wj} = \delta_{2j}\Delta_{wj}(t_1)$, $\delta_{1j}, \delta_{2j} \in (0,1], j = 1,2$.

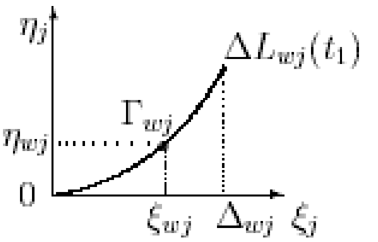


Рис. 2. Моделирование элемента $\Delta L_{wj}(t_1)$ вихревого следа

Идея алгоритма заключается в следующем. Последовательно ставим свободный дискретный вихрь в узлы сетки. Для каждого положения дискретного вихря решаем краевую задачу в момент времени t_1. Следующим шагом проверяем, удовлетворяет ли полученное решение задачи локальному соотношению (5) в точке схода вихревого следа. Для этого (с учетом (10)) рассматриваем невязку функции (9)

$$\Delta f(\varsigma_{wj}, t_1) = \frac{\Gamma_{wj}}{\Delta t} - \gamma(s_{*j}, t_1)\bar{v}_{\xi_j}(z_{*j}, t_1),\ j = 1,2, \tag{11}$$

где $\gamma(s_{*j}, t_1)$ находится путем аппроксимации функции $\gamma(s, t_1)$ в окрестности кромки z_{*j} пластинки, а $\bar{v}_{\xi_j}(z_{*j}, t_1)$ – касательная составляющая скорости жидкости в точке схода вихревого следа. При $\Delta f(\varsigma_{wj}, t_1) = 0$ считаем, что координата ς_{wj} свободного дискретного вихря для момента времени t_1 является его искомым начальным положением.

4. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился в соответствии с предлагаемым алгоритмом выбора начального положения дискретного вихря для пластинки при разных углах наклона. Численный расчет показал, что соотношению $\Delta f(\varsigma_{wj}, t_1) = 0$ удовлетворяет бесконечное множество точек (при $N_h \to \infty$), лежащих на кривых, графики которых представлены на рисунках (3)-(4).

Выберем из полученного множества решений одно. Для этого введем дополнительное условие на координаты (ξ_{wj}, η_{wj}). Будем полагать, что

$$\xi_{wj} = 0.5 w_j dt_1,\ j = 1,2, \tag{12}$$

где w_j - скорость схода, соответствующая данному дискретному вихрю Γ_{wj}. Таким образом выбранная пара координат определяет искомое начальное положение свободного дискретного вихря для момента времени t_1.

Следует отметить, что при расположении дискретного вихря в точке с координатами (ξ_{wj}, η_{wj}) = $(0.5\Delta, 0)$, где Δ – длина отрезка разбиения пластинки, [2], или в точке схода вихревого следа (при (ξ_{wj}, η_{wj}) = (0,0)), [4], решение удовлетворяет условию непротекания жидкости и теореме Кельвина, но при этом локальные соотношения (5)-(6) в точке схода не выполняются.

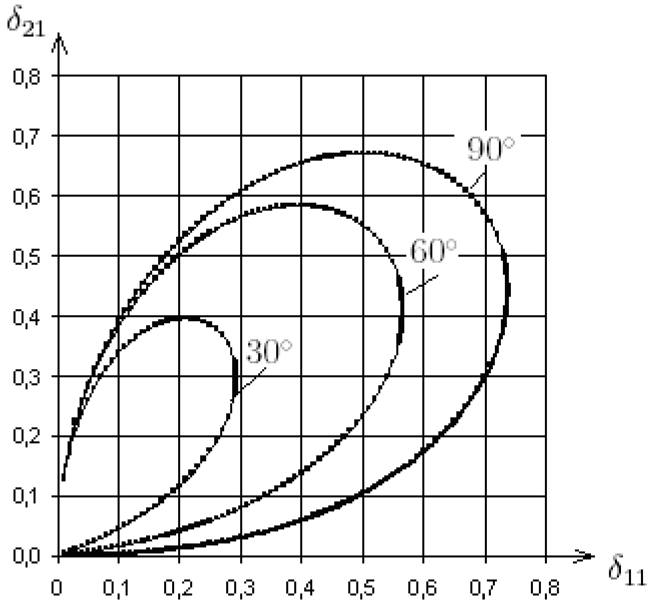


Рис. 3. Множество точек, являющихся искомым положением свободного дискретного вихря, передняя кромка пластинки

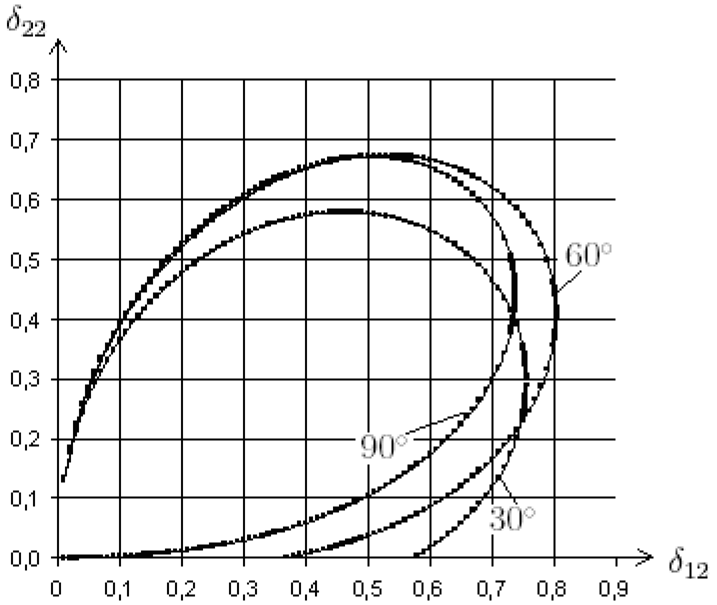


Рис. 4. Множество точек, являющихся искомым положением свободного дискретного вихря, задняя кромка пластинки

5. Заключение

В заключение можно сделать следующие выводы.

1. На основе учета локальных соотношений в точках схода вихревых следов построен алгоритм, позволяющий определять начальные положения свободных дискретных вихрей.

2. В рамках метода дискретных вихрей был проведен расчет локальных характеристик вихревых следов в точках их схода.

Алгоритм может быть обобщен на случай отрывного нестационарного обтекания разомкнутого контура.

Литература

1. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988. 232 с.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Горелов Д.Н. К постановке нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного обтекания профиля // Прикладная механика и математическая физика. 2007. т. 48, № 2, с. 48-56.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

УДК 532.546

ПОСТРОЕНИЕ ИНДИКАТОРНЫХ ДИАГРАММ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Г.В. Голубев

Россия, Казанский государственный технический университет имени А.Н.Туполева, e-mail: golubev@tm.kstu-kai.ru

Рассмотрена фильтрация в неоднородном трещиновато-пористом пласте в случае, когда движение в трещинах описывается законом Форхгеймера, а в блоках - законом Дарси. Записано решение задачи о притоке к центральной скважине в круговом пласте. Из него получена зависимость депрессии от дебита скважины. На основании этой формулы производится построение индикаторных диаграмм.

Индикаторные диаграммы при разработке нефтегазовых месторождений строят достаточно часто. Они показывают зависимость дебита скважины Q от депрессии Δp и характеризуют производительность нефтяной (приемистость нагнетательной) скважины и призабойную зону пласта. Можно выделить индикаторные диаграммы, полученные экспериментально путем измерений на скважинах, и диаграммы, построенные на основании некоторых теоретических формул. В данной работе речь идет о диаграммах второго вида. Рассматривается фильтрация в трещиновато-пористой среде в рамках модели Баренблатта-Желтова. Для фильтрации в трещинах принимается закон Форхгеймера в первом или втором вариантах в виде, разрешенном по отношению к скорости фильтрации

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \text{ где } B_1 = \left(\sqrt{1+4\beta|\nabla p| k_1/\mu} - 1\right)/ 2\beta|\nabla p|. \tag{1}$$

или

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \text{где} B_1 = \left(\sqrt{1+4|\nabla p|\rho k_1^{3/2}\beta/\mu^2} - 1\right)\mu / 2\beta\rho|\nabla p|\sqrt{k_1}. \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения: $\bar{v}_1$ - скорость фильтрации, p – функция давления, k_1 – проницаемость трещин, μ - вязкость жидкости, ρ - плотность жидкости, β - некоторая постоянная. В литературе приводятся оба указанных варианта. Повидимому, это можно объяснить использованием в экспериментах (ведь (1) и (2) – экспериментальные законы) различных жидкостей: легкая нефть, обычная нефть марки Urals, вязко-пластическая жидкость и т.д. Для движения жидкости в пористых блоках породы предлагаются различные законы, но в данном сообщении остановим свой выбор на законе Дарси, когда скорость фильтрации в блоках записывается

$$\bar{v}_2 = -\frac{k_2}{\mu}\nabla p, \tag{3}$$

где k_2 – коэффициент проницаемости пористых блоков.

Для суммарного потока получаем

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = -B_2 \nabla p,$$

где

$$B_2 = \left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1\right) / 2\beta |\nabla p|. + k_2 / \mu \tag{4}$$

при комбинации законов (1) и (3);

$$B_2 = \left(\sqrt{1 + 4|\nabla p| \rho k_1^{3/2} \beta / \mu^2} - 1\right) \mu / 2\beta\rho |\nabla p| \sqrt{k_1} + k_2 / \mu \tag{5}$$

при комбинации законов (2) и (3).

Проекции скорости фильтрации суммарного потока на оси координат запишутся

$$v_x = -B_2 \frac{\partial p}{\partial x}, v_y = -B_2 \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Далее как обычно, например в [1], выводится основное уравнение фильтрации для трещиновато-пористого пласта в рассматриваемых двух случаях. К закону (4) добавляем соотношение, которое получается из уравнения неразрывности суммарного потока и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления. Оно имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(h v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h v_y) + f(x, y, t) = 0, \tag{6}$$

где $h -$ толщина пласта, $f -$ функция плотности отбора (или закачки), $t -$ время.

В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_2 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(B_2 \frac{\partial p}{\partial y}) + f = 0, \tag{7}$$

где функция B_2 определяется формулами (4) или (5). При этом жидкость считается несжимаемой. Это и есть основное уравнение фильтрации в рассматриваемых случаях, записанное в сокращенной форме. Его можно рассматривать или как уравнение для определения функции давления или как уравнение для определения фильтрационного параметра. В работах [1]-[2], а также некоторых других публикациях автора, предложены методы решения указанных задач. Обратим сейчас внимание на то, что это приближенные методы и их желательно проверить на точных (эталонных) решениях задачи для оценки получающейся погрешности. Кроме того, эти эталонные решения могут быть использованы для решения интересующей нас задачи построения индикаторных диаграмм.

Если рассматривать плоско-радиальное течение к центральной скважине в круговом пласте, то основное уравнение (7) в случае, когда B_2 имеет вид (5) и $f = 0$, запишется

$$\frac{d}{dr}\{r[\frac{(\sqrt{1 + 4\beta\rho |dp/dr| u^3 / \mu^2} - 1)\mu}{2\beta\rho |dp/dr| u} \frac{dp}{dr} + \frac{k_2(r)}{\mu} \frac{dp}{dr}]\} = 0, \tag{8}$$

где обозначено $u = \sqrt{k_1}$.

Уравнение (8) можно проинтегрировать и получить решение для функции давления p в случае нагнетательной скважины ($dp/dr < 0, Q < 0, Q -$дебит) в следующем виде

$$p = p_k - \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D_1(r) - \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D_2(r) + \frac{\mu Q}{2\pi h} D_3(r) + \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D(r), \tag{9}$$

где $p_k -$ давление на контуре питания, $D(r), D_1(r), D_2(r), D_3(r) -$ некоторые сложного вида функции, которые могут быть протабулированы.

Из формулы (9) получается также решение для функции давления в частном случае, когда коэффициенты проницаемости $k_1, k_2 -$ постоянные величины:

$$p = p_k - \frac{\mu^2 u}{2\beta\rho k_2^2}(r - r_k) - \frac{\mu^2 (r - r_k)}{2\beta\rho u k_2^2} + \frac{\mu Q}{2\pi h k_2^2} \ln\frac{r}{r_k} +$$
$$+ \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} \int_{r_k}^{r} \sqrt{(u^2 + 1 + \frac{Q\beta\rho u}{\pi h r \mu})^2 + \frac{2\beta\rho k_2^2}{\pi h}(\frac{Q\mu}{r} - \frac{Q^2 \beta\rho u}{2\pi h r^2}})dr. \tag{10}$$

Здесь $r_k -$ радиус контура питания.

Аналогично получается решение задачи по определению функции давления в круговом трещиновато-пористом кусочно-однородном пласте в случае, когда функция B_2 имеет вид (4):

$$p = p_k + \frac{\mu}{2\beta k_2}(\frac{k_1}{k_2} + 1)(r_k - r) - \frac{\mu Q}{2\pi h k_2} \ln\frac{r_k}{r} + \frac{\mu(k_1 + k_2)}{2\beta k_2^2}[-\sqrt{r_k(r_k - eQ)} +$$
$$+ \sqrt{r(r - eQ)} - \frac{eQ}{2} \ln\frac{(\sqrt{r_k - eQ} - \sqrt{r_k})(\sqrt{r - eQ} + \sqrt{r})}{(\sqrt{r_k - eQ} + \sqrt{r_k})(\sqrt{r - eQ} - \sqrt{r})}]. \tag{11}$$

Для получения индикаторных диаграмм и их исследования полагаем в (10) и (11) $r = r_c, p = p_c$ ($r_c -$ радиус скважины, $p_c -$ забойное давление). Тогда получаем при первом варианте закона Форхгеймера зависимость $\Delta p = f(Q)$ в виде:

$$\Delta p = p_k - p_c = \frac{\mu Q}{2\pi h k_2} \ln\frac{r_k}{r_c} - \frac{\mu}{2\beta k_2}(\frac{k_1}{k_2} + 1)(r_k - r_c) + \frac{\mu(k_1 + k_2)}{2\beta k_2^2}[\sqrt{r_k(r_k - eQ)} -$$
$$- \sqrt{r_c(r_c - eQ)} + \frac{eQ}{2} \ln\frac{(\sqrt{r_k - eQ} - \sqrt{r_k})(\sqrt{r_c - eQ} + \sqrt{r_c})}{(\sqrt{r_k - eQ} + \sqrt{r_k})(\sqrt{r_c - eQ} - \sqrt{r_c})}] \tag{12}$$

Здесь обозначено: $e = 2\beta k_1 k_2 / \pi h(k_1 + k_2)^2$.

Для второго варианта закона Форхгеймера имеем

$$\Delta p = \frac{\mu Q}{2\pi h k_2^2} \ln\frac{r_k}{r_c} - \frac{\mu^2 (r_k - r_c)}{2\beta\rho u k_2^2}(1 + u^2) + \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2}[\sqrt{R} -$$
$$- \sqrt{a} \ln\frac{2a + br + 2\sqrt{aR}}{r} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cr + b)]_{r_c}^{r_k}, \tag{13}$$

где введены обозначения:

$$c=(u^2+1)^2, b=2\beta\rho Q[(u^2+1)u/\mu+k_2^2\mu]/\pi h, a=Q^2\beta^2\rho^2u(u-$$

$$-k_2^2\mu^2)/\pi^2h^2\mu^2, R=cr^2+br+a.$$

Нас интересует поведение кривых $\Delta p=f(Q)$ (12) и (13) в интервале изменения дебита $Q\in[-\infty,0]$. При этом знак минус у дебита Q берется потому, что рассматривается случай нагнетательной скважины. Учитывая реально применяемые и возможные объемы закачки воды, нижнюю границу нужно увеличить. Для нагнетательной скважины можно принять Q=-50 м^3 / сутки. Но поскольку сутки необходимо перевести в секунды и желательно, чтобы шаг не был дробным числом, то примем Q =-51,84 м^3 /сутки = -6*10^{-4} м^3 /с. Нетрудно убедиться, что при $Q\to 0, \Delta p\to 0$, т.е. индикаторные кривые (12) и (13) проходят через начало координат.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_1=\frac{\mu}{2\pi hk_2}\ln\frac{r_k}{r_c}, \gamma_2=\frac{\mu}{2\beta k_2}(\frac{k_1}{k_2}+1)(r_k-r_c), \gamma_3=\frac{\mu}{2\beta k_2}(\frac{k_1}{k_2}+1),$$

тогда формула (12) перепишется

$$\Delta p=\gamma_1Q-\gamma_2+\gamma_3[\sqrt{r_k(r_k-eQ)}-\sqrt{r_c(r_c-eQ)}+$$
$$+\frac{eQ}{2}\ln\frac{(\sqrt{r_k-eQ}-\sqrt{r_k})(\sqrt{r_c-eQ}+\sqrt{r_c})}{(\sqrt{r_k-eQ}+\sqrt{r_k})(\sqrt{r_c-eQ}-\sqrt{r_c})}] \quad (14)$$

Произведем выбор числовых параметров задачи: h=1 м, r_k=100 м, r_c=0,1 м, $\ln r_k/r_c=6{,}9078, \mu=1$ мПа/с, $\beta=10^3$ с/м, $\rho=817{,}2$ кг/ м^3, k_1=10^{-12} м^2.

Для k_2 рассмотрим четыре варианта

1. $k_2=k_1/5=0{,}2*10^{-12}$ м^2, 2. $k_2=k_1/10=0{,}1*10^{-12}$ м^2,
3. $k_2=k_1/25=0{,}04*10^{-12}$ м^2, 4. $k_2=k_1/50=0{,}02*10^{-12}$ м^2.

Назовем эти случаи 1.1- 1.4. Исходные параметры в них равны

$\gamma_{11}=0{,}555*10^{13}, \gamma_{21}=0{,}15*10^{13}, \gamma_{31}=0{,}0015*10^{13}, e_1=88{,}46;$

$\gamma_{12}=1{,}11*10^{13}, \gamma_{22}=0{,}54945*10^{13}, \gamma_{32}=0{,}0055*10^{13}, e_2=62{,}4;$

$\gamma_{13}=2{,}775*10^{13}, \gamma_{23}=3{,}25*10^{13}, \gamma_{33}=0{,}0325*10^{13}, e_3=14{,}03;$

$\gamma_{14}=5{,}55*10^{13}, \gamma_{24}=12{,}75*10^{13}, \gamma_{34}=0{,}1275*10^{13}, e_4=9{,}07.$

Например, в случае 1.1 уравнение индикаторной диаграммы запишется

$$\Delta p*10^{-13}=0{,}555Q-0{,}15+0{,}15*10^{-2}[\sqrt{100(100-88{,}46Q)}-\sqrt{-8{,}846Q}+$$
$$+44{,}23Q\ln\frac{(\sqrt{100-88{,}46Q}-10)(\sqrt{0{,}1-88{,}46Q}+0{,}316)}{(\sqrt{100-88{,}46Q}+10)(\sqrt{0{,}1-88{,}46Q}-0{,}316)}] \quad (15)$$

Аналогично поступаем с кривой (11). Введем для нее обозначения

$$\delta_1 = \frac{\mu}{2\pi k_2^2}\ln\frac{r_k}{r_c}, \delta_2 = \frac{\mu^2(r_k - r_c)}{2\beta\rho\sqrt{k_1}k_2^2}(1+k_1), \delta_3 = \frac{\mu^2}{2\beta\rho\sqrt{k_1}k_2^2},$$

тогда формула (13) перепишется

$$\Delta p = \delta_1 Q - \delta_2 + \delta_3[\sqrt{R} - \sqrt{a}\ln\left|\frac{2a + br + 2\sqrt{aR}}{r}\right| + \frac{b}{2\sqrt{c}}\ln\left|2\sqrt{cR} + 2cr + b\right|]_{r_c}^{r_k} \quad (16)$$

Для k_2 берутся те же четыре варианта (случаи 2.1-2.4), а коэффициенты для них будут такие

$$\delta_{11} = 2{,}75 * 10^{25}, \delta_{21} = 1{,}53 * 10^{27}, \delta_{31} = 1{,}53 * 10^{25}; \delta_{12} = 1{,}1 * 10^{26},$$

$$\delta_{22} = 6{,}12 * 10^{27}, \delta_{32} = 6{,}12 * 10^{25}; \delta_{13} = 6{,}875 * 10^{26}, \delta_{23} = 38{,}25 * 10^{27},$$

$$\delta_{33} = 38{,}25 * 10^{25}; \delta_{14} = 27{,}5 * 10^{26}, \delta_{24} = 153 * 10^{27}, \delta_{34} = 153 * 10^{25}$$

Например, в случае 2.1 уравнение индикаторной диаграммы имеет вид

$$\Delta p * 10^{-25} = 2{,}75Q - 153 + 1{,}53[\sqrt{10^4 + 52Q + 0{,}067Q^2} -$$

$$-\sqrt{0{,}01 + 0{,}052Q + 0{,}067Q^2} + 1{,}796Q + 0{,}26Q\ln\left|\frac{0{,}134Q + 0{,}052}{0{,}134Q + 52}\right| + \quad (17)$$

$$+ 0{,}26Q\ln\left|\frac{200 + 0{,}52Q}{0{,}2 + 0{,}52Q}\right|]$$

Построение индикаторных диаграмм проводилось в восьми случаях (1.1-1.4, 2.1-2.4) в интервале изменения дебита нагнетательной скважины $Q \in [-6 * 10^{-4}, 0]$ с шагом h=2*10^{-5} м^3/с (тридцать точек). Можно было бы брать и большее число точек, но в этом не было необходимости. Вычисления велись в среде Mathcad 2001. Professional (программа табулирования функции). На печать выводились значения аргумента и искомой функции в соответствующих точках и строился ее график. В качестве образца на рис.1 и рис.2 приведены полученные графики для случаев 2.1 и 1.1. Из приведенных результатов видно, что в случае 1.1 график имеет отчетливо нелинейный характер, особенно вблизи начала координат. Выпуклость графика – к оси депрессий. В случае 1.2 наблюдается все то же самое, но крутизна кривой увеличивается, а в случаях 1.3 и 1.4 это наблюдается еще сильнее. В случае 2.1 индикаторная диаграмма близка к прямой, небольшая выпуклость имеется к оси расходов. В случаях 2.2 – 2.4 эта тенденция сохраняется, только меняется наклон кривой и точки, через которые она проходит. Полученные результаты могут быть использованы для выбора наиболее целесообразного режима эксплуатации скважины.

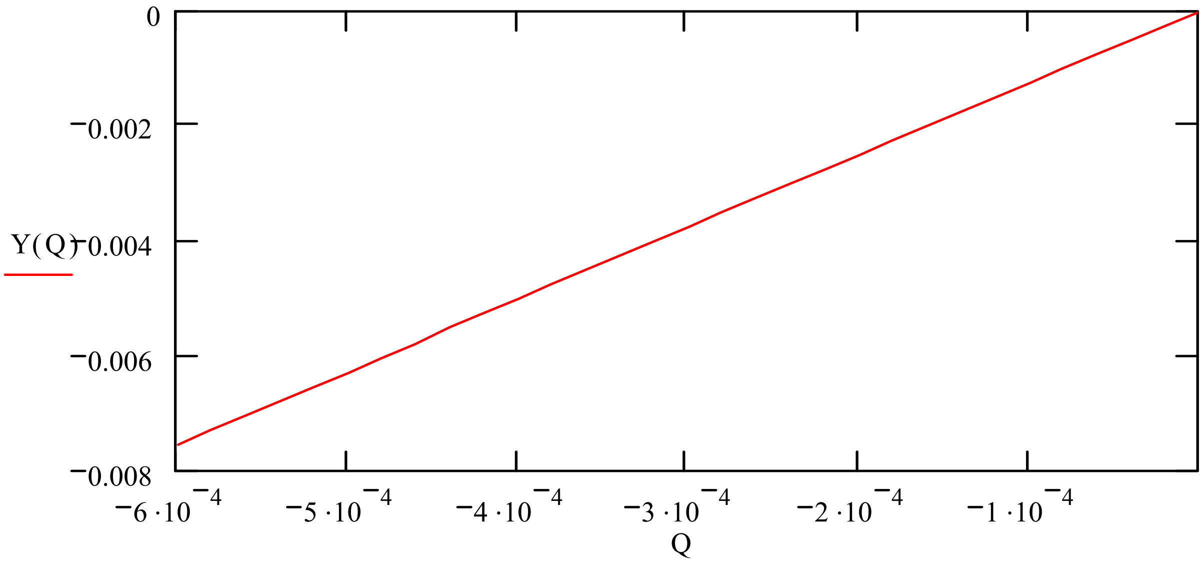


Рис. 1. Индикаторная диаграмма в случае 2.1

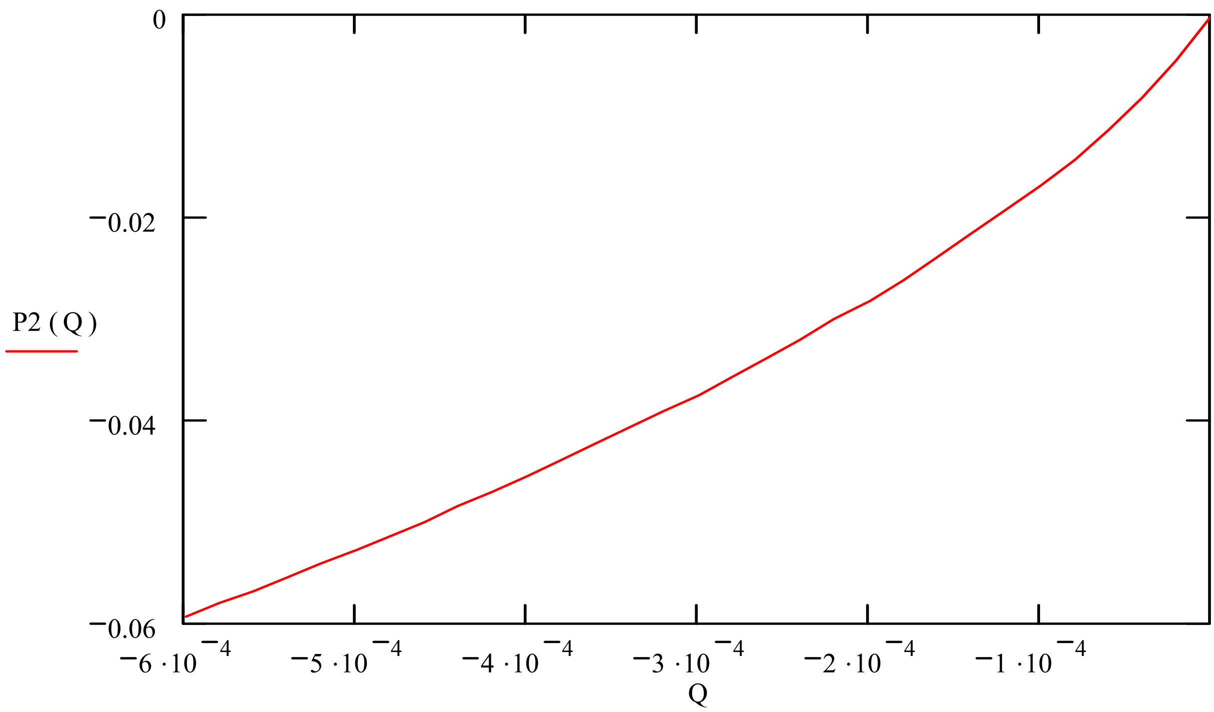


Рис. 2. Индикаторная диаграмма в случае 1.1

Литература

1. Голубев Г.В. Применение дискретных особенностей в задаче определения фильтрационных параметров // Вестник Харьковского национального университета, 2007, № 775, Харьков, с. 99-104.
2. Голубев Г.В. Решение задач фильтрации с использованием дискретных логарифмических особенностей // Труды XIII Междунар. симп. МДОЗМФ, Харьков-Херсон, 2007, с. 121-125.

УДК 533.6

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ ГРАНИЦЫ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И.И. Ефремов, Е.П. Лукащик, С.А. Грибашев
Россия, Кубанский государственный университет,
e-mail: i.efremov@math.kubsu.ru

Задача определения гидродинамических сил и моментов, возникающих на тонкой пластинке при гармонических колебаниях вблизи плоской твердой границы сжимаемой жидкости, сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно скачка касательных скоростей вдоль тонкой пластинки. Для вычисления функции ядра интегрального уравнения используется представление в виде интеграла Фурье. Отмечается усиление колебательности с уменьшением расстояния от тонкой пластинки до твердой границы. Устанавливается приближенная формула для определения резонансных частот.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях тонкой недеформируемой пластинки вблизи плоской твердой границы сжимаемой жидкости.

Безвихревое течение сжимаемой жидкости, вызванное малыми колебаниями пластинки, описывается уравнением Гельмгольца для амплитудной функции потенциала скорости $\varphi(x,y)$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varphi=0 \qquad (1)$$

в полуплоскости $y>-h$ за исключением отрезка оси Ox $|x|\le 1, y=0$.

На пластине должно удовлетворяться условие непротекания

$$\varphi_y=V_y(x), |x|\le 1, y=0 \qquad (2)$$

Граничное условие на плоском твердом экране

$$\varphi_y=0, y=0, \forall x \qquad (3)$$

На бесконечности требуется выполнение условия излучения в форме Зоммерфельда, исключающее появление волн, идущих из бесконечности к пластине.

Вблизи острых кромок должны выполняться условия Майскнера в виде требования ограниченности давления или потенциала, а производная φ_x может иметь особенность интегрируемого порядка

$$\varphi_x(x,0)\sim O((1\pm x)^{-\beta}), \beta<1 \qquad (4)$$

2. Вывод интегрального уравнения

Потенциал течения ищется в виде потенциала вихревого слоя, обеспечивающего разность касательных скоростей и значений потенциала скорости вдоль верхней и нижней сторон пластины. Соответственно, разные значения принимает и давление, связанное с потенциалом скорости линеаризованным интегралом Коши-Лагранжа

$$p = p_{\infty} + i\omega\rho\varphi .$$

Интенсивность вихревого слоя

$$\gamma(x) = \varphi_x(x,0+) - \varphi_x(x,0-)$$

связана со значениями давления вдоль верхней и нижней сторон пластины соотношением

$$\hat{p}(x) = p_{-} - p_{+} = -i\omega\rho(\varphi_{+} - \varphi_{-}) = -i\omega\rho \int_{-1}^{x} \gamma(\xi)d\xi, |x| \le 1.$$

Для получения решения краевой задачи (1) – (4) используется представление потенциала скорости в виде интеграла Фурье

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha,y)e^{-i\alpha x}d\alpha, \Phi(\alpha,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)e^{i\alpha x}dx.$$

Рассмотрим две функции

$$\Phi_{+}(\alpha,y) = \Phi(\alpha,y), y > 0, \Phi_{-}(\alpha,y) = \Phi(\alpha,y), -h < y < 0$$

Для функций Φ_{+} и Φ_{-} получим краевую задачу сопряжения

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\Phi_{\pm}}{dy^2} - (\alpha^2 - \nu^2)\Phi_{\pm} = 0, \\
&\frac{d\Phi_{\pm}}{dy} = V(\alpha), y = 0, \\
&\frac{d\Phi_{-}}{dy} = 0, y = -h, \\
&\Phi_{+} \to 0, y \to \infty.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$V(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_y(x,0)e^{i\alpha x}dx\,.$$

Введем функцию $\Gamma(\alpha)$ – Фурье-образ финитной функции $\gamma(x)$

$$\Gamma(\alpha)=\int_{-1}^{1}\gamma(x)e^{i\alpha x}dx=-i\alpha(\Phi_{+}-\Phi_{-}).$$

Решение краевой задачи (5) приводит к функциональному уравнению

$$\frac{\Gamma(\alpha)\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{2i\alpha}(1-e^{-2h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}})=V(\alpha)$$

Применяя далее обратное преобразование Фурье и теорему о свертке, получим интегральное уравнение 1 рода с разностным ядром

$$\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)k(x-\xi)d\xi=V_y(x),|x|\le 1, \qquad (6)$$

где

$$k(x)=F^{-1}[K(\alpha)](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, K(\alpha)=\frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{2i\alpha}(1-e^{-2h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}})$$

.

3. Вычисление ядра интегрального уравнения

При применении ряда численных методов центральное место занимает вычисление функции ядра $k(x)$, поэтому важно выделить особенности этой функции.

Для определения типа ядра $k(x)$ обратимся к поведению символа ядра $K(\alpha)$ при $\alpha\to\infty$. Нетрудно установить, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}K(\alpha)=\frac{sign(\alpha)}{2i}\,.$$

Как показано в [1] , в этом случае ядро содержит слагаемое

$$k_0(x)=-\frac{1}{2\pi}P\frac{1}{x},$$

где $P\frac{1}{x}$ – обобщенная функция, приводящая в свертке с основными функциями к интегралу в смысле главного значения по Коши. Таким образом, ядро $k(x-\xi)$ будет сингулярным, содержащим ядро Коши.

Другой особенностью символа ядра является наличие точек ветвления $\alpha = \pm\nu$, что требует проведения разрезов от этих точек до бесконечно удаленной точки плоскости комплексной переменной $\alpha = \sigma + i\tau$. Кроме того, имеется полюс в точке $\alpha = 0$.

Согласно условиям излучения эти разрезы от точек ветвления $\alpha = \pm\nu$, должны проходить в верхней и нижней полуплоскостях соответственно [2].

В отличие от традиционных разрезов по вертикальным прямым проведем по другому варианту , указанному в [3], а именно: разрезы состоят из отрезков действительной оси $[\pm\nu, \pm\varepsilon]$, четвертей окружности $|\alpha| = \varepsilon, 0 \le \theta \le \pi/2$ и $-\pi \le \theta \le -\pi/2$, лучей вдоль мнимой оси $[\pm i\varepsilon, \pm\infty)$. Проведение таких разрезов одновременно учитывает полувычеты в точке $\alpha = 0$.

В соответствии с изложенным можно записать следующие выражения для вычисления ядра

$$k(x) = \lim\{\frac{sign(x)}{2\pi}[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-\tau|x|}}{\tau}\sqrt{\tau^2+\nu^2}(1-\cos(2h\sqrt{\tau^2+\nu^2}))d\tau$$
$$-\int_{\varepsilon}^{\nu}\frac{e^{i\sigma|x|}}{\sigma}\sqrt{\nu^2-\sigma^2}(1-\cos(2h\sqrt{\nu^2-\sigma^2}))d\sigma]\}, \varepsilon \to 0$$

Тестирование выбора разрезов производилось на примере вычисления функций Ганкеля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha e^{-2h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}}{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}e^{-i\alpha x}d\alpha = \frac{\nu x}{\sqrt{x^2+4h^2}}H_1^{(1)}(\nu\sqrt{x^2+4h^2}).$$

4. Численное решение интегрального уравнения

Дискретизацию задачи проведем на основе метода дискретных вихрей [4]. Отметим, что для того чтобы в жидкости не возникли другие вихревые структуры, кроме вихревого слоя, моделирующего колеблющуюся пластинку, необходимо выполнение условия бесциркуляционности течения

$$\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)d\xi = 0$$

Соответственно, решение интегрального уравнения ищется в классе функций, имеющих особенность интегрируемого порядка на кромках пластинки. Таким образом, решение интегрального уравнения (6) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j k(x_i-\xi_j)=V_y(x_i), \qquad i=\overline{1,n-1}\\
&\sum_{j=1}^{n}\gamma_j=0, \\
&x_i=-1+(i-\frac{1}{4})\frac{4}{2n-1}, \qquad \xi_j=-1+(j-\frac{3}{4})\frac{4}{2n-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

После решения системы (7) коэффициенты суммарной нормальной силы и момента относительно середины пластинки находятся по формулам

$$c_N=-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}s_j\gamma_j, c_M=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}s_j^2\gamma_j,$$

5. Анализ результатов

Результаты расчетов $c(h,\nu)=|c_N|/\pi$ при вертикальных колебаниях в зависимости от приведенной частоты ν для различных значений относительного отстояния h проиллюстрированы на рис.1

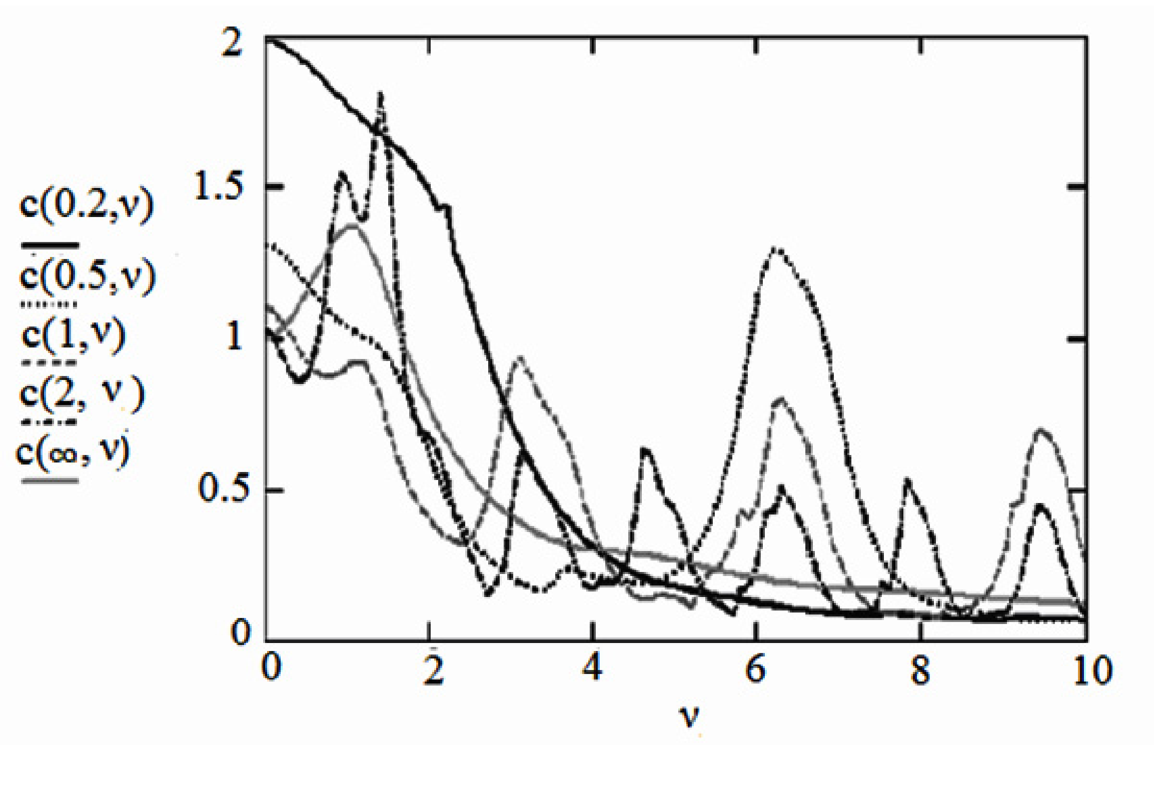


Рис.1. Зависимость от приведенной частоты коэффициента нормальной силы пластинки, колеблющейся вблизи твердого экрана

Обращает на себя внимание наличие конечных резонансных пиков при значениях приведенной частоты, определяемой приближенной формулой

$$\nu_n \approx \frac{n\pi}{h}$$

Отмеченные резонансы конечны. Бесконечные резонансы отсутствуют вследствие возникновения в сжимаемой жидкости демпфирующих сил, пропорциональных скорости, которые при наличии только одной бесконечной границы не обращаются в нуль ни при каких значениях частоты.

Заметим, что колебания пластинки вблизи твердой границы соответствуют колебаниям в противофазе двух пластинок биплана. В случае синфазных колебаний в символе ядра интегрального уравнения множитель $(1-e^{-2h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}})$ должен быть заменен на $(1+e^{-2h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}})$. Синфазные колебания биплана можно также рассматривать как колебания пластинки вблизи акустически «мягкой» полуплоскости. Возможно обобщение такого подхода к задаче о колебаниях пластинки вблизи импедансной полуплоскости.

На рис.2 показаны результаты расчетов коэффициента нормальной силы для случая «акустически мягкой» границы.

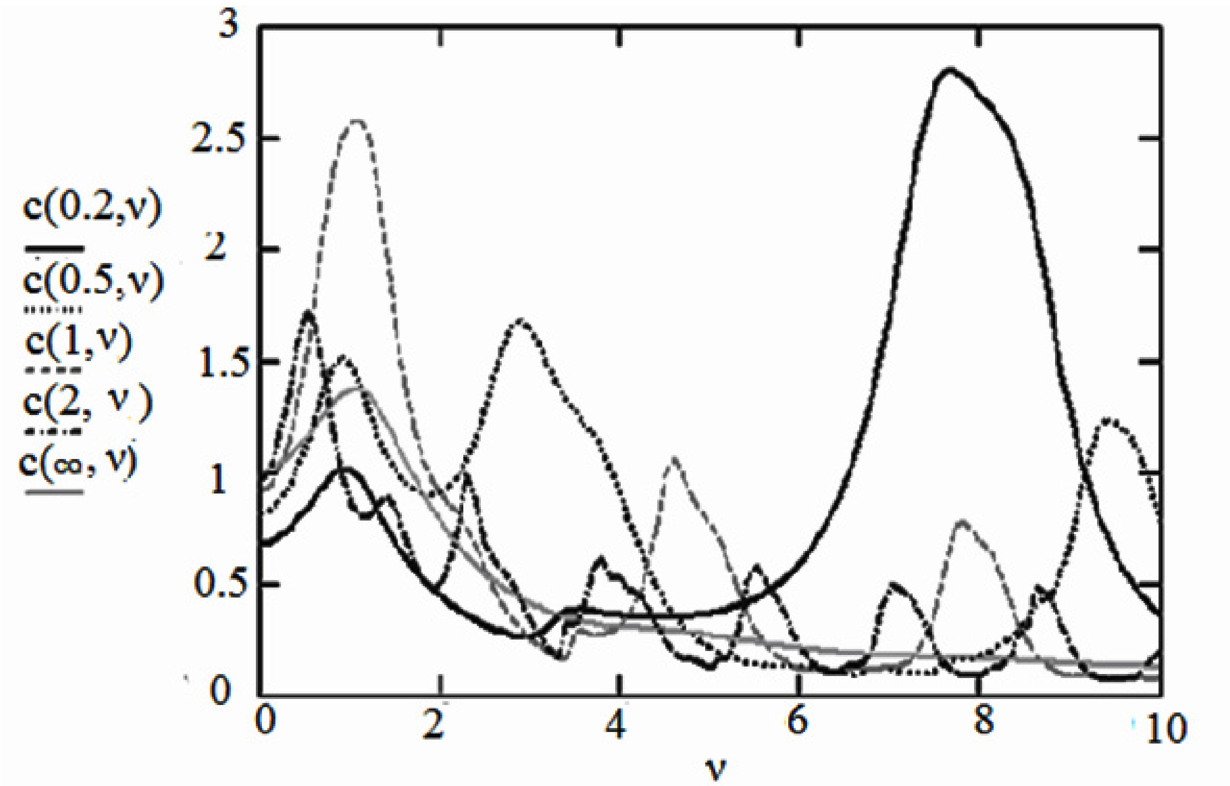


Рис.2. Зависимость от приведенной частоты коэффициента нормальной силы пластинки в составе синфазного биплана

Можно отметить, что реакция среды на колебания пластинки и в этом случае носит резонансный характер. Однако резонансные частоты здесь сдвинуты по отношению к соответствующим частотам для непроницаемой границы

$$\nu_n \approx (n-0.5)\frac{\pi}{h}$$

6. Заключение

В статье реализован один способ вычисления ядра интегрального уравнения, представленного вы виде интеграла Фурье от функции, имеющей точку ветвления. Показано, что при наличии одной плоской границы колебательность усиливается. Однако бесконечные резонансы невозможны, поскольку частота отсечки отсутствует. Частоты конечных резонансов составляют бесконечное счетное множество чисел, обратно пропорциональных расстоянию до границы. При этом частоты для твердой и мягкой границы смещены на $\pi/2h$

Литература

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 278 с.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М: Наука, 1985. 256 с.

УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛЕСНОГО ПРОФИЛЯ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

О.В. Иванисова
Россия, Кубанский государственный университет

Рассмотрена задача обтекания тонкого телесного профиля потоком несжимаемой весомой жидкости. Потенциал возмущения течения около профиля представлен как потенциал течения, которое создаётся слоем вихреисточников. Для определения вихревой интенсивности получено интегральное уравнение, которое решено методом дискретных вихрей. По найденному значению вихревой интенсивности вычислен коэффициент подъёмной силы.

Теоретические исследования движения несущих систем вблизи поверхности раздела двух сред были начаты в работах М.В. Келдыша, М.А. Лаврентьева [2] и Н.Е. Кочина [3]. В работе [2] рассматривалась задача о движении тонкого подводного крыла, движущегося на достаточно большой глубине под поверхностью весомой жидкости. Та же задача для умеренных погружений была рассмотрена А.Н. Панченковым [4]. Однако до сих пор нет достаточно полных и надежных количественных данных о влиянии весомости жидкости и близости границы жидкости на величину сил воздействия на погруженные тела.

Рассмотрим обтекание безвихревым потоком несжимаемой весомой жидкости с постоянной скоростью υ_∞ тонкого телесного профиля, расположенного на глубине h под свободной поверхностью.

Течение описывается потенциалом скорости $\varphi(x,y)$, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (1)$$

на полуплоскости $y<h$ кроме $G=\{y=0,\, x\in[-1,+1]\}$.

На свободной поверхности весомой жидкости: $y=\eta(x)+h$ должны выполняться два условия:

1) кинематическое: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\upsilon_\infty\dfrac{d\eta}{dx}$;

2) динамическое: $p=p_\infty$ или $g\eta+\upsilon_\infty\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0$.

Исключая неизвестное возмущение свободной поверхности $\eta(x)$, получим условие на свободной поверхности весомой жидкости:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad y=h, \qquad (2)$$

где $\nu=\dfrac{g}{\upsilon_\infty^2}$.

На границе телесного профиля $y = f_{\pm}(x)$ должно быть выполнено условие непротекания:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \upsilon_{\infty} \frac{df_{\pm}}{dx} \tag{3}$$

На бесконечности впереди от профиля возмущения скорости должны исчезать

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \to 0, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \to 0 \text{ при } x \to -\infty, \tag{4}$$

на бесконечности позади профиля возмущения скорости должны быть ограничены.

Профиль находится в бесконечно глубокой жидкости и, следовательно, условия (4) должны быть выполнены и при $y \to -\infty$.

Потенциал возмущения течения около телесного профиля можно представить как потенциал течения, которое создаётся слоями вихрей и источников:

$$\varphi = A\gamma + Bq, \tag{5}$$

где оператор $A\gamma$ – потенциал вихревого, а Bq – потенциал простого слоя. Интенсивность простого слоя

$$q = \frac{1}{\upsilon_{\infty}} \left(\frac{\partial \varphi_{+}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{-}}{\partial y} \right)$$

и пропорциональна производной от функции распределения толщины вдоль хорды профиля. Вихревая интенсивность

$$\gamma = \frac{1}{\upsilon_{\infty}} \left(\frac{\partial \varphi_{+}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{-}}{\partial x} \right)$$

на основе линеаризованного уравнения

$$p = p_{\infty} - \rho \upsilon_{\infty} \varphi_{x} - \rho g f$$

связана с перепадом давления формулой

$$\frac{p_{-} - p_{+}}{\rho \upsilon_{\infty}^{2}} = \gamma(x) + \frac{g}{\upsilon_{\infty}^{2}} \left(f_{+} - f_{-} \right) = \gamma(x) + \nu \int_{-1}^{x} q(s) ds. \tag{6}$$

Здесь индексы + и – указывают величины, относящиеся соответственно к верхней и к нижней поверхности телесного профиля.

Операторы $A\gamma$ и Bq обладают свойствами:

$$A_{x\pm}\gamma = \pm \frac{\gamma}{2} + \overline{A_{x}}\gamma, \; A_{y+}\gamma = A_{y-}\gamma = \overline{A_{y}}\gamma, \; B_{y\pm}q = \pm \frac{q}{2} + \overline{B_{y}}q, \; B_{x+}q = B_{x-}q = \overline{B_{x}}q,$$

где черточки над операторами означают результат формальной подстановки $y = 0$, а индексами + и – обозначены предельные значения при $y \to \pm 0$.

Тогда можно записать краевые условия непротекания профиля в операторной форме:

$$\overline{A_{y}}\gamma + \overline{B_{y}}q = \upsilon_{\infty} f'_{cp}, \tag{7}$$

где $f_{cp} = \frac{1}{2}(f_+ + f_-)$, $\overline{A_y}\gamma = A_y\gamma\big|_{y=0}$.

Применив преобразование Фурье

$$F[\varphi_\pm](\alpha, y) = \Phi_\pm(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\pm(x, y)e^{i\alpha x}dx,$$

$$F[\gamma](\alpha) = \Gamma(\alpha) = \int_{-1}^{1} \gamma(x)e^{i\alpha x}dx, \; F[q](\alpha) = Q(\alpha) = \int_{-1}^{1} q(x)e^{i\alpha x}dx,$$

в силу линейности дифференциального оператора, получим краевые задачи для потенциала вихревого слоя:

$$\begin{cases} -\alpha^2\Phi_\pm + \dfrac{\partial^2\Phi_\pm}{\partial y^2} = 0, \\ -\alpha^2\Phi_\pm + \nu\dfrac{\partial\Phi_\pm}{\partial y}\bigg|_{y=h} = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi_+}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \dfrac{\partial\Phi_-}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \\ \Phi_-\big|_{y\to-\infty} \to 0, \end{cases} \tag{8}$$

и для потенциала простого слоя:

$$\begin{cases} -\alpha^2\Phi_\pm + \dfrac{\partial^2\Phi_\pm}{\partial y^2} = 0, \\ -\alpha^2\Phi_\pm + \nu\dfrac{\partial\Phi_\pm}{\partial y}\bigg|_{y=h} = 0, \\ -i\alpha\Phi_+\big|_{y=0} = -i\alpha\Phi_-\big|_{y=0}, \\ \Phi_-\big|_{y\to-\infty} \to 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решая полученные задачи (8), (9) и осуществляя обратное преобразование Фурье, найдем потенциалы $A\gamma$ и Bq:

$$A\gamma = \frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1}\gamma(s)ds\int_\sigma \frac{1}{\alpha}\left(-\operatorname{sgn} y \cdot e^{-|\alpha|\cdot|y|} + \frac{|\alpha|+\nu}{|\alpha|-\nu}e^{-2|\alpha|h+|\alpha|y}\right)e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha, \tag{10}$$

$$Bq = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}q(s)ds\int_\sigma \frac{1}{|\alpha|}\left(-e^{-|\alpha|\cdot|y|} + \frac{|\alpha|+\nu}{|\alpha|-\nu}e^{-2|\alpha|h+|\alpha|y}\right)e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha, \tag{11}$$

где σ – контур вдоль действительной оси, который обходит точки $\alpha = \pm\nu$ сверху. Такой выбор контура обеспечивает выполнение условий на бесконечности.

Подставляя найденные выражения для потенциалов в формулу (7), получаем интегральное уравнение для определения вихревой интенсивности γ:

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1}\gamma(s)ds\int_{\sigma}\operatorname{sgn}\alpha\left(1+e^{-2|\alpha|h}+\frac{2\nu}{|\alpha|-\nu}e^{-2|\alpha|h}\right)e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}q(s)ds\int_{\sigma}\left(e^{-2|\alpha|h}+\frac{2\nu}{|\alpha|-\nu}e^{-2|\alpha|h}\right)e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha+f'_{cp}(x). \quad (12)$$

После определения вихревой интенсивности $\gamma(x)$ можно найти коэффициент подъёмной силы:

$$c_y=\int_{-1}^{+1}\frac{p_- - p_+}{\rho\upsilon_\infty^2}dx=\int_{-1}^{+1}[\gamma(s)-\nu\, s\, q(s)]ds\,.$$

Используя теорию вычетов уравнение (12) преобразуем к виду:

$$\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x-\xi}+\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+4h^2}\right)+k_1(x-\xi)\right)d\xi=$$
$$=-f'_{cp}(x)+\int_{-1}^{1}q(\xi)\left(\frac{h}{\pi}\cdot\frac{1}{(x-\xi)^2+4h^2}+k_2(x-\xi)\right)d\xi, \quad (13)$$

где

$$k_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\nu\cos2\beta h+\beta\sin2\beta h)d\beta & \text{при } x<0\\ -\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\nu\cos2\beta h+\beta\sin2\beta h)d\beta+2\nu e^{-2\nu h}\cos\nu x & \text{при } x>0\end{cases},$$

$$k_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\beta\cos2\beta h-\nu\sin2\beta h)d\beta & \text{при } x<0\\ \dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\beta\cos2\beta h-\nu\sin2\beta h)d\beta-2\nu e^{-2\nu h}\sin\nu x & \text{при } x>0\end{cases}.$$

Для численного решения уравнения (13) применим метод дискретных вихрей [1]. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j)\left(\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x_i-s_j}+\frac{x_i-s_j}{\left(x_i-s_j\right)^2+4h^2}\right)+k_1(x_i-s_j)\right)=-f'_{cp}(x_i)+$$
$$+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}q(s_j)\left(\frac{h}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(x_i-s_j\right)^2+4h^2}+k_2(x_i-s_j)\right), \tag{14}$$

где $x_i=-1+\left(i-\frac{1}{4}\right)\frac{2}{N}$, $s_j=-1+\left(j-\frac{3}{4}\right)\frac{2}{N}$, $i,\ j=\overline{1,N}$.

Решив систему (14), находим интенсивность вихрей $\gamma(s_j)$, $j=\overline{1,N}$ и вычисляем коэффициент подъёмной силы по формуле:

$$c_y=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\gamma(s_j)-\nu s_j q(s_j)\right).$$

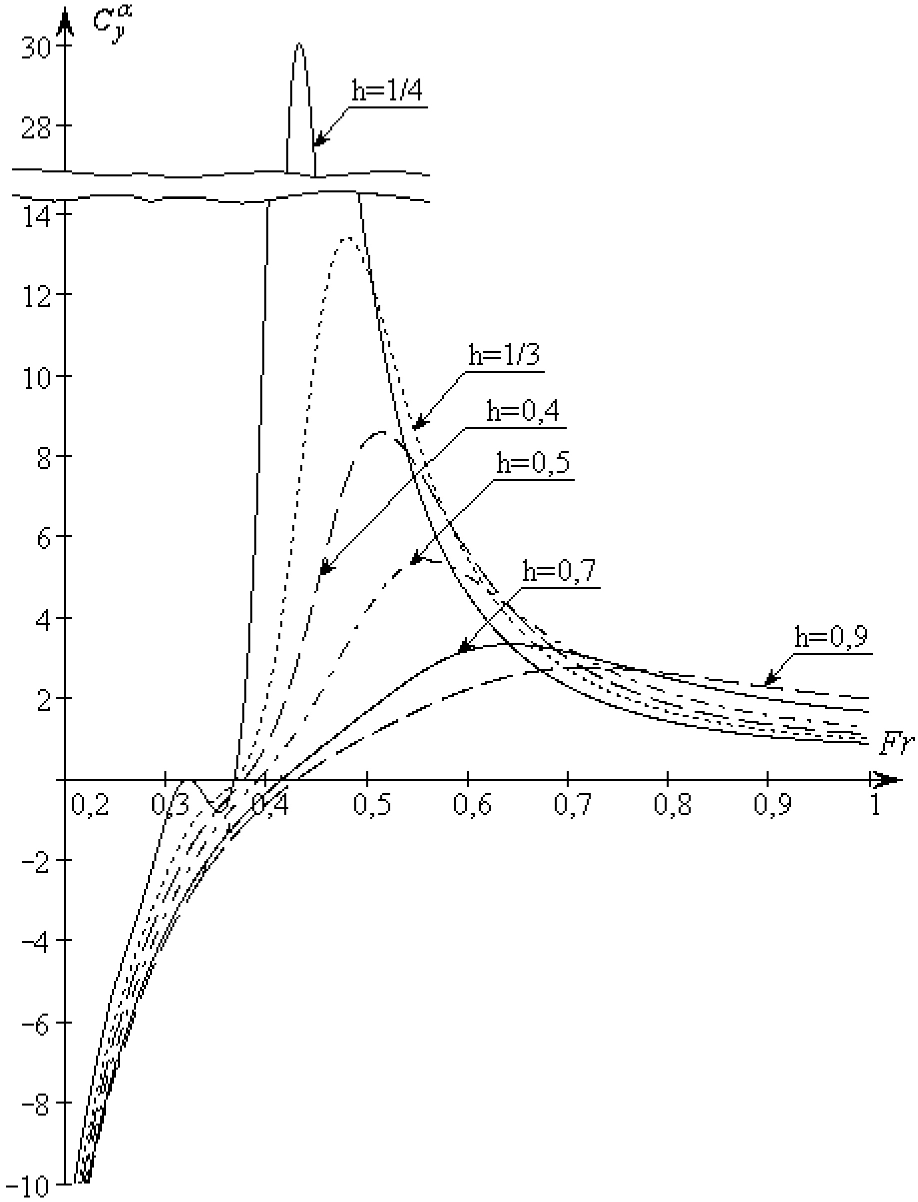


Рис. 1. Зависимость коэффициента подъёмной силы от малых чисел Фруда при разных значениях h

Рассмотренный метод решения поставленной задачи был применён для случая $f_+(x)=\alpha(1+x-x^2)$ и $f_-(x)=\alpha x$. В этом случае $f'_{cp}=\alpha(1-x)$, а $q(x)=-2\alpha x$. Численный расчёт был выполнен средствами математического пакета Mathcad при $N=50$. На рисунках 1 и 2 представлены серии кривых коэффициента подъёмной силы c_y^α на отрезках [0,2;1] и [1;10] в зависимости от числа Фруда $Fr=1/\sqrt{2\nu}$ при погружении профиля на глубину в долях хорды $h=1/4, 1/3,$ 0,4, 0,5, 0,7, 0,9.

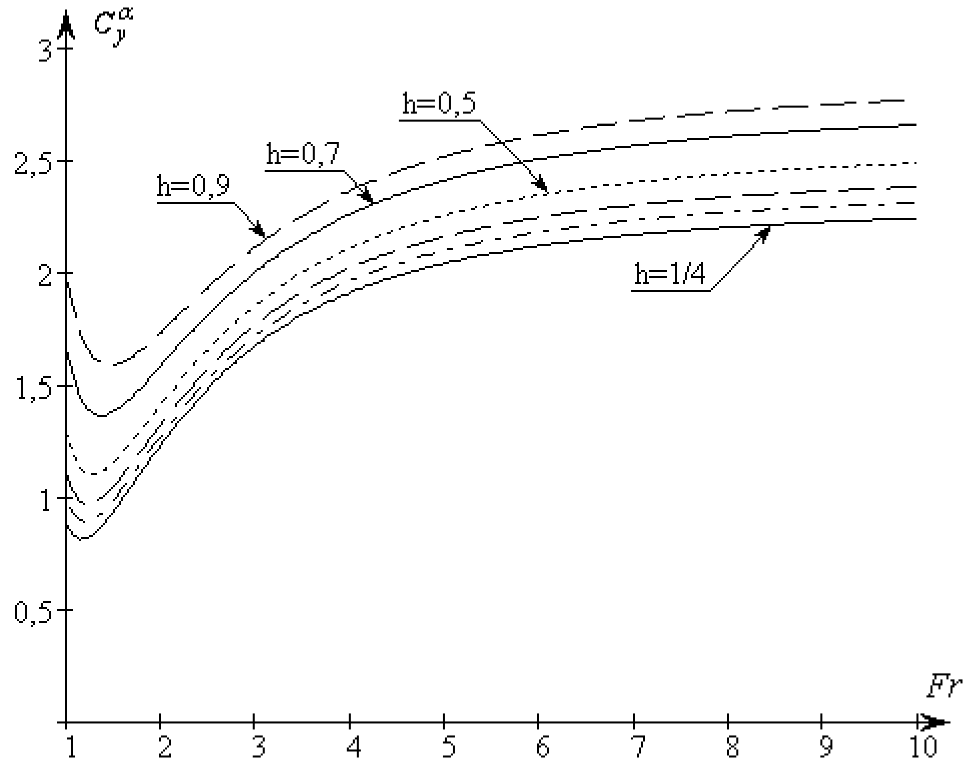


Рис. 2. Зависимость коэффициента подъёмной силы от больших чисел Фруда при разных значениях h

Автор благодарит профессора И.И. Ефремова за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Литература

1. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 242 с.
2. Келдыш М.В., Лаврентьев М.А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости // Труды конф. по теории волнового сопротивления. М.: ЦАГИ, 1937. С. 31-62.
3. Кочин Н.Е. О волновом сопротивлении и подъёмной силе погруженных в жидкость тел. Собр. соч. том 2. Изд-во АН СССР, 1949. С. 105-182.
4. Панченков А.Н. Гидродинамика подводного крыла. Киев: Наукова думка, 1965. 552 с.

УДК 622.276.031:532.546

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ И ГАЗА ПРИ РЕЖИМЕ РАСТВОРЕННОГО ГАЗА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Р.Н. Кадыров
Азербайджан, ГНКАР, Институт «Нефтегазпроект»,
e-mail: kadirov_ramiz@mail.ru

В работе численно решена обратная задача процесса фильтрации нефти и газа в режиме растворимого газа. Предложен алгоритм численного решения задачи в вариационной постановке, основанный на методах покоординатного спуска и конечных разностей. Дан анализ численных экспериментов, проведенных на модельных задачах.

Для определения фильтрационно-емкостных параметров многофазной системы на основе фактических данных о разработке залежи или эксплуатации скважин, посвящены работы [1,3,9]. В настоящей работе для идентификации параметров математической модели фильтрационного процесса газированной жидкости используется вариационный метод, где минимизируется функционал J(u) невязки между расчетными и измеренными значениями величины давлений на забое скважины [7,13].

$$J(u) = \sum_k \int_0^T \left(p_ф - p_p \right)^2 \delta\left(t - t_k\right) dt, \qquad (1)$$

где индексом к отмечены моменты времени, в которые известны замеры давлений в скважине.

В формуле (1) p_p является решением прямой задачи краевой задачи (2)-(6), а параметр u определен далее.

Залежь является сложным неоднородным объектом, информация о котором известна только в дискретных точках (скважинах), причем степени достоверности различных параметров неодинакова [9] . К числу относительно достоверных параметров можно отнести пористость, вязкости нефти и газа, объемный коэффициент нефти, растворимость газа в нефти, плотность газа. Предполагая эти параметры гладкими функциями, их можно аппроксимировать. Поэтому эти параметры будем считать известными функциями.

К числу недостоверных параметров относится фазовые проницаемости. Поэтому естественно считать проницаемость неизвестным. В настоящей работе находятся следующие параметры, входящие в выражения распределения фазовых проницаемостей нефти и газа в зависимости от нефтенасыщенности [14]:

$$k_н(\sigma) = a\sigma^3 - 0.06,$$

$$k_г(\sigma) = b(1-\sigma)^2$$

где, точные значения a=1,06; b=1,16.

Учитывая сказанное, можно сказать, что величина (1) зависит от параметров u=(a,b). Для минимизации функционала J(u) применим модифицированный метод покоординатного спуска, где требуется неоднократное решение задачи (2)-(6) при различных значениях (u) [6,7].

Постановка и решение прямой задачи

Ниже рассматривается замкнутая круговая нефтяная залежь, которая разрабатывается при режиме растворенного газа одной центральной скважиной.

Пусть p (r, t), p_0 (r), σ(r, t), σ_0(r) – означают соответственно давления, и нефтенасыщенности, соответственно в произвольной точке залежи при текущем времени t и при начальном времени t=0, $q_н$(t) - дебит нефти, $k_н(\sigma)$ и $k_г(\sigma)$ – фазовые проницаемости, соответственно нефти и газа в произвольной точке залежи при текущем времени t, k_0 – абсолютная проницаемость пласта, $\mu_н$(p) и $\mu_г$(p) - вязкости, соответственно нефти и газа в произвольной точке залежи при текущем времени t, β(p) - объемный коэффициент нефти, $\rho_г$(p) и $\rho_{г0}$ - плотность газа в произвольной точке залежи при текущем времени t и в нормальным условии, s(p) - растворимость газа в нефти, m(p) – пористость залежи, Г - газовый фактор, h и r_k - толщина и радиус контура залежи, r_c - радиус скважины, *t* - время разработки.

Решение задачи неустановившееся движения газированной жидкости в пористой среде без учета капиллярных сил сводится к интегрированию следующей системы безразмерных уравнений [2,4,5,8,11,12,14]:

$$\exp(-2\xi)\left[\left(\frac{\rho_Г^*(p)k_Г^*(\sigma)}{\mu_Г^*(p)}+\frac{s(p)k_Н^*(\sigma)}{\mu_Н^*(p)\beta(p)}\right)\frac{\partial p^*(\xi,t)}{\partial\xi}\right]= \tag{2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t^*}\left\{m^*(p)\left[\rho_Г^*(p)(1-\sigma(\xi,t))-\frac{s(p)}{\beta(p)}\sigma(\xi,t)\right]\right\},$$

$$\exp(-2\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{k_Н^*(\sigma)}{\mu_Н^*(p)\beta(p)}\frac{\partial p^*(\xi,t)}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{m^*(p)\sigma(\xi,t)}{\beta(p)}\right), \tag{3}$$

$$p^*=p_0^*,\ \ \sigma=\sigma_0,\ \ при\ \ t=0, \tag{4}$$

$$\left\{\frac{\rho_Г^*(p)k_Г^*(\sigma)}{\mu_Г^*(p)}+\left[1+s(p)\right]\frac{k_Н^*(\sigma)}{\mu_Н^*(p)\beta(p)}\right\}\frac{\partial p^*(\xi,t)}{\partial\xi}=q_Н^*(1+Г),\ \ при\ \ \xi=\xi_c \tag{5}$$

$$\frac{\partial p^*(\xi,t)}{\partial\xi}=0,\ \ при\ \ \xi=\xi_к, \tag{6}$$

при следующих безразмерных величинах:

$$r^* = \frac{r}{r_0},\ \xi = \ln r^*,\ p^* = \frac{p}{p_0},\ \rho_г^* = \frac{\rho_г}{\rho_{г0}}, \mu_н^* = \frac{\mu_н}{\mu_0},\ \mu_г^* = \frac{\mu_г}{\mu_0}, k_н^*(\sigma) = \frac{k_н(\sigma)}{k_0},$$

$$k_г^*(\sigma) = \frac{k_г(\sigma)}{k_0},\ q_н^* = \frac{q_н}{Q_0},\ t^* = \frac{t}{T_0},\ t_1^* = \frac{t}{t_0},\quad m^*(p,t) = \frac{m(p,t)}{m_0},$$

(7)

$$T_0 = \frac{m_0 r_k^2 \mu_0}{p_0 k_0},\ Q_0 = \frac{p_0 h k_0 2\pi}{\mu_н},$$

$$Г = \beta(p)\psi(\sigma)\frac{\mu_н}{\mu_г} p_0 p + s(p),\ \psi(\sigma) = \frac{k_г}{k_н}$$

где величины с нулевыми индексами являются характерными величинами (например, $r_0=r_k$, t_0=1 сек и т.д.). В дальнейшем, символы звездочки для простоты пропущены.

Введем сетку, равномерную по пространству и неравномерную по времени:

$$\omega_\xi = \{\xi_i = \xi_c + i\Delta\xi, \xi_c = \ln r_c, \Delta\xi = \ln(r_k / r_c)/N, i = 0,1,2,..,N\},$$

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i, n = 1,2,...$$

После этого искомые функции заменяются сеточными функциями.

Для численного решения система (2)-(3) преобразовывалась методом исключения неизвестных, которыми являются производные от давления, насыщенности и пористости по времени. Тогда уравнение относительно давления получается следующим образом: из уравнения, полученного суммированием (2) и (3), исключались величины $\partial\sigma/\partial t$ и $\partial m/\partial t$ с помощью уравнения (3).

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[F_1 \frac{\partial p}{\partial\xi}\right] - F_3 \frac{\partial}{\partial\xi}\left[F_2 \frac{\partial p}{\partial\xi}\right] = F_4 \frac{\partial p}{\partial t} + F_5, \qquad (8)$$

где,

$$F_1 = \frac{k_н}{\mu_н\beta}(1+s(p)) + \frac{k_г p_0 p}{\mu_г},\quad F_2 = \frac{k_н}{\mu_н\beta},\ F_3 = 1 + s(p) - \beta p_0 p,$$

$$F_4 = e^{2\xi} m\left[p_0 + \frac{\sigma}{\beta}\left(\frac{ds}{dp} - p_0 p\frac{d\beta}{dp} - p_0\beta\right)\right],$$

$$F_5 = e^{2\xi}\frac{p_0 p}{\tau_m}\left[m - \exp(\beta_c(p-1))\right]$$

Аналогично, уравнение относительно насыщенности имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[F_2\frac{\partial p}{\partial\xi}\right]=F_6\frac{\partial o}{\partial t}+F_7\,, \tag{9}$$

где,

$$F_6=e^{2\xi}\frac{m}{\beta},F_7=e^{2\xi}\frac{\sigma}{\beta}\left\{\frac{1}{\tau_m}\left[m-\exp\left(\beta_c\left(p-1\right)\right)\right]-\frac{m}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial e}\right\}$$

Для расчета искомых функций (давления, насыщенности и пористости) на (n+1)-ом временном шаге при известных значениях на предыдущих временных шагах используются следующие конечно-разностные уравнения:

I. Нахождение давления.

$$\begin{gathered}F_{1,i+1}^{n+1}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)-F_{1,i}^{n+1}\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)-\\-F_i^{n+1}\left[F_{2,i+1}^{n+1}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)-F_{2,i}^{n+1}\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)\right]=\\=\frac{\Delta\xi^2}{\Delta t_{n+1}}F_{4,i}\left(p_i^{n+1}-p_i^n\right)+\Delta\xi^2F_{5,i}^{n+1}\,,\end{gathered} \tag{10}$$

II. Нахождение нефтенасыщенности.

$$\begin{gathered}F_{2,i+1}^{n+1}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)-F_{2,i}^{n+1}\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)=\\=\frac{\Delta\xi^2}{\Delta t_{n+1}}F_{6,i}\left(\sigma_i^{n+1}-\sigma_i^n\right)+\Delta\xi^2F_{7,i}^{n+1}\,,\end{gathered} \tag{11}$$

Чтобы сформулировать разностную задачу, соответствующую краевой задаче (2)-(6), необходимо условия (4)-(6) записать в разностном виде. При этом условия (4) остаются без изменения.

Аппроксимируя условия (5)-(6), используя уравнения (2) и (3) получим:

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\rho_г\left(p\right)k_г\left(\sigma\right)}{\mu_г\left(p\right)}+\left[1+s\left(p\right)\right]\frac{k_н\left(\sigma\right)}{\mu_н\left(p\right)\beta\left(p\right)}\right\}\Bigg|_1^{n+1}\frac{\partial p}{\partial\xi}\Bigg|_{0.5}^{n+1}=q_н\left(1+Г_c\right)+\\+\frac{\Delta\xi}{2}e^{2\xi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{m\left[\frac{\sigma s}{\beta}+\rho_г\left(1-\sigma\right)\right]\right\}\Bigg|_0^{n+1}+\frac{\Delta\xi}{2}e^{2\xi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m\sigma}{\beta}\right)\Bigg|_0^{n+1}\end{gathered} \tag{12}$$

$$\left(\frac{k_н\left(\sigma\right)}{\mu_н\left(p\right)\beta\left(p\right)}\right)\Bigg|_N^{n+1}\frac{\partial p}{\partial\xi}\Bigg|_{N-0.5}^{n+1}=\frac{\Delta\xi}{2}e^{2\xi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m\sigma}{\beta}\right)\Bigg|_N^{n+1} \tag{13}$$

Системы уравнений (10)-(13) с условием (4) аппроксимирует задачу (2)-(6) с погрешностью $O\left(\Delta t_{\max}+\Delta\xi^2\right)$. Эта погрешность для граничного условия (12) и (13) получаются после использования согласованность граничных условий [15], а именно:

С одной стороны, по формуле Тейлора имеем

$$\left(\frac{\rho_г(p)k_г(\sigma)}{\mu_г(p)}+\left[1+s(p)\right]\frac{k_н(\sigma)}{\mu_н(p)\beta(p)}\right)\frac{\partial p}{\partial\xi}\Big|_{0,5}=$$

$$=\left(\frac{\rho_г(p)k_г(\sigma)}{\mu_г(p)}+\left[1+s(p)\right]\frac{k_н(\sigma)}{\mu_н(p)\beta(p)}\right)\frac{\partial p}{\partial\xi}\Big|_{0}+$$

$$+\frac{\Delta\xi}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left(\frac{\rho_г(p)k_г(\sigma)}{\mu_г(p)}+\left[1+s(p)\right]\frac{k_н(\sigma)}{\mu_н(p)\beta(p)}\right)\frac{\partial p}{\partial\xi}\right\}\Big|_{0}+O\left(\Delta\xi^2\right)= \qquad (14)$$

$$=q_н\,(1+Г_с)+\frac{\Delta\xi}{2}e^{2\xi}\frac{\partial}{\partial t}m\left[\frac{\sigma s}{\beta}+\rho_г\left(1-\sigma\right)\right]\Big|_{0}+$$

$$+\frac{\Delta\xi}{2}e^{2\xi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{m\sigma}{\beta}\Big|_{0}+O\left(\Delta\xi^2\right)$$

С другой стороны, по формуле центральной аппроксимации имеем

$$\left(\frac{\rho_г(p)k_г(\sigma)}{\mu_г(p)}+\left[1+s(p)\right]\frac{k_н(\sigma)}{\mu_н(p)\beta(p)}\right)\frac{\partial p}{\partial\xi}\Big|_{0,5}=$$

$$=\left(\frac{\rho_г(p)k_г(\sigma)}{\mu_г(p)}+\left[1+s(p)\right]\frac{k_н(\sigma)}{\mu_н(p)\beta(p)}\right)\Big|_{1}\frac{p_1-p_0}{\Delta\xi}+O\left(\Delta\xi^2\right) \qquad (15)$$

Из равенств (14) и (15) получается формула (12) с требуемой точностью. Формула (13) получается аналогично.

Применение метода конечных разностей к уравнениям фильтрации нефти и газа приводит к системе нелинейных разностных уравнений. Для решения таких систем существует два подхода:

- эти системы линеаризуются, после чего применяются методы линейной алгебры с уточнением нелинейных членов,
- применяют известные методы решения нелинейных уравнений.

Первый подход

Чтобы решение производилось методом прогонки, необходимо исключить нелинейность коэффициентов. Поэтому, определения давлений и насыщенностей производились итеративно. В первом приближении принимается, что нелинейные члены вычислены согласно полям давлений, насыщенностей и пористостей на n-ой момент. Значения нелинейных коэффициентов вычисляются по способу "вверх по потоку" [2]. Тогда, уравнение

(10) решалось относительно давления по неявной четырех точечной схеме методом прогонки, следующим образом:

$$A_i^{(\nu)} p_{i-1}^{n+1} - C_i^{(\nu)} p_i^{n+1} + B_i^{(\nu)} p_{i+1}^{n+1} = -F_i^{(\nu)},$$
$$p_0^{n+1} = \chi_1^{\nu} p_1^{n+1} + \mu_1^{\nu},\ p_N^{n+1} = \chi_2^{\nu} p_1^{n+1} + \mu_2^{\nu} \qquad (16)$$
$$\nu = 0,1,2,...$$

Из уравнений (11) по неявной схеме определяем значения насыщенностью. Из-за недостаточности одного граничных условий для определения насыщенности, значения насыщенности на скважине и на контуре определялись экстраполяцией по трем точкам [4,8].

В линеаризованном виде все эти схемы являются абсолютно устойчивыми. Однако для получения заданной точности решения задачи осуществлен экспериментальный выбор шагов по времени и пространству методом деления пополам, в результате чего получены следующие значения шагов: N=25, Δt_0 =0,1 сек, значение Δt_0 увеличились на 0,1 с каждые 1000 шагов вычисления до тех пор, пока Δt_n<10 с.

Второй подход

Полученная нелинейная система решается итеративным путем с использованием метода Ньютона. Применение этой схемы позволило значительно увеличить шаг по времени при сохранении достаточной точности вычислений. Устойчивость и сходимость предлагаемого алгоритма доказываются методом вычислительного эксперимента [15].

Согласно этим алгоритмам были составлены программы на C++ и определены характеристики разработки залежи. Расчеты проводились для кругового пласта при заданном дебите и использованы следующие исходные данные:

$$\mathrm{p}_0 = 9\,\text{МПа}, \mu_\text{н} = 0.00088\,\text{Пас}, \mu_\text{г} = 0.000028\,\text{Пас},\ \mathrm{k}_0 = 0.5\text{мкм}^2,$$

$$\mathrm{h} = 10\,\text{м}, \mathrm{m}_0 = 0.2,\ \mathrm{r_k} = 200,\ 500, 1000\,\text{м},\ \mathrm{q} = 1/864, 3/864, 5/864, 10/864\,\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

Неизвестные коэффициенты $\mu_\text{н}(\mathrm{p}), \mu_\text{н}(\mathrm{p}), \beta(\mathrm{p})\,\text{и}\,\mathrm{s}(\mathrm{p})$ определены экспериментально, как в [14].

На рис. 1 сравниваются значения давления и нефтенасыщенности прямой задачи на контуре залежи и на скважине во времени. На этом рисунке значение дебита и радиуса контура пласта следующие: $q = 500\dfrac{м^3}{сут}, r_k = 200\,м$.

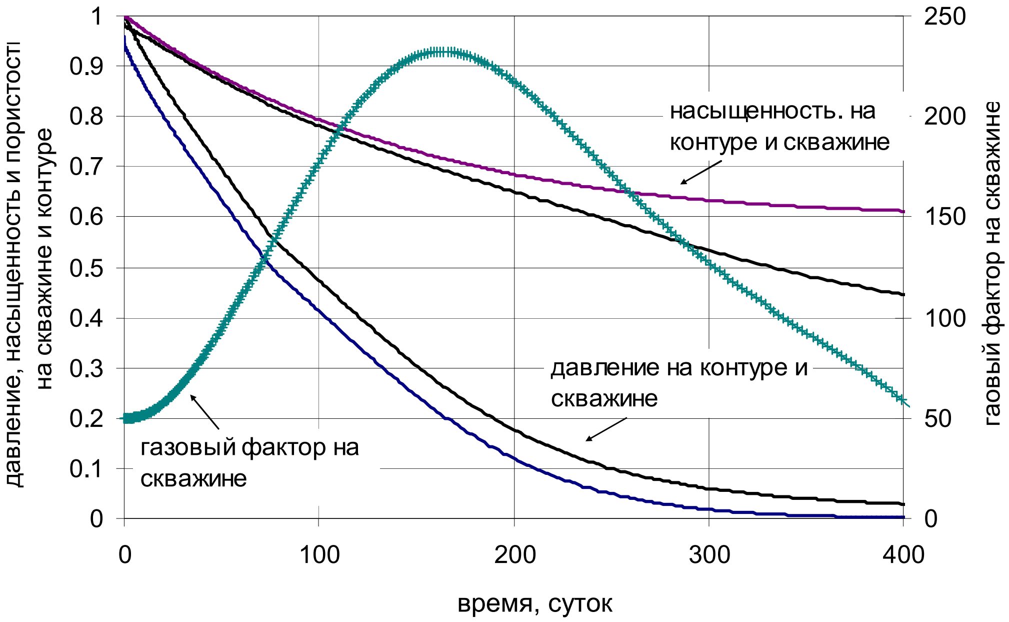


Рис. 1. Значения давления и нефтенасыщенности прямой задачи

Результаты проведенной идентификации представлены в табл.1.

Табл. 1. Результаты идентификации

Параметры	Точное значение	Расчетные значения
a	1,06	1,0603
b	1,16	1,1601

Для проверки правильности полученного результата, вновь решена прямая задача с прежними исходными данными, но с заданием фазовых проницаемостей в двух вариантах: в точным и расчетным. В табл. 2 дается сопоставление текущих забойных давлений на различные даты.

Табл. 2. Забойные давления

Время, сут	a=1,06; b=1,16	a=1,0603; b=1.1601	a=1,06; b=1,16	a=1,0603; b=1.1601	a=1,06; b=1,16	a=1,0603; b=1.1601
	p_c		σ_c		Г	
0,001	0,958	0,961	0,984	0,985	50,05	51,15
10	0,864	0,867	0,959	0,961	51,62	52,92
100	0,417	0,421	0,781	0,783	175,07	179,31
200	0,123	0,133	0,655	0,658	220,01	226,20
300	0,026	0,037	0,505	0,509	126,43	132,94

На основании многочисленных расчетов сделаны следующие выводы:

1. Число итераций достижения минимума в методе покоординатного спуска увеличивается с увеличением дебита скважины, но остается почти неизменным с изменением радиуса контура залежи при одинаковых значениях других параметров.
2. Как видно из табл.2, время истощения залежи, соответствующие в графы 2 и 3 отличаются друг от друга. Это отличие увеличивается с увеличением контура залежи при одинаковых значениях других параметров.

Литература

1. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Кулиев Г.Ф., Фейзуллаев Х.А. Идентификация функций относительных фазовых проницаемостей при фильтрации газоконденсатной смеси. НААН, Изв. Науки о Земле.- 2004. №2 – с.78-81.
2. Азиз Х. Сеттари К. Математическое моделирование пластовых систем.– М., «Недра», 1982.- 407 с.
3. Азимов Э.Х., Ибрагимов Т.М., Салманова С.С., Караева И.Т. О дифференцированном определении фильтрационно-емкостных параметров, двухпластовой ограниченной залежи вариационным методом. Изв. АН Азербайджана, Сер.наук о Земле.-1995. №1-3 – с.57-61.
4. Азимов Б.А., Рагимов Ш.М., Гаджибалаев Г.Ш. Применение математических методов и ЭЦВМ к решению некоторых задач разработки нефтегазовых месторождений. - Баку, АзИНТИ, 1969. - 153 с.
5. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов.- М., «Недра», 1973, 248 с.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.- 520 с.
7. Джалалов Г.И., Ибрагимов Т.М. Методика идентификации фильтрационных и емкостных параметров деформируемых пластов при нестационарной фильтрации флюидов – Баку: Элм, 1989. -48 с.
8. Ефремова Н.А. Анализ некоторых конечно-разностных схем для решения радиальной задачи о притоке газированной жидкости к скважине в пористой среде. - Сб.науч.тр., вып. 57, М., ВНИИ, 1976. - с. 68-79.
9. Индельман П.В. Кац Р.М. Об адаптации модели двумерной двухфазной фильтрации слабосжимаемых жидкостей при проектировании разработки нефтяных месторождений. Сб.науч.тр., вып. 81, М., ВНИИ, 1982. - с. 28-35.
10. Кадыров Р.Н. Программирование и численное моделирование основных процессов фильтрации пластовых флюидов. - Нефтепромысловое дело. №11, 2005. М., ОАО «ВНИИОЭНГ» – с. 29-31.
11. Кадыров Р.Н. Численное решение задачи о неустановившемся движении газированной жидкости с учетом релаксации горных пород. Proceedings of the Fifth International Conference “Internet-Education-Science – 2006 (IES-2006), Volume 2, 10-14 October, 2006, Vinnytsia – UKRAINE, с. 721-726.
12. Осипов В.В., Розенберг М.Д., Усенко В.Ф. Численное решение задачи о характере восстановления движения в пласте после закрытия скважины при неустановившемся движении газированной жидкости. - Сб.науч.тр. «Исследования в области разработки нефтяных месторождений и гидродинамики пласта», вып. 45, М., ВНИИ, 1973. - с. 13-23.
13. Прогнозирование и регулирование разработки газовых месторождений / С.Н. Закиров, Б.И. Васильев, А.И. Гутников и др. – М.: Недра, 1984. – 295 с.
14. Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. - М., «Недра», 1976.
15. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М., «Наука», 1977.- 656 с.

УДК532.546

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ СЛОЯ НА ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЙ ДЕБИТ ВОДОЗАБОРА, РАБОТАЮЩЕГО В УСЛОВИЯХ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПОТОКА И ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ [1]

А.А. Квасов

Россия, Орловский государственный университет

Определён предельно допустимый дебит водозабора, работающего без загрязнения в однородных анизотропных слоях в условиях поступательного потока и источника загрязнения. Исследовано влияние анизотропии слоя на предельно-допустимый дебит водозабора.

1. Важнейшая роль пресной воды в жизни человечества определила необходимость исследований фильтрационных течений в сложных слоях грунта. Важной характеристикой водозабора, эксплуатируемого вблизи очагов загрязнения, является его предельно допустимый дебит.

2. Рассмотрим плоскопараллельную линейную фильтрацию в анизотропном слое грунта с горизонтальной подошвой. Пусть прямолинейная сеть главных направлений анизотропии грунта p, q является изотермической, коэффициенты проницаемости грунта k_p и k_q вдоль главных направлений анизотропии постоянны. Следуя [1], течение в комплексной плоскости $\zeta = p + iq$ опишем потенциалом Φ и функцией тока Ψ, удовлетворяющими системе уравнений:

$$\upsilon_p = k_p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Psi}{\partial q}, \qquad \upsilon_q = k_q \frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}, \tag{1}$$

где υ_p и υ_q — проекции скорости фильтрации на главные направления анизотропии грунта. Характерным коэффициентом проницаемости грунта выбран коэффициент проницаемости $K_0 = \sqrt{k_p k_q}$, характерной единицей длины выбрано расстояние L_0, характерной скоростью течения — V_0.

Фильтрационное течение обусловлено работой водозабора в условиях поступательного потока грунтовых вод и наличием источника загрязнения. Водозабор и источник загрязнения моделируем точечными эксплуатационной и нагнетательной скважинами, расположенными в точках $\zeta_с = l$ и $\zeta_и = -l$ и имеющими мощности $q_с$ и $q_и$. Поступательный поток грунтовых вод имеет скорость u, которая направлена против оси Op. Полагая, что загрязнённая жидкость имеет те же физические свойства, что и чистая, примем модель "разноцветных" жидкостей. Следуя [1], перейдём от плоскости ζ к вспомогательной комплексной плоскости $z = x + iy$ по формулам:

$$x = p\sqrt{k_q / k_p}, \qquad y = q. \tag{2}$$

Процесс в плоскости ζ определяется особыми точками плоскости z. Согласно формулам (2) переход от плоскости ζ к плоскости z представляет

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

собой её деформацию вдоль оси абсцисс. Следуя [1], на плоскости z течение в неограниченной области D опишем комплексным потенциалом $W = \varphi + i\psi$ (φ и ψ — потенциал и функция тока) вида

$$W(z) = -uz - \frac{q_c}{2\pi} ln(z-\ell) + \frac{q_и}{2\pi} ln(z+\ell),$$

где ℓ – расстояние в плоскости z от точки забоя скважины до начала координат. Тогда, учитывая формулы (2), имеем функции

$$\begin{gathered}\Phi = -up\sqrt{\frac{k_q}{k_p}} - \frac{q_с}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{k_q}{k_p}(p-l)^2+q^2} + \frac{q_и}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{k_q}{k_p}(p+l)^2+q^2}\ , \\ \Psi = \sqrt{k_q k_p}\left(-uq - \frac{q_с}{2\pi} arctg\frac{q}{\sqrt{k_q/k_p}(p-l)} + \frac{q_и}{2\pi} arctg\frac{q}{\sqrt{k_q/k_p}(p+l)}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

удовлетворяющее уравнениям (1) и описывающее работу водозабора в однородном анизотропном слое грунта в условиях поступательного потока и нагнетательной скважины.

3. При работе водозабора в слое с источником загрязнения важно указать такой его максимально возможный (предельно допустимый) дебит, при котором загрязнение в водозабор не попадает. В случае загрязнения водозабора можно оценить степень загрязнения вод в водозаборе [1, 2]. Интерес представляет также шлейф загрязнения, распространяющийся от источника загрязнения.

В случае изотропного грунта подобные задачи исследованы в работе [2]. Тогда учитывая формулы (2), для анизотропного грунта заключаем, что водозабор может работать без загрязнения, если мощность источника загрязнения удовлетворяет неравенству:

$$q_и < 4\pi ul\sqrt{k_q/k_p}\ . \tag{4}$$

Как было показано в [2], при работе водозабора без загрязнения с максимально возможным дебитом в области течения имеется единственная точка, в которой скорость фильтрации равна нулю (критическая точка). Для течения, описываемого функциями (3) в силу (1) критическая точка будет единственной, если мощность водозабора определяется по формуле:

$$q_c^* = 4\pi ul\left(\sqrt[4]{k_q/k_p} - \sqrt{\frac{q_и}{4\pi ul}}\right)^2. \tag{5}$$

При этом критическая точка расположена на оси абсцисс и

$$p_* = 2l\left(\sqrt{\frac{q_и}{4\pi ul\sqrt{k_q/k_p}}} - \frac{1}{2}\right).$$

Конкретизируем характерные единицы: L_0 — расстояние между источником и стоком ($2l = 1$), V_0 — скорость поступательного потока ($u = 1$). На рис. 1 – 4 представлены характерные линии тока, область захвата водозабора, шлейф загрязнения в случае работы водозабора с дебитом $q_с^*$ для некоторых значений $q_и$, k_p, k_q.

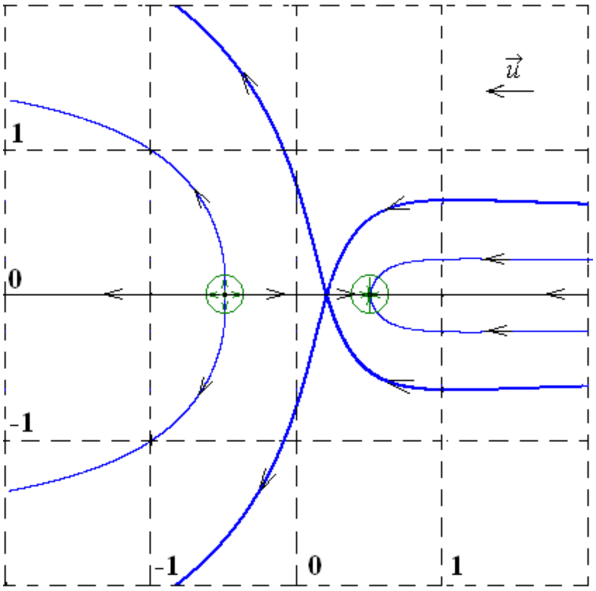


Рис. 1. $q_и = 2\pi$, $k_p = 0.5$, $k_q = 2$,
$q_c^* = 2\pi(\sqrt{2} - 1)^2$

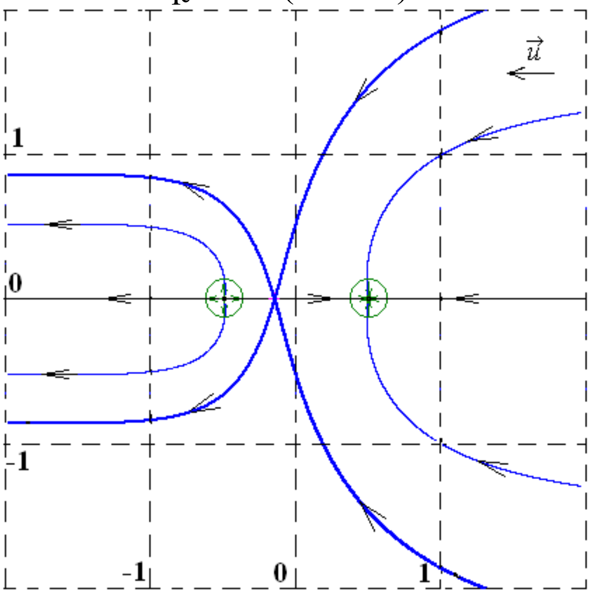


Рис. 2. $q_и = \pi/2$, $k_p = 0.5$, $k_q = 2$,
$q_c^* = 2\pi(\sqrt{2} - 0{,}5)^2$

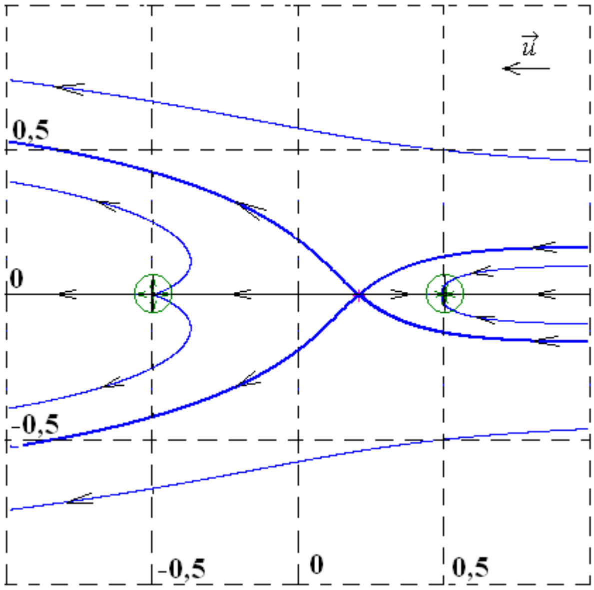


Рис. 3. $q_и = \pi/2$, $k_p = 2$, $k_q = 0.5$,
$q_c^* = \pi(\sqrt{2} - 1)^2/2$

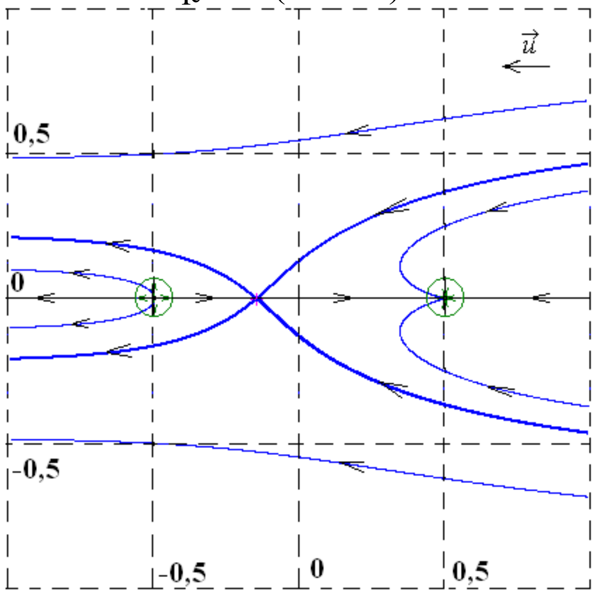


Рис. 4. $q_и = \pi/8$, $k_p = 2$, $k_q = 0.5$,
$q_c^* = \pi(2\sqrt{2} - 1)^2/8$

Формула (5) позволяет выяснить влияние анизотропии грунта на предельно допустимый дебит водозабора. Видно, что с увеличением коэффициента проницаемости k_p значение q_c^* уменьшается, а с ростом k_q — увеличивается. Указанные изменения предельно допустимого дебита водозабора объясняются изменением очага загрязнения.

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: «Высшая школа», 1972. 368 с.
2. Квасов А.А. Плоскопараллельная задача о работе водозабора в поступательном потоке с источником загрязнения // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», 2007. С. 58-61.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНО-ОДНОРОДНОМ СЛОЕ ГРУНТА

Е.В. Мозгова

Россия, Орловский государственный университет

Исследуется дебит скважины работающей в анизотропно-однородном слое грунта. Указана зависимость мощности скважины от формы контура питания и исследовано влияние анизотропии на эту зависимость.

Стационарные течения в анизатропно–однородных слоях описываются потенциалом скорости φ и функцией тока ψ, которые удовлетворяют обобщенному закону Дарси и уравнению неразрывности, записанным в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \upsilon_y &= k_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы система уравнений была эллиптична, коэффициенты k_{ij}, $i, j = 1{,}2$ должны удовлетворяют условиям [1]:

$$k_{11} > 0\,,\; D(K_s) = k_{11}k_{22} - \left(\frac{k_{12}+k_{21}}{2}\right)^2 > 0\,,$$

где $D(K_s) \equiv \left|\dfrac{k_{ij}+k_{ji}}{2}\right|$ - определитель симметричной части $K_s = \left(\dfrac{k_{ij}+k_{ji}}{2}\right)$ тензора проницаемости.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

С помощью неособых преобразований координат вида [1]:

$$\xi = \xi(x,y)\,,\; \eta = \eta(x,y)\; \left(J = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} \neq 0\right),$$

система уравнений (4) принимает канонический вид

$$\begin{aligned} \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(K_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \\ -\sqrt{D(K_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $D(K_a) \equiv \left|\dfrac{k_{ij}-k_{ji}}{2}\right| = \left(\dfrac{k_{12}-k_{21}}{2}\right)^2$ - определитель антисимметричной части $K_a = \left(\dfrac{k_{ij}-k_{ji}}{2}\right)$ тензора проницаемости $K = (k_{ij})$.

Решается задача на вспомогательной плоскости $O\xi\eta$, а затем с помощью неособых обратных преобразований совершается переход на физическую плоскость Oxy.

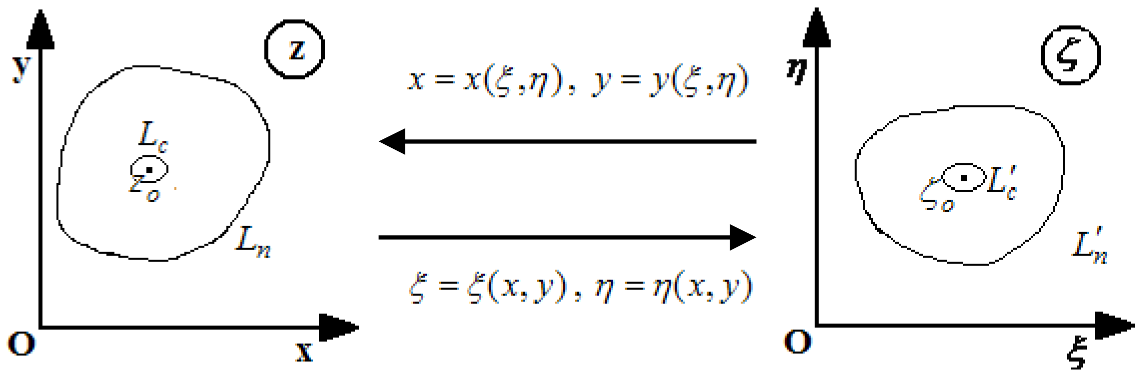


Рис. 1. Постановка задачи о дебите скважины

Постановка задачи. Пусть в толще анизотропного грунта работает водозаборная совершенная скважина, контур которой – эллипс с полуосями A_c и B_c, контур питания скважины имеет также эллиптический вид и полуоси его A_n и B_n. На границе скважины и на контуре питания задается постоянным давление жидкости (потенциал). Необходимо отыскать и исследовать дебит водозабора.

Решение задачи. Выберем координатные оси Oxy таким образом, чтобы центр скважины совпадал с началом координат.

Данную задачу можно решить на вспомогательной плоскости, где контуром питания будет являться окружность, а затем перейти на физическую плоскость. Преобразования от плоскости Oxy к плоскости $O\xi\eta$ и обратно будут иметь вид [1]:

Физическая плоскость Вспомогательная плоскость

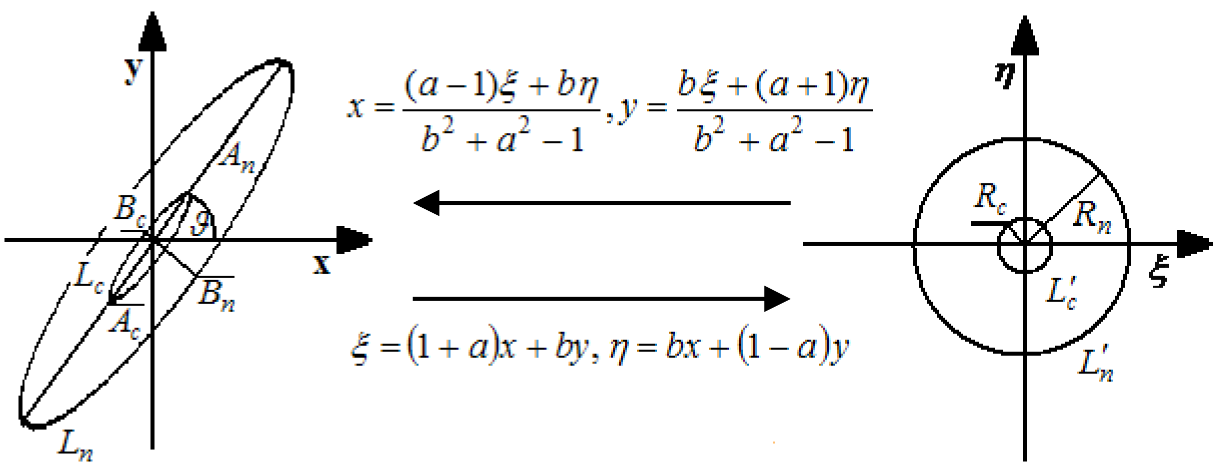


Рис. 2. Решение задачи

здесь $a=\dfrac{k_{22}-k_{11}}{k_{22}+k_{11}+2\sqrt{D(k_s)}}$, $b=-\dfrac{k_{12}+k_{21}}{k_{22}+k_{11}+2\sqrt{D(k_s)}}$.

Граничные условия на физической плоскости будут иметь вид:

$$\varphi(x,y)=\varphi_n,\ (x,y)\in L_n;$$

$$\varphi(x,y)=\varphi_c,\ (x,y)\in L_c,$$

соответственно на вспомогательной плоскости

$$\varphi(\xi,\eta)=\varphi'_n,\ (\xi,\eta)\in L'_n;$$

$$\varphi(\xi,\eta)=\varphi'_c,\ (\xi,\eta)\in L'_c.$$

Комплексный потенциал на вспомогательной плоскости будет иметь вид [1]:

$$W(\zeta)=\varphi(\zeta)+i\frac{\psi(\zeta)}{P},\quad \left(P=\left[\sqrt{D(K_s)}-i\sqrt{D(K_a)}\right]\right).$$

Для эксплуатационной совершенной скважины, находящейся в начале координат, комплексный потенциал будет иметь вид [2]:

$$W(\zeta)=-\frac{q}{2\pi P}\ln\zeta,\ \zeta=\xi+i\eta.$$

Выделяя из $W(\zeta)$ $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, получим

$$\varphi(\xi,\eta)=-\frac{q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}}\ln r,\ \psi(\xi,\eta)=-\frac{q}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{D(K_a)}}{D(K_s)}\ln r+\theta\right),$$

где $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\theta=arctg\dfrac{\eta}{\xi}$.

Учитывая, что потенциал скорости определен до некоторой произвольной постоянной C и удовлетворяя граничным условиям, получим

$$\varphi'_n=-\frac{q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}}\ln R_n+C,$$

$$\varphi'_c=-\frac{q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}}\ln R_c+C.$$

Вычитая из первого равенства второе и выражая q, получим дебит скважины на вспомогательной плоскости.

$$q=\frac{2\pi\sqrt{D(K_s)}(\varphi'_n-\varphi'_c)}{\ln\dfrac{R_n}{R_c}}. \qquad (4)$$

Если грунт изотропный $\left(\sqrt{D(K_s)}=1,\sqrt{D(K_a)}=0\right)$, то формула (4) представляет собой формулу Дюпюи [3].

На вспомогательной плоскости контур питания выразим формулой:

$$\xi^2+\eta^2=R_n^2.$$

Воспользовавшись прямыми преобразованиями, получим формулу для контура питания на физической плоскости:

$$\left(b^2 + (1+a)^2\right)x^2 + \left(b^2 + (1-a)^2\right)y^2 + 4bxy = R_n^2$$

Таким образом, видим, что на физической плоскости мы будем иметь эллипс, полуоси которого в общем случае не совпадают с осями координат. Найдем угол ϑ между координатной осью Ox и большой полуосью эллипса. Для этого воспользуемся преобразованиями поворота вида [4]:

$$\begin{matrix} x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = x'\cos\vartheta + y'\sin\vartheta \\ y = x'\sin\vartheta - y'\cos\vartheta \end{matrix},$$

получаем,

$$\left(b^2 + a^2 + 1 + 2a\cos 2\vartheta + 2b\sin 2\vartheta\right)x'^2 + \left(b^2 + a^2 + 1 - 2a\cos 2\vartheta - 2b\sin 2\vartheta\right)y'^2 +$$
$$+ 4\left(a\cos 2\vartheta + b\sin 2\vartheta\right)x'y' = R_n^2.$$

Так как в штрихованных координатах формула эллипса будет иметь канонический вид, то выражение перед произведением $x'y'$ следует приравнять нулю, получим угол ϑ.

$$\vartheta = \frac{arctg\left(-\frac{b}{a}\right)}{2}. \quad (5)$$

Тогда полуоси эллипса будут иметь вид:

$$A_n^2 = \frac{R_n^2}{b^2 + a^2 + 1 + 2a\cos 2\vartheta + 2b\sin 2\vartheta},$$
$$B_n^2 = \frac{R_n^2}{b^2 + a^2 + 1 - 2a\cos 2\vartheta - 2b\sin 2\vartheta}, \quad (6)$$

откуда

$$R_n = \sqrt{\frac{A_n^2 + B_n^2}{2}\left(b^2 + a^2 + 1\right) + \left(A_n^2 - B_n^2\right)\left(a\cos 2\vartheta + b\cos 2\vartheta\right)}. \quad (7)$$

Периметр контура эллиптической скважины выражается формулой [4]:

$$L_c = \pi\left(A_c + B_c\right)\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \ldots\right),$$

где $\lambda = \frac{A_c - B_c}{A_c + B_c}$, $\lambda < 1$.

Периметр контура круглой скважины на вспомогательной плоскости $L_c' = 2\pi R_c$. Приравнивая L_c и L_c' и учитывая, что A_c и B_c малы, получим

$$R_c = \frac{A_c + B_c}{2}. \quad (8)$$

Подставляя (9) и (10) в (6), получим дебит скважины с эллиптическим контуром питания в анизотропном пласте грунта.

$$q = \frac{2\pi\sqrt{D(K_s)}(\varphi_n - \varphi_c)}{\ln\dfrac{2R_n}{A_c + B_c}}. \tag{9}$$

С помощью этой формулы вычислим отношения дебита скважины с эллиптическим контуром питания в анизотропном пласте грунта к дебиту q_o скважины с круговой областью питания в изотропном грунте [3].

$$q_o = \frac{2\pi(\varphi_n - \varphi_c)}{\ln\dfrac{r_n}{r_c}}. \tag{10}$$

Для сравнения с уже известными результатами, аналогично как в книге [5] возьмем сначала эллипсы равновеликие кругу, то есть $r_n^2 = A_n B_n$, $r_c = R_n$. Положив $A_n = \alpha B_n$, получим кривые: 2, 5, 6, 9, 10 на рис. 3 и 2, 4, 6 на рис. 4.

Если сохранять постоянной малую полуось $r_n = B_n$ и положив $A_n = \alpha r_n$, получим кривые: 1, 3, 4, 7, 8 на рис. 3 и 1, 3, 5 на рис. 4.

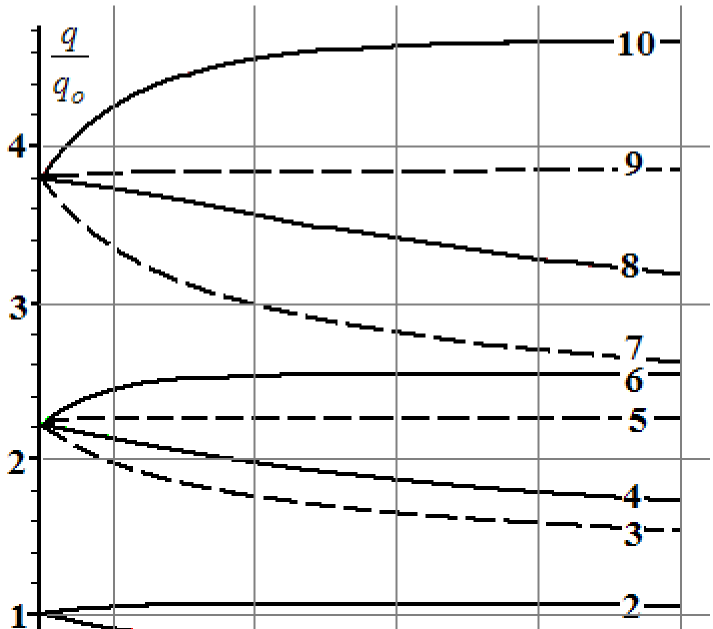


Рис. 3. Зависимость $\dfrac{q}{q_o}$ от формы контура питания

Рис. 3 был построен для симметричной матрицы тензора проницаемости, то есть $K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix}$. Кривые 1 и 2 построены для коэффициентов $\dfrac{k_{11}}{k_{22}} = 1$, то есть для изотропного случая, кривые 3 и 5 построены для коэффициентов $\frac{k_{11}}{k_{22}} = \frac{1}{5}$, кривые 4 и 6 для $\frac{k_{11}}{k_{22}} = 5$, кривые 7 и 9 для $\frac{k_{11}}{k_{22}} = \frac{1}{10}$, кривые 8 и 10 для $\frac{k_{11}}{k_{22}} = 10$. Дебит возрастает с увеличением вытянутости эллипса при сохранении его площади, причем с увеличением отношения коэффициентов k_{11} и k_{22} величина мощности увеличиваются. Так для $\alpha = 1$ и $\frac{k_{11}}{k_{22}} = 5$ дебит увеличивается на 120 %, а для $\alpha = 1$ и $\frac{k_{11}}{k_{22}} = 10$ на 280 %. Если сохранять постоянной малую полуось, то при вытягивании контура питания дебит скважины уменьшается. С уменьшением отношения $\frac{k_{11}}{k_{22}}$ зависимость имеет обратный характер.

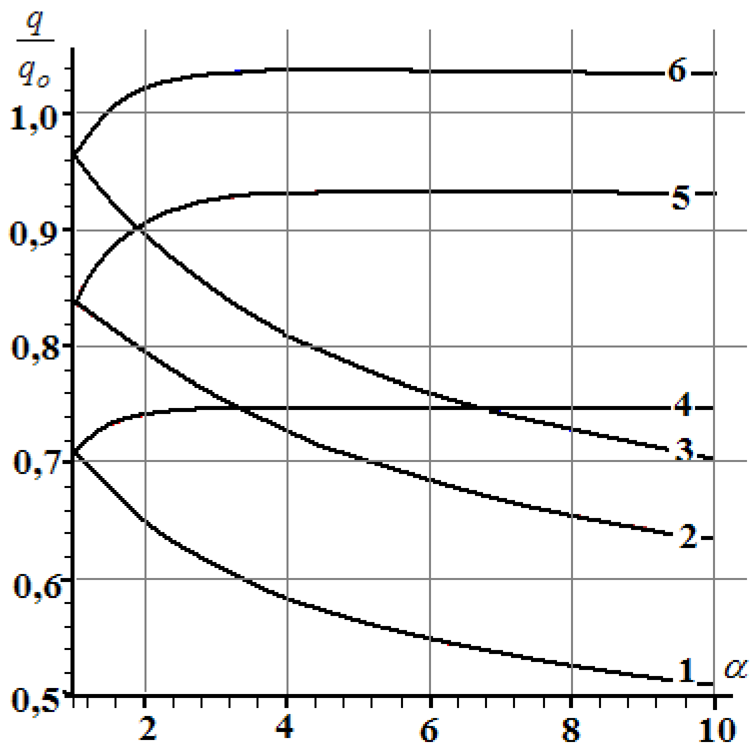


Рис. 4. Зависимость $\frac{q}{q_o}$ от формы контура

Рис. 4 был построен для тензора проницаемости следующего вида $K = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} \\ k_{21} & 1 \end{pmatrix}$. Кривые 1 и 4 построены для отношения коэффициентов $\frac{k_{12}}{k_{21}} = 1$, кривые 3 и 6 построены для коэффициентов $\frac{k_{12}}{k_{21}} = \frac{1}{10}$, кривые 2 и 5 для $\frac{k_{12}}{k_{21}} = \frac{1}{5}$. Таким образом, дебит возрастает с увеличением вытянутости эллипса при сохранении его площади, причем с увеличением отношения коэффициентов k_{12} и k_{21} величина мощность уменьшается. Если сохранять постоянной малую полуось, то при вытягивании контура питания дебит скважины уменьшается. Например, в анизотропном грунте с тензором $K = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} \\ k_{21} & 1 \end{pmatrix}$ дебит совершенной скважины будет меньше чем в анизотропном грунте, для коэффициентов $\frac{k_{12}}{k_{21}} = \frac{1}{5}$ дебит уменьшается в среднем на 2 %, а для $\frac{k_{12}}{k_{21}} = \frac{1}{10}$ на 14 %.

Таким образом, при увеличении отношения коэффициентов k_{11} и k_{22} тензора проницаемости дебит возрастает, а при увеличении отношения коэффициентов k_{12} и k_{21} уменьшается.

Литература

1. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума “МДОЗМФ”. Харьков-Херсон, 2007. С. 239-243.
2. Пивень В.Ф. Фундаментальные решения уравнений двумерной фильтрации в анизотропном слое пористой среды // См. настоящий сборник трудов.
3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
4. Математическая энциклопедия. Под редакцией Гуревич В.Н. М.: Советская энциклопедия, 1984. 795 с.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. 1-е изд. М.: Наука, 1969. 648 с.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ВОДОЗАБОРА ВБЛИЗИ ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ПРЯМОЙ

Д.Н. Никольский[1], Ю.В. Деткова
Россия, Орловский государственный университет

Исследована работа водозабора, питающегося потоком чистой грунтовой жидкости и расположенного вблизи источника загрязнения на непроницаемой границе области фильтрации. Непроницаемая граница моделируется прямой. Исследование проведено в рамках модели «разноцветных» жидкостей.

1. Рассмотрим работу водозабора, питающегося поступательным потоком чистой жидкости со скоростью u, в области фильтрации D, ограниченной непроницаемой прямой L с источником загрязнения. Выберем декартову систему координат ХОУ. Работу водозабора моделируем стоком, потенциал и функция тока которого имеет вид [1]:

$$\begin{gathered}\varphi_s = \frac{-q_s}{2\pi}\ln r_{M_s M} - \frac{q_s}{2\pi}\ln r_{\widetilde{M}_s M}, \\ \psi_s = \frac{-q_s}{2\pi} arctg\frac{y_M - y_s}{x_M - x_s} - \frac{q_s}{2\pi} arctg\frac{y_M + y_s}{x_M - x_s}, \\ r_{M_s M} = \sqrt{(x_M - x_s)^2 + (y_M - y_s)^2}, \\ r_{\widetilde{M}_s M} = \sqrt{(x_M - x_s)^2 + (y_M + y_s)^2} \quad q_s > 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где q_s – дебит водозабора, $M_s \equiv (x_s, y_s)$ – центр водозабора, $\widetilde{M}_s \equiv (x_s, -y_s)$ – точка инверсная точке M_s, $M \equiv (x_M, y_M)$ – точка наблюдения. Контур водозабора L_s представляет собой окружность радиуса r_s с центром в точке M_s.

Потенциал и функция тока поступательного потока, движущегося со скоростью u вдоль ости Ох [1]

$$\varphi_p = ux_M, \quad \psi_p = uy_M. \tag{2}$$

Потенциал и функция тока источника загрязнения, расположенного на прямой $y = 0$ имеет вид [2]:

$$\begin{gathered}\varphi_1 = \frac{q_1}{\pi}\ln r_{M_1 M}, \quad \psi_1 = \frac{q_1}{\pi} arctg\frac{y_M}{x_M - x_1}, \\ r_{M_1 M} = \sqrt{(x_M - x_1)^2 + y_M^2}, \quad q_1 > 0\end{gathered} \tag{3}$$

где q_1 – дебит источника загрязнения, $M_1 = (x_1, 0)$ – точка расположения источника загрязнения.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303), Президента РФ (проект МК-491.2008.1) и Федерального агентства по образованию.

Согласно принципу суперпозиции, результирующее течение описывается потенциалом и функцией тока

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_p + \varphi_1 , \quad \psi = \psi_s + \psi_p + \psi_1 \tag{4}$$

или полем скоростей

$$\vec{v} = -\frac{q_s}{2\pi}\frac{\vec{r}_{M_s M}}{r^2_{M_s M}} - \frac{q_s}{2\pi}\frac{\vec{r}_{\tilde{M}_s M}}{r^2_{\tilde{M}_s M}} + \frac{q_1}{\pi}\frac{\vec{r}_{M_1 M}}{r^2_{M_1 M}} + ux_M . \tag{5}$$

2. Пусть координаты водозабора (x_s, y_s), координаты источника загрязнения x_1, дебит источника q_1 и скорость поступательного потока u фиксированы. Считаем что $x_s < x_1$. Если дебит водозабора $q_s \le q_*$, то загрязнение от источника не попадает в водозабор и распространяется от него по потоку.

С практической точки зрения интерес представляют область захвата водозабора D_V и область загрязнения D_Z. Определение области захвата водозабора D_V сводится к построению нейтральной линии L_N. Алгоритм построения этой линии, при известном аналитическом выражении для функции тока ψ в следующем: необходимо найти критическую точку M_*, в которой выполняется условие

$$v(M_*) = 0 \tag{6}$$

и построить линию тока, проходящую через эту точку

$$\psi(M) = \psi(M_*). \tag{7}$$

Определение области загрязнения D_Z сводится к построению линии загрязнения L_Z. Эту линию найдем вычислив точку на оси Ох, в которой выполняется условие

$$v_x(M_Z) = 0, \tag{8}$$

и построив линию тока

$$\psi(M) = \psi(M_Z). \tag{9}$$

Если дебит водозабора $q_s > q_*$, то загрязнение от источника попадет в водозабор. В этом случае необходимо вычислить время достижения границей загрязнения Γ_t контура водозабора L_s и ее положение в различные моменты времени t.

Считаем загрязненную и чистую жидкость имеющими одинаковые физические и химические свойства. Тогда эволюция границы загрязнения Γ_t описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v} \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \quad \vec{r}_M = (x_M, y_M). \tag{10}$$

Уравнение (10) решается при заданном начальном условии

$$x_M = x_1 + r_1 \cos(\Theta), \qquad y_M = r_1 \sin(\Theta), \qquad \Theta \in [0, 2\pi). \tag{11}$$

3. Выберем характерное расстояние L_0 – расстояние от водозабора до непроницаемой линии L, характерную скорость V_0 – скорость поступатель-

ного потока чистой жидкости, характерный дебит Q_0 – дебит источника загрязнения q, характерное время $T_0 = \dfrac{\pi L_0{}^2}{Q_0}$. Источник загрязнения расположим в точке $M_1 = (1{,}0)$, водозабор – $M_s = (0{,}1)$.

В ходе численных экспериментов был найден критический дебит $q_* = 0{,}185$. Поле скоростей для случая $q_s = q_*$ построено на рис. 1. Видим, что нейтральная линия L_N и граница области загрязнения L_Z имеют общую часть.

Для построения последовательных положений границы загрязнения Γ_t используем схему Эйлера [3]

$$\frac{\Delta \vec{r}_m^{\,j}}{\Delta t} = \vec{v}_m^{\,j},$$

$$\Delta \vec{r}_m^{\,j} = \vec{r}_m^{\,j+1} - \vec{r}_m^{\,j}, \ \vec{v}_m^{\,j} = \vec{v}\left(\vec{r}_m^{\,j+1}\right), \ \Delta t - \text{задано}.$$

Положение границы загрязнения Γ_t в моменты времени $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ построены на рис. 2. Анализируя этот рисунок, видим, что загрязнение подходит близко к водозабору, но прорыва загрязнения в водозабор не происходит.

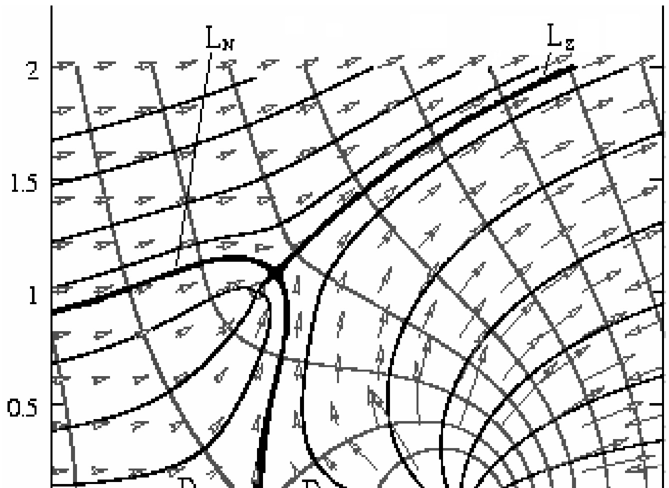


Рис. 1. Поле скоростей при $q_s = q_*$

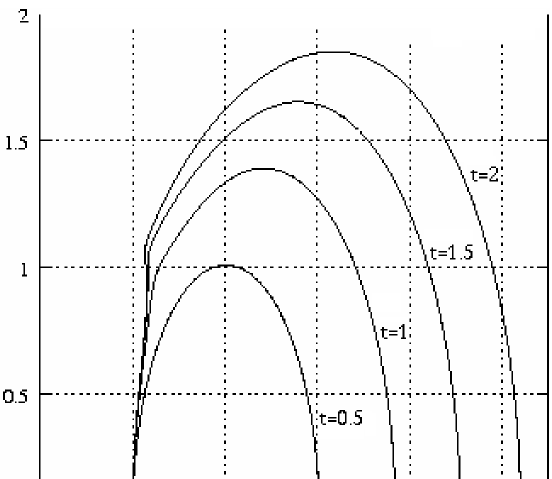


Рис. 2. Эволюция границы загрязнения Γ_t при $q_s = q_*$

На рис. 3. построено поле роле скоростей для случая $q_s = 1/2q_*$. Видим, что в этом случае нейтральная линия L_N и граница области загрязнения L_Z не пересекаются, и между ними наблюдается течение чистой жидкости. Положение границы загрязнения Γ_t в моменты времени $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ построены на рис. 4. Анализируя этот рисунок видим, что загрязнение распространяется по потоку.

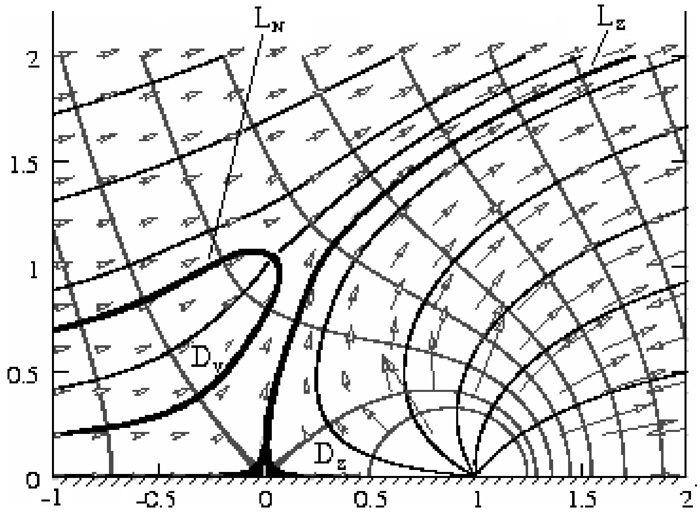


Рис. 3. Поле скоростей при $q_s = 1/2q_*$

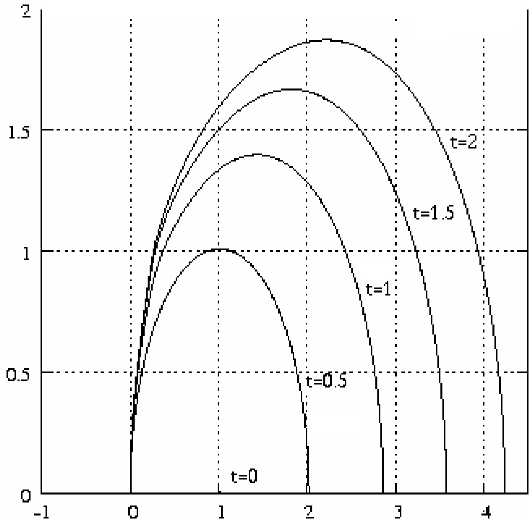


Рис. 4. Эволюция границы загрязнения Γ_t при $q_s = 1/2q_*$

На рис. 5. построено поле роле скоростей для случая $q_s = 2q_*$. Видим, что в этом случае граница области загрязнения L_Z попадает в область захвата водозабора. Положение границы загрязнения Γ_t в моменты времени $t = 0, 1/4T, 1/2T, 3/4T, T$ построены на рис. 6. Анализируя этот рисунок видим, что загрязнение попадает в водозабор. Время достижения загрязнением водозабора $T = 1$.

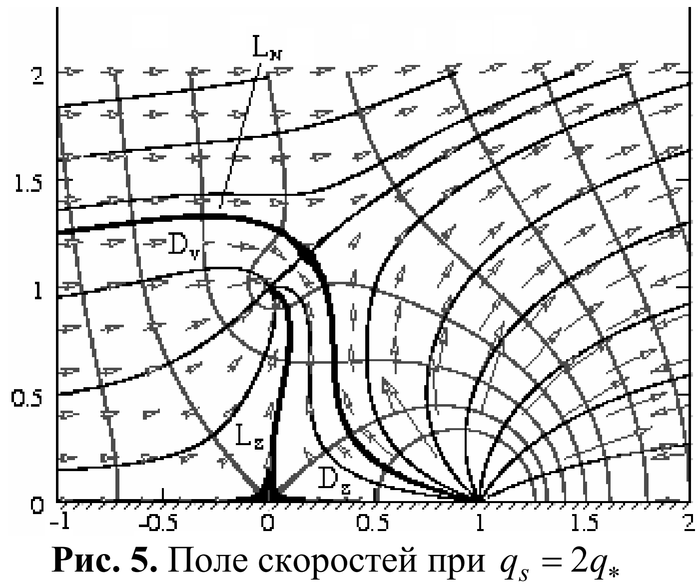


Рис. 5. Поле скоростей при $q_s = 2q_*$

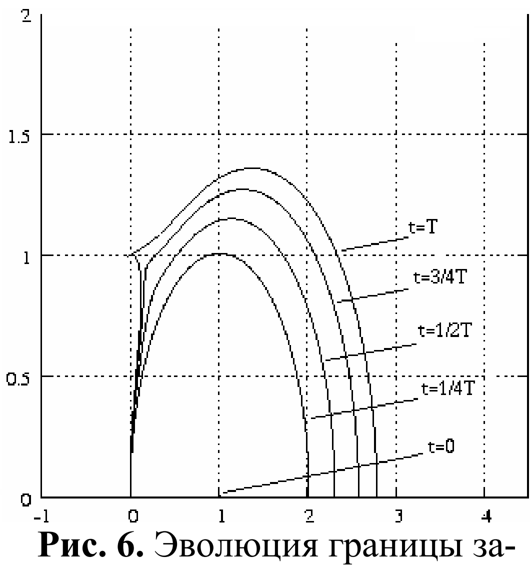


Рис. 6. Эволюция границы загрязнения Γ_t при $q_s = 2q_*$

Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
2. Никольский Д.Н. Фильтрационное течение от источника на окружности или прямой. // Труды межд. Школ-семинаров «МДОЗМФ», Выпуск 5. Орел, 2007. С. 75-78.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. – 286 с.

УДК 519.634

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ПОСТАНОВКЕ ЛЕЙБЕНЗОНА

Д.Н. Никольский[1], В.И. Дорофеева
Россия, Орловский государственный университет

В работе проводится исследование дискретных схем задачи об эволюции границы раздела жидкостей в постановке Лейбензона, построенных методом дискретных особенностей. Предлагается устойчивая дискретная схема, полученная путем сглаживания ядра сингулярного интегрального оператора.

1. Основная система уравнений. В работе [1] показано, что вытеснение жидкости газом в постановке Лейбензона описывается системой интегрального и дифференциального уравнений

$$g(M,t)-2\int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\Omega(M,N)\,dl_N = 2\varphi_0(M,t), \qquad M\in\Gamma_t\,, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec r_M}{dt}=\vec v_0+\int\limits_{\Gamma_t}\frac{\partial g(N,t)}{\partial l_N}\vec V_2(M,N)\,dl_N\,, \qquad M\in\Gamma_t\,, \quad (2)$$

$$\vec r_0=\vec r_0(\theta) \qquad \text{при} \quad t=0. \quad (3)$$

Здесь $\Omega=(\nabla_N\Phi_1(M,N),\vec n_N)$, $\Phi_1=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{NM}}$ - потенциал нормированного стока, φ_0- потенциал невозмущенного течения, $\vec V_2=\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial y_M}\vec i-\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x_M}\vec j$- скорость нормированного вихря, Ψ_2 - его функция тока, Γ_t - подвижная граница раздела жидкости и газа, $\vec r_M$ - радиус-вектор, t - время, g - плотность потенциала двойного слоя, $\vec v_0=\nabla\varphi_0$ - скорость невозмущенного течения, θ – параметр.

Интегральное уравнение (1) соответствует случаю, когда сток расположен внутри области, ограниченной границей Γ_t.

В каждый момент времени t_j представим границу Γ_{t_j} множеством точек $\left\{\vec r_m^{\,j}\,\middle|\; m=\overline{0,n-1}\right\}$. Из (1) и (2) имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и разностный аналог дифференциального уравнения движения границы:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303), Президента РФ (проект МК-491.2008.1) и Федерального агентства по образованию.

$$g_m^j - 2\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n-1} g_k^j \Omega_{mk}^j \Delta l_k^j = 2\varphi_{0m}^j, \qquad \mathrm{m} = \overline{0, \mathrm{n}-1}, \tag{4}$$

$$\frac{\Delta \vec{r}_m}{\Delta t} = \vec{v}_{0m} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n-1} \vec{V}_{2mk} \frac{g_{k+1} - g_{k-1}}{2}, \tag{5}$$

$$m = \overline{0, n-1}, \qquad g_{-1} = g_{n-1}, \qquad g_n = g_0.$$

2. Исследование на первом шаге. Выберем границу Γ_0 в виде окружности радиуса R. Ее параметрическое представление

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta, \qquad \theta = (2\pi, 0]. \tag{6}$$

Потенциал невозмущенного течения $\varphi_0(M,t)$ моделируем стоком, расположенным в точке $M_1(x_1, y_1)$

$$\varphi_0 = \frac{q}{2\pi} \ln r_{M_1 M},$$

где q- мощность стока (соответствует стоку при q<0).

В этом случае для задачи (1)-(3) на первом шаге по времени можно аналитически вычислить скорость перемещения границы раздела Γ_t. Применяя метод изображений [2] к внутренней (для стока в M_1) и к внешней (для источника в бесконечно удаленной точке) областям окружности, имеем точные формулы смещения границы Γ_0 [3]:

$$\vec{v}_a = \nabla\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = \frac{q}{2\pi}\left[\frac{3}{2}\frac{\vec{r}_{M_1 M}}{r_{M_1 M}^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{r}_M}{r_M^2} + \frac{\vec{r}_{\tilde{M}_1 M}}{r_{\tilde{M}_1 M}^2}\right)\right], \qquad M \in \Gamma_0. \tag{7}$$

Выберем характерное расстояние L_0 радиус окружности. Сток расположим в точке (0.5;0). Вычислим скорость смещения границы в момент времени t=0 численно по схеме (4)-(5) и по точной формуле (7). В таблице 1 представлена зависимость ошибки $\eta = \max\limits_{M\in\Gamma_0}\left|1 - \dfrac{v}{v_a}\right| \cdot 100\%$ численных расчетов скорости смещения Γ_0 в момент времени t=0. Кроме того, в таблице содержатся значения числа обусловленности μ матрицы получаемой СЛАУ, которые показывают стабильность проводимых вычислений.

Табл. 1. Сопоставление результатов численного счета с аналитическим решением на первом шаге по времени

N	50	100	200	400	800	1600	3200
η	2.4790	1.1311	0.5341	0.2586	0.1271	0.0630	0.0313
μ	2.0176	2.0094	2.0048	2.0025	2.0013	2.0006	1.9987

3. Исследование эволюции границы. Численно исследуем эволюцию границы Γ_t путем решения системы (4)-(5). Выберем за характерное время $T_0 = \pi L_0^2 \big/ q$ – время достижения подвижной границей стока в случае модели «разноцветных» жидкостей.

В таблице 2 приведена зависимость времени достижения контура скважины T и числа обусловленности μ от числа n точек разбиения подвижной границы Γ_t. Для оценки практической сходимости также приведена величина $\eta = \left|1 - \dfrac{T}{T_p}\right| \cdot 100\%$, где T - время из текущего столбца, T_p - время из предыдущего столбца.

Табл. 2. Зависимость времени T и числа обусловленности μ от величины n

n	100	200	400	500	600
T	0.584	0.556	0.54	0.532	0.528
η	-	4.7945	2.8777	1.4815	0.75
μ	3.4551	4.0558	4.9195	45.064	2685.2

Анализируя таблицу 2, замечаем, что наряду с улучшением результата по времени и наличием практической сходимости, очевидны существенные изменения числа обусловленности μ. При увеличении n наблюдается его стремительный рост, что говорит о нестабильности процесса вычисления и ненадежности решения.

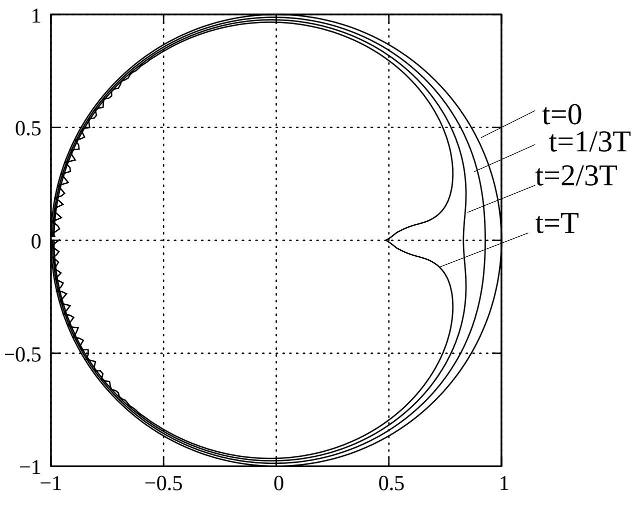


Рис.1. Эволюция границы Γ_t для n=400 без сглаживания ядра

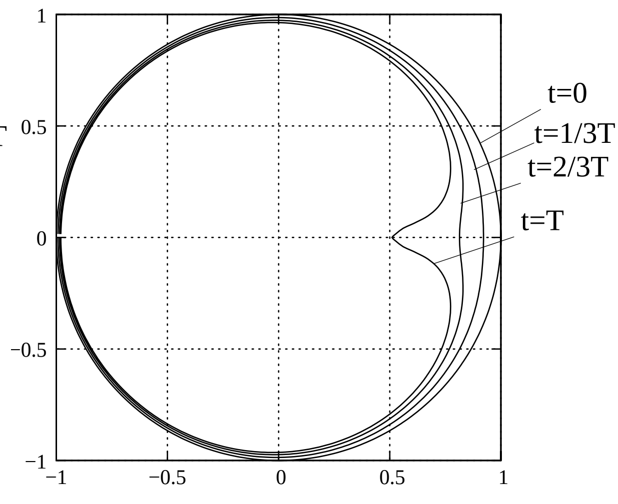


Рис.2. Эволюция границы Γ_t для n=400 со сглаживанием ядра

Для демонстрации нестабильности процесса вычисления на рисунке 1 построены последовательные положения границы раздела Γ_t в моменты времени t=0, $T/3$, $2T/3$, T. На этом рисунке можно заметить нефизическое разрушение границы и появление на ней «пилообразного» участка.

4. Регуляризация дискретной схемы. Для повышения стабильности процесса вычисления, воспользуемся методом сглаживания ядра сингулярного интеграла, примененным в [4] для решения задачи о чехарде вихревых колец и в [5] для вычисления скорости вблизи непроницаемой стенки. Теоретическое обоснование этого метода изложено в [6].

Для этого сингулярное ядро $\vec{V}_2$ в интеграле из (2) заменим векторной функцией $\vec{V}_{2\varepsilon}$:

$$\vec{V}_{2\varepsilon} = \begin{cases} \theta_\varepsilon\left(|\vec{r}|\right)\vec{V}_2 & \text{при } r \le \varepsilon, \\ \vec{V}_2 & \text{при } r > \varepsilon, \end{cases} \tag{8}$$

где $\theta_\varepsilon\left(|\vec{r}|\right) = \frac{1}{8}\left[63\cdot\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^5 - 90\cdot\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^7 + 35\cdot\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^9\right]$.

Проведенные вычисления для различных значений параметров ε и n представлены в таблице 3 при dt=0.004.

Табл. 3. Зависимость времени T и числа μ от величин ε и n при dt=0.004

n	100	200	400	600
T	0.612	0.604	0.6	0.6
μ, ε=0.1	3.3952	3.8474	4.0539	2.0759
T	0.584	0.572	0.564	0.56
μ, ε=0.05	3.4614	2.0470	4.4630	2.0073
T	0.584	0.568	0.556	0.556
μ, ε=0.04	3.4551	4.0118	4.2325	5.3759
T	0.584	0.56	0.564	0.564
μ, ε=0.03	3.4551	4.0591	456.42	58.715
T	0.584	0.556	0.544	-
μ, ε=0.02	3.4551	4.0558	4.6712	$4.24\cdot10^4$

Можно заметить, что при уменьшении величины ε устойчивость результатов и стабильное поведение числа обусловленности μ наблюдается при приближении к $\varepsilon = 0.04$. Однако, при $n \ge 400$ со стороны скважины наблюдается появление «пилообразного» участка кривой. Дальнейшее уменьшение ε (ε=0.03; 0.02) приводит к тому, что, начиная с n=400; 600 происходит рост числа обусловленности и дискретная схема становится неустойчивой.

При этом в результате счета получена величина ε=0.05, для которой наблюдается сохранение устойчивости решения при значительном росте n.

Для демонстрации стабильности процесса вычисления с регуляризацией на рисунке 2 построены последовательные положения границы раздела Γ_t в моменты времени t=0, $T/3$, $2T/3$, T.

В таблице 4 приводятся различные значения T и μ, демонстрирующие положительный эффект от предложенного способа регуляризации для различных шагов dt по времени. Для определенности в таблице 4 dt=0.008.

Табл. 4. Зависимость T и μ от величин n и dt при ε=0.05

n	100	200	400	800	1200
T, dt	0.592	0.584	0.568	0.568	0.568
μ	3.4654	4.0165	4.3469	4.8213	4.8518
η	-	1.3514	2.7397	0	0
T, dt/2	0.584	0.572	0.564	0.56	0.56
μ	3.4614	3.9097	4.4630	4.8044	5.0580
η	-	2.0548	1.3986	0.7092	0
T, dt/4	0.582	0.57	0.56	0.556	0.554
μ	3.4802	3.9611	4.5292	4.9149	4.9833
η	-	2.0619	1.7544	0.7142	0.35971

Таким образом, предложенный в статье метод регуляризации сингулярного интеграла за счет сглаживания ядра обеспечивает при определенных значениях ε практическую сходимость решения на фоне стабильного поведения вычислительного процесса.

Литература

1. Никольский Д.Н. Численное моделирование и разработка программного обеспечения задач эволюции границы раздела жидкостей в курсе «Математическое моделирование в физике». Уч.-мет. пос. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2007. – 44 с.
2. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. – М: Наука, 1971. – 368 с.
3. Никольский Д.Н. К вопросу построения дискретной схемы для плоской задачи эволюции границы раздела различных жидкостей// Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 4, с. 90-96.
4. Богомолов Д.В., Сетуха А.В. О численном моделировании трехмерных вихревых течений идеальной жидкости в безграничной области изолированными вихревыми элементами// Научный вестник МГТУ ГА. Сер. «Аэромеханика и прочность». – 2008. № 125(1). – С. 73-78.
5. Богомолов Д.В., Сетуха А.В. О вычислении поля скоростей вблизи обтекаемой поверхности// Вісник Харківського національного університету, – 2008. – № 809. Серія. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. 9. – с. 32-41.
6. Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах// Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1263-1276.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ К ВОДОЗАБОРУ В АНИЗОТРОПНО-ОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ГРУНТА

Л.Г. Ноздрина
Россия, Орловский государственный университет

Исследована эволюция границы раздела двух “разноцветных” жидкостей в анизотропной среде. Выписаны дифференциальные уравнения движения этой границы. Проанализировано влияние на время загрязнения коэффициентов анизотропии и первоначальной формы границы раздела жидкостей.

1. Плоскопараллельное фильтрационное течение несжимаемой жидкости в недеформируемом тонком анизотропно-однородном слое пористой среды с тензором проницаемости $K=\left(K_{ij}\right)$ ($K_{ij}=const$), $i,j=1,2$ описывается обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ, которые как функции декартовых координат точки (x,y) плоского основания слоя удовлетворяют в области D (за исключением особых точек течения) эллиптической системе уравнений [1, 2]

$$v_x=K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad (1.1)$$

где v_x и v_y – составляющие вектора скорости фильтрации $\vec{v}=\left(v_x,v_y\right)$. При этом коэффициенты K_{ij}, $i,j=1,2$ удовлетворяют условиям эллиптичности

$$K_{11}>0,\quad D\left(K_s\right)=K_{11}K_{22}-\left(\frac{K_{12}+K_{21}}{2}\right)^2>0,$$

где $D\left(K_s\right)\equiv\left|\frac{K_{ij}+K_{ji}}{2}\right|$ –определитель симметричной части $K_s=\left(\frac{K_{ij}+K_{ji}}{2}\right)$ тензора проницаемости $K=\left(K_{ij}\right)$.

Уравнения движения границы раздела жидкостей Γ_t: $x=x(t,s)$, $y=y(t,s)$ (s – параметр) имеют вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v_x(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=v_y(x,y).\end{cases}\quad (x,y)\in\Gamma_t\qquad (1.2)$$

При этом имеют место начальные условия:

$$\text{при } t=0\ \ x_0=x(0,s),\ y_0=y(0,s).\qquad (1.3)$$

Уравнения (1.1), (1.2) записаны в безразмерных величинах [3].

Таким образом, для нахождения положения границы Γ_t в любой момент времени $t>0$, необходимо решать уравнения (1.1), (1.2) совместно с начальными условиями (1.3).

Для описания течения будем использовать две комплексные плоскости [4]: физическую плоскость $z = x + iy$ и вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Плоскости z и ζ взаимосвязаны взаимнооднозначным преобразованием (J – якобиан преобразования)

$$\zeta = \zeta(z) \quad \left(J = \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}\right|^2 \neq 0 \right), \tag{1.4}$$

которое удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, |\mu(z)| < 1 \right). \tag{1.5}$$

В плоскости ζ комплексный потенциал течения выглядит следующим образом:

$$W = \varphi + i\frac{\psi}{P} \quad \left(P = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)} \right), \tag{1.6}$$

который удовлетворяет уравнению [2]

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(\zeta)(W - \overline{W}) = 0 \quad \left(A(\zeta) = \frac{\overline{P}}{P + \overline{P}} \frac{\partial \ln P}{\partial \bar{\zeta}} \right), \tag{1.7}$$

где $\overline{P} = \sqrt{D(K_s)} + i\sqrt{D(K_a)}$ $\left(D(K_a) \equiv \left| \frac{K_{ij} - K_{ji}}{2} \right| = \left(\frac{K_{12} - K_{21}}{2} \right)^2 > 0 \right.$ – определитель антисимметричной части $K_a = \left(\frac{K_{ij} - K_{ji}}{2} \right)$ тензора проницаемости $K = (K_{ij})$).

Уравнение (1.7) – комплексное представление системы уравнений [2]

$$\sqrt{D(K_s)}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(K_a)}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad -\sqrt{D(K_a)}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \tag{1.8}$$

которая является канонической формой уравнений (1.1) в плоскости ζ.

В случае анизотропного однородного слоя грунта решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\zeta = z + \mu\bar{z}. \tag{1.9}$$

Полагая $\mu = a + ib$, имеем $\xi = (1 + a)x + by$, $\eta = bx + (1 - a)y$, где постоянные коэффициенты

$$a = \frac{K_{22} - K_{11}}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, \quad b = -\frac{K_{12} + K_{21}}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}.$$

Уравнения движения границы Γ_t': $\xi = \xi(t, s)$, $\eta = \eta(t, s)$ (1.2) на плоскости ζ выглядят следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{d\xi}{dt}+\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{d\eta}{dt}=\dfrac{\partial \psi}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{d\xi}{dt}+\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\dfrac{d\eta}{dt}=-\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right). \end{cases} \quad (\xi,\eta)\in \Gamma_t' \qquad (1.10)$$

Умножим первое уравнение данной системы на $\dfrac{1}{\partial x/\partial \eta}$, а второе уравнение на $-\dfrac{1}{\partial y/\partial \eta}$ и сложим, получим выражение для определения $\dfrac{d\xi}{dt}$. Затем умножим первое уравнение системы (1.10) на $\dfrac{1}{\partial x/\partial \xi}$, а второе уравнение на $-\dfrac{1}{\partial y/\partial \xi}$ и сложим, получим выражение для определения $\dfrac{d\eta}{dt}$. Учитывая преобразования (1.9), имеем

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt}=\left(1-a^2-b^2\right)\dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ \dfrac{d\eta}{dt}=-\left(1-a^2-b^2\right)\dfrac{\partial \psi}{\partial \xi}. \end{cases} \quad (\xi,\eta)\in \Gamma_t'. \qquad (1.11)$$

Начальное условие на плоскости ζ будет иметь вид:

$$\text{при } t=0 \;\; \xi_0=\xi(0,s),\; \eta_0=\eta(0,s). \qquad (1.12)$$

2. Исследуем эволюцию границы раздела жидкостей Γ_t к расположенному в точке z_0 водозабору в виде совершенной скважины постоянного дебита q. Контуром скважины L_c является окружность малого радиуса R_c. Начальной границей раздела жидкостей является Γ_0 (рис. 1).

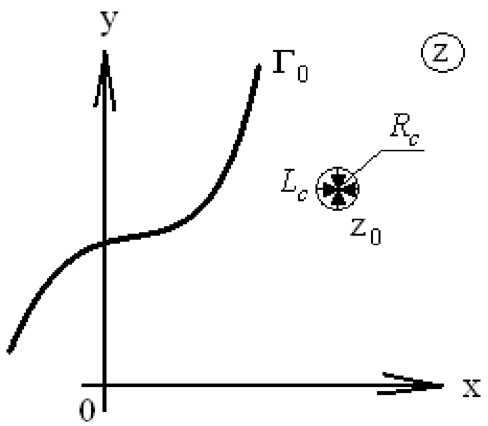


Рис. 1. Постановка задачи на физической плоскости

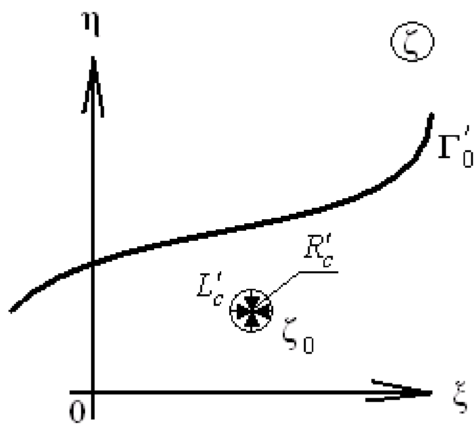


Рис. 2. Постановка задачи на вспомогательной плоскости

С помощью преобразований (1.9) перейдем от физической плоскости z на вспомогательную плоскость ζ. Здесь граница раздела жидкостей займет начальное положение Γ_0', водозаборная скважина будет находиться в точке ζ_0 (рис. 2). Контур скважины L_c' примет вид эллипса, расположенного под углом $\alpha = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{K_{12}+K_{21}}{K_{22}-K_{11}}\right)$ с полуосями

$$A_c = \sqrt{\frac{R_c^2}{a^2+b^2+1+2(a\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha)}},\ B_c = \sqrt{\frac{R_c^2}{a^2+b^2+1-2(a\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha)}},$$

но для практики в качестве контура скважины удобнее выбрать окружность эффективного радиуса $R_c' = (A_c + B_c)/2$.

В плоскости ζ комплексный потенциал течения $W(\zeta)$, удовлетворяющий уравнению (1.7), имеет вид [5]

$$W(\zeta) = \frac{q}{2\pi P}\ln(\zeta - \zeta_0) \quad \left(P = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}\right). \qquad (2.1)$$

Отсюда получаем функции $\varphi(\xi,\eta)$, $\psi(\xi,\eta)$, удовлетворяющие уравнениям (1.8),

$$\varphi(\zeta) = \frac{q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}}\ln R, \quad \psi(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\left[\sqrt{\frac{D(K_a)}{D(K_s)}}\ln R + \vartheta\right], \qquad (2.2)$$

где $R = |\zeta - \zeta_0| = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2}$, $\vartheta = \arg(\zeta - \zeta_0) = arctg\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0}$.

Таким образом, решая систему дифференциальных уравнений (1.11) при известной функции тока (2.2) с учетом начального условия (1.12), получим положение границы Γ_t' в определенные моменты времени на вспомогательной плоскости ζ. Затем, если известно преобразование (1.9), перейдем на физическую плоскость и получим эволюцию границы Γ_t на плоскости z для моментов времени $t > 0$.

Рассмотрим некоторые конкретные границы.

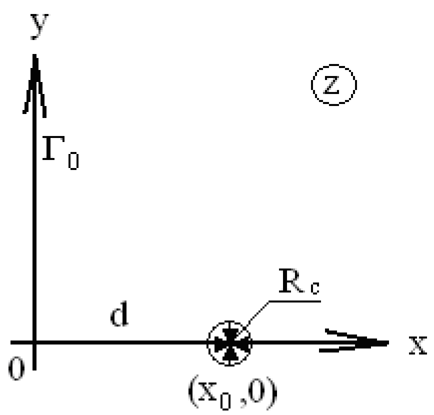


Рис. 3. Постановка задачи на физической плоскости

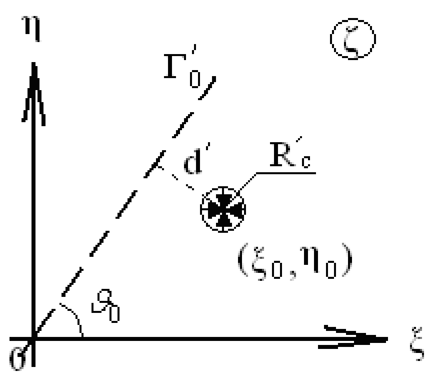


Рис. 4. Постановка задачи на вспомогательной плоскости

1. Пусть в качестве начального положения границы раздела жидкостей Γ_t на физической плоскости z выступает прямая, совпадающая с осью Oy, т.е. $\Gamma_0 : x = 0$. На расстоянии d от Γ_0 находится водозабор мощности q (рис. 3). Переходя на вспомогательную плоскость ζ, получим в качестве начального положения границы Γ_t' прямую, расположенную под углом ϑ_0: $tg\vartheta_0 = \dfrac{1-a}{b}$, т.е. $\Gamma_0' : \eta_0 = \dfrac{1-a}{b}\xi_0$. Водозабор будет находиться в точке (ξ_0, η_0) на расстоянии d' от границы Γ_0' (рис. 4).

Комплексный потенциал течения $W(\zeta)$ имеет вид (2.1).

В случае симметричного тензора проницаемости вида $K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}$ эволюция границы Γ_t имеет вид, представленный на рис. 5 для отношения $K_{11}/K_{22} = 10$. Видим, что картина симметрична относительно оси Ox. Для тензора вида $K = \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}$ картина течения имеет уже несимметричный вид и представлена на рис. 6 для $K_{12}/K_{21} = 10$.

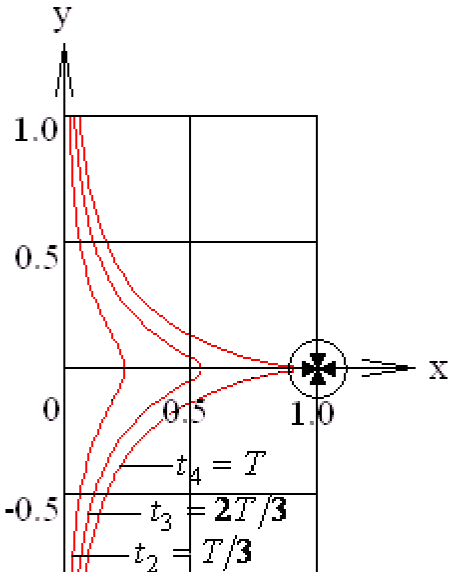


Рис. 5. Эволюция границы для $K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}$, $T = 0{,}32$

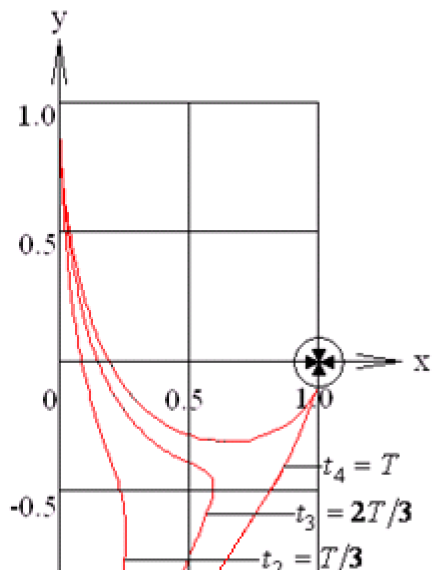


Рис. 6. Эволюция границы для $K = \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}$, $T = 0{,}75$

2. Теперь рассмотрим случай, когда начальной границей раздела жидкостей Γ_t на физической плоскости z является окружность радиуса R_0 с центром в начале координат, т.е. $\Gamma_0 : x^2 + y^2 = R_0^2$. Кратчайшее расстояние до водозаборной скважины мощности q от Γ_0 составляет d (рис. 7).

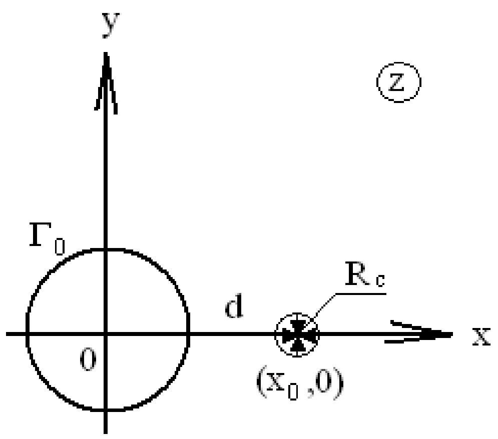


Рис. 7. Постановка задачи
на физической плоскости

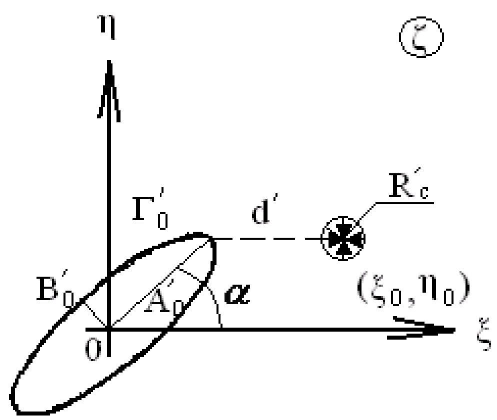


Рис. 8. Постановка задачи
на вспомогательной плоскости

Переходя на вспомогательную плоскость ζ, в качестве начального положения границы Γ_t' получим эллипс, расположенный под углом $\alpha = 1/2\, arctg(-b/a)$ с полуосями

$$A_0' = \sqrt{\frac{R_0^2}{a^2 + b^2 + 1 + 2(a\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha)}},\quad B_0' = \sqrt{\frac{R_0^2}{a^2 + b^2 + 1 - 2(a\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha)}},$$

т.е. $\quad \Gamma_0' : \left((1-a)^2 + b^2\right)\xi^2 + \left((1+a)^2 + b^2\right)\eta^2 - 4b\xi\eta = R_0^2\left(1 - a^2 - b^2\right)^2.$

Водозабор будет находиться в точке (ξ_0, η_0) на кратчайшем расстоянии d' от границы Γ_0' (рис. 8).

Комплексный потенциал течения $W(\zeta)$ имеет вид (2.1).

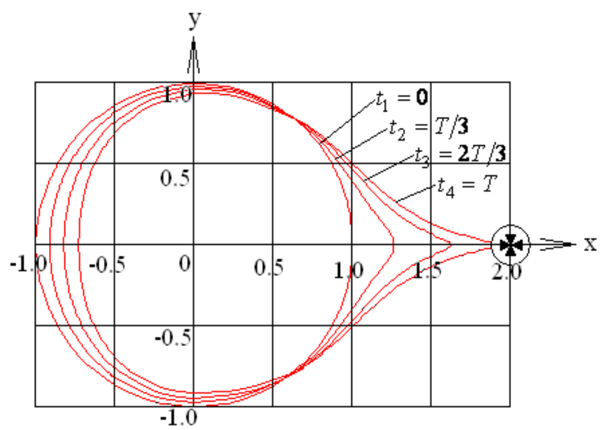


Рис. 9. Эволюция границы для
$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}$, $T = 0{,}32$

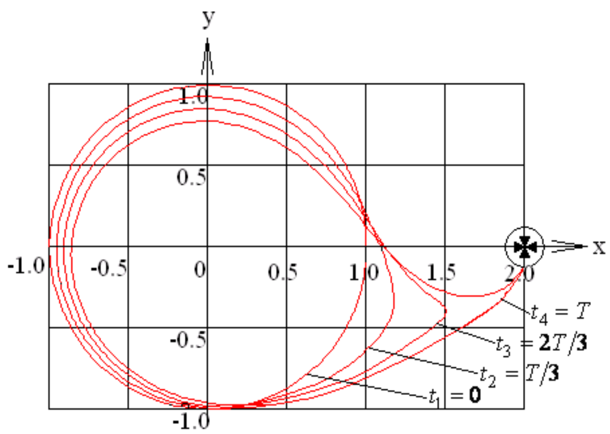


Рис. 10. Эволюция границы для
$K = \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}$, $T = 0{,}95$

В случае симметричного тензора проницаемости $K=\begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}$ эволюция границы Γ_t для $K_{11}/K_{22}=10$ имеет вид, представленный на рис. 9. Картина является симметричной относительно оси Ox. Для тензора вида $K=\begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}$ картина течения имеет вид, представленный на рис. 10 для $K_{12}/K_{21}=10$.

Время, по истечении которого граница раздела жидкостей достигнет контура водозаборной скважины, находится из решения дифференциальных уравнений (1.2). В случае изотропной среды ($K_{11}=K_{22}=1,\ K_{12}=K_{21}=0$) решение этих уравнений удается найти аналитически

$$T_0=-\frac{\pi}{q}d^2. \tag{2.3}$$

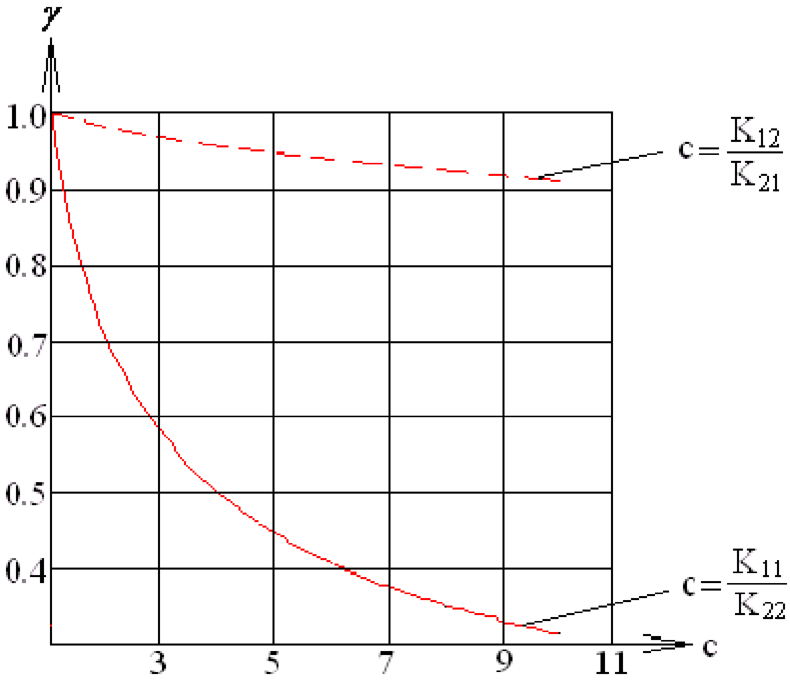


Рис. 11. График зависимости величины γ от отношения коэффициентов анизотропии

Введем величины $\gamma=T/T_0$, где T – время, по истечении которого граница раздела жидкостей достигнет водозабора в анизотропной среде, и $c=\dfrac{K_{ij}}{K_{ji}}$. На рис. 11 представлены графики зависимости $\gamma=\gamma(c)$.

Анализируя рис. 11, заметим, что коэффициенты анизотропии K_{12} и K_{21} влияют на время T достаточно слабо. А именно, если при отношении $K_{11}/K_{22}=10$ время T уменьшается на 70% по сравнению с T_0, то в случае $K_{12}/K_{21}=10$ время T всего на 10% отличается от T_0.

Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. школа. 1983. 160 с.
2. Пивень В.Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физ.-мат. факультета ГОУ ВПО «ОГУ». Вып. 6. Изд-во ОГУ, 2007. С. 120-125.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков-Херсон, 2007. С. 239-243.
4. Пивень В.Ф. Решение граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Труды международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 5. Изд-во ОГУ, 2007. С. 91-100.
5. Пивень В.Ф. Фундаментальные решения уравнений двумерной фильтрации в анизотропном слое пористой среды // См. настоящий сборник трудов.

УДК 532.546

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ[1]

В.Ф. Пивень
Россия, Орловский государственный университет

Вводятся понятия фундаментальных решений основных уравнений двумерной фильтрации в анизотропном неоднородном слое пористой среды. Выясняется их гидродинамический смысл и указываются условия их взаимной сопряженности. Отыскиваются эти решения в случае анизотропно-однородного слоя.

1. Двумерную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом тонком анизотропно-неоднородном слое пористой среды с тензором проницаемости $K = \left(K_{ij}\right)$, $i, j = 1{,}2$ и толщиной H описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ, которые как функции декартовых координат точки (x, y) плоского основания слоя удовлетворяют в области D (за исключением особых точек течения) эллиптической системе уравнений [1, 2]

$$K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1.1)$$

Здесь коэффициенты K_{ij}, $i, j = 1{,}2$ удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0, \quad D_s = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2}\right)^2 > 0$$

($D_s \equiv \left|\dfrac{K_{ij} + K_{ji}}{2}\right|$ – определитель симметричной части $\dfrac{K_{ij} + K_{ji}}{2}$ тензора $K = \left(K_{ij}\right)$).

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах [3]. Первое и второе уравнения определяют v_x и v_y составляющие вектора скорости фильтрации $\vec{v} = \left(v_x, v_y\right)$.

Для описания течения введем две комплексные плоскости: физическую плоскость $z = x + iy$, где течение в области D описывается функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, и вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, где течение в области D' характеризуется функциями $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Плоскости z и ζ, области D и D' взаимосвязаны гомеоморфным (взаимнооднозначным) преобразованием (J – якобиан преобразования)

$$\zeta = \zeta(z) \quad \left(J = \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}\right|^2 \neq 0\right), \qquad (1.2)$$

которое удовлетворяет уравнению Бельтрами

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}-\mu(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0 \quad \left(\mu(z)=\frac{K_{22}-K_{11}-i(K_{12}+K_{21})}{K_{22}+K_{11}+2\sqrt{D(K_s)}},|\mu(z)|<1\right). \quad (1.3)$$

Введем в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W=\varphi+i\frac{\psi}{P} \quad \left(P=H\left[\sqrt{D_s}-i\sqrt{D_a}\right]\right), \quad (1.4)$$

который как функция ζ удовлетворяет всюду в области D' (за исключением его особых точек) вытекающему из (1.1) при учете (1.3) уравнению [2]

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{\zeta}}+A(\zeta)\left(W-\overline{W}\right)=0 \quad \left(A(\zeta)=\frac{\overline{P}}{P+\overline{P}}\frac{\partial\ln P}{\partial\bar{\zeta}}\right), \quad (1.5)$$

где $\overline{P}=H\left[\sqrt{D_s}+i\sqrt{D_a}\right]$ ($D_a=\left(\frac{K_{12}-K_{21}}{2}\right)^2>0$ – определитель антисимметричной части $\frac{K_{ij}-K_{ji}}{2}$ тензора $K=(K_{ij})$).

Уравнение (1.5) – комплексное представление системы уравнений

$$\sqrt{D_s}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\sqrt{D_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad -\sqrt{D_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\sqrt{D_s}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \quad (1.6)$$

которые являются в плоскости ζ канонической формой записи уравнений (1.1) и относятся также к эллиптической системе уравнений, если $\sqrt{D_s}>0$, $D=D_s+D_a>0$ ($D=\left|K_{ij}\right|$ – определитель тензора $K=(K_{ij})$). При этом $\sqrt{D_a}$ может принимать как положительные так и отрицательные значения.

Из формул (1.4) – (1.6) следует, что комплексный потенциал $W(\zeta)$ описывает в плоскости ζ течение в слое толщины $H=H(\zeta)$, пористая анизотропная среда которого характеризуется тензором проницаемости $K'=(K'_{ij})$ с компонентами $K'_{11}=K'_{22}=\sqrt{D_s}$, $K'_{12}=-K'_{21}=\sqrt{D_a}$, зависящими от ζ. Назовем $P=H\left[\sqrt{D_s}-i\sqrt{D_a}\right]$ – проводимостью слоя, которая является комплекснозначной функцией ζ.

Таким образом, если известен гомеоморфизм $\zeta(z)$ уравнения (1.3), то отыскивая комплексный потенциал $W(\zeta)$, удовлетворяющий уравнению (1.5), находим согласно (1.4) искомые обобщенный потенциал $\varphi=\varphi(x,y)$ и функцию тока $\psi=\psi(x,y)$:

$$\varphi=\frac{PW+\overline{P}\,\overline{W}}{P+\overline{P}}, \quad \psi=\frac{P\overline{P}\left(W-\overline{W}\right)}{i\left(P+\overline{P}\right)}. \quad (1.7)$$

($W=W[\zeta(x,y)]=W(x,y)$, $P=P[\zeta(x,y)]=P(x,y)$).

2. Указанные в работе [4] понятия комплексных фундаментальных решений обобщим на случай анизотропной пористой среды. Рассмотрим в области D' плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ аналогичные (1.4) комплекснозначные функции

$$F_k(\zeta,\zeta_0)=\Phi_k(\zeta,\zeta_0)+i\frac{\Psi_k(\zeta,\zeta_0)}{P(\zeta)},\quad k=1,2, \tag{2.1}$$

где $\zeta,\zeta_0\in D'$ ($\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$ – точка-параметр).

Первым и вторым комплексными фундаментальными решениями уравнения (1.5) в области D' назовем комплекснозначные функции $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ вида (2.1), которые удовлетворяют условиям:

1. Всюду в области D' по координатам точки ζ за исключением точки-параметра ζ_0 ($\zeta\ne\zeta_0$, $\zeta,\zeta_0\in D'$) функции $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ хотя бы один раз непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют уравнению (1.5).
2. Функции $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ имеют в точке ζ_0 сингулярность (особенность) логарифмического типа. А именно, они имеют асимптотические приближения

$$F_1(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi\mathrm{P}(\zeta_0)}\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0},\quad F_2(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\quad \text{при } \zeta\to\zeta_0. \tag{2.2}$$

Используя формулы (1.7), (2.2) и полагая в них $P(\zeta_0)=P_1(\zeta_0)+iP_2(\zeta_0)$ $\left(P_1(\zeta_0)=H(\zeta_0)\sqrt{D_s(\zeta_0)},P_2(\zeta_0)=-H(\zeta_0)\sqrt{D_a(\zeta_0)}\right)$, имеем для $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$, $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ при $\zeta\to\zeta_0$ асимптотические приближения

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi P_1(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|},$$

$$\Psi_1(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi}\left[\frac{P_2(\zeta_0)}{P_1(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\arg(\zeta-\zeta_0)\right],$$

$$\Phi_2(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi}\left[\frac{P_2(\zeta_0)}{P_1(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\arg(\zeta-\zeta_0)\right],$$

$$\Psi_2(\zeta,\zeta_0)\sim-\frac{P_1^2(\zeta_0)+P_2^2(\zeta_0)}{2\pi P_1(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}. \tag{2.3}$$

Из асимптотик (2.3) следует, что линии равного обобщенного потенциала $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)=const$ и линии тока $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)=const$ при $\zeta\to\zeta_0$ принимают соответственно вид окружностей и логарифмических спиралей. В то время как $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)=const$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)=const$ при $\zeta\to\zeta_0$ имеют вид логарифмических спиралей и окружностей. Точка ζ_0 является центром этих окружностей и асимптотической точкой этих логарифмических спиралей. Вид логарифмических спиралей определяется отношением $P_2(\zeta_0)/P_1(\zeta_0)=-\sqrt{D_a(\zeta_0)}\big/\sqrt{D_s(\zeta_0)}$.

Асимптотики (2.3) позволяют выяснить гидродинамический смысл решений $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$, учитывая, что функции $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$, взаимно сопряженные согласно уравнений (1.6) по переменной ζ. Если в формулах (2.3) выбрать в качестве замкнутого контура малый замкнутый контур, охватывающий точку ζ_0, то для разности функций $\Delta\Psi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Delta\Phi_2(\zeta,\zeta_0)$ имеем

$$\Delta\Psi_1(\zeta,\zeta_0) \sim -\frac{\Delta\arg(\zeta-\zeta_0)}{2\pi},\quad \Delta\Phi_2(\zeta,\zeta_0) \sim -\frac{\Delta\arg(\zeta-\zeta_0)}{2\pi}\quad \text{при } \zeta\to\zeta_0.$$

При однократном обходе точки ζ_0 по этому контуру против часовой стрелки $\Delta\arg(\zeta-\zeta_0)=2\pi$ и, следовательно, имеем при $\zeta\to\zeta_0$ в пределе $\Delta\Psi_1(\zeta_0,\zeta_0)=-1$ и $\Delta\Phi_2(\zeta_0,\zeta_0)=-1$. Это означает, что полный расход Π и циркуляция вектора скорости Γ жидкости, вычисленные для этого контура будут $\Pi=\Delta\Psi_1(\zeta,\zeta_0)=-1$ и $\Gamma=\Delta\Phi_2(\zeta,\zeta_0)=-1$. Следовательно, $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ представляют собой сток расхода (мощности) $\Pi=-1$ и вихрь с циркуляцией (интенсивностью) $\Gamma=-1$, направленной по часовой стрелке.

Заметим, что при n-кратном $(n=1,2,3,...)$ обходе точки ζ_0 $\Delta\arg(\zeta-\zeta_0)=2\pi n$ и поэтому в пределе $\Delta\Psi_1(\zeta_0,\zeta_0)=-n$ и $\Delta\Phi_2(\zeta_0,\zeta_0)=-n$. Следовательно, функции $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)$, а значит и фундаментальные решения $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ будут определены однозначно, если в плоскости ζ сделать разрез, проходящий через точку ζ_0, такой, что можно было бы обойти точку ζ_0 только один раз, не пересекая этот разрез.

Для источника полной мощности $\Pi>0$ (стока полной мощности $\Pi<0$) и вихря интенсивности Γ (для циркуляции вектора скорости против часовой стрелки $\Gamma>0$ и по часовой стрелке $\Gamma<0$) имеем в плоскости ζ комплексные потенциалы

$$W=-\Pi F_1(\zeta,\zeta_0), \tag{2.4}$$

$$W=-\Gamma F_2(\zeta,\zeta_0). \tag{2.5}$$

Если известен гомеоморфизм $\zeta=\zeta(z)$ уравнения (1.3) и, следовательно, $\zeta_0=\zeta_0(z_0)$, то комплексные потенциалы источника (стока) (2.4) и вихря (2.5) можно записать в плоскости z, а значит по формулам (1.7) найти обобщенные потенциалы $\varphi(\mathrm{z},\mathrm{z}_0)$ и функции тока $\psi(\mathrm{z},\mathrm{z}_0)$ этих течений, которые будут удовлетворять уравнениям (1.1).

3. Покажем, что фундаментальные решения $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ являются взаимно сопряженными по точке-параметру ζ_0. Для этого рассмотрим пару источник-сток, то есть источник и сток одинаковой по величине мощности. Пусть сток расположен в точке ζ_0, а источник – в точке $\zeta_0+\Delta\zeta_0$. Тогда, применяя принцип наложения течений, на основании (2.4) имеем комплексный потенциал течения пары источник-сток

$$W=-\Pi\left[F_1(\zeta,\zeta_0+\Delta\zeta_0)-F_1(\zeta,\zeta_0)\right]. \tag{3.1}$$

Проведем из точки ζ_0 вектор $\vec{l}$, проходящий через точку $\zeta_0+\Delta\zeta_0$, направленный от точки ζ_0 к точке $\zeta_0+\Delta\zeta_0$ и составляющий угол θ_0 с осью Ox. Учтем, что $\Delta\zeta_0=\Delta l e^{i\theta_0}$ ($\Delta l=|\Delta\zeta_0|$). Поделим и умножим равенство (3.1) на Δl. Будем источник приближать к стоку ($\Delta l\to 0$), оставляя последний неподвижным в точке ζ_0. При этом неограниченно увеличиваем их мощности ($\Pi \to \infty$). В пределе получим систему, которую назовем диполем и его комплексный потенциал запишем

$$W_1 = -\lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Pi \to \infty}} \Pi \Delta l \lim_{\Delta l \to 0} \frac{F_1\left(\zeta, \zeta_0 + \Delta l e^{i\theta_0}\right) - F_1(\zeta, \zeta_0)}{\Delta l}.$$

Обозначим через $M_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Pi \to \infty}} \Pi \Delta l$ величину момента диполя. Тогда имеем

$$W_1 = -M_1 \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l}.$$

Так как

$$\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} = \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} \frac{d\zeta_0}{dl} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} \frac{d\bar{\zeta}_0}{dl},$$

или, учитывая равенства $d\zeta_0 = dl e^{i\theta_0}$, $d\bar{\zeta}_0 = dl e^{-i\theta_0}$,

$$\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} = \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta_0} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} e^{-i\theta_0},$$

то находим

$$W_1 = -M_1 \left[\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta_0} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} e^{-i\theta_0} \right]. \tag{3.2}$$

Чтобы выяснить направление момента диполя, обратимся к асимптотике (2.2) для $F_1(\zeta, \zeta_0)$ и аналогично тому, как была получена формула (3.2), имеем

$$W_1 \sim -\frac{M_1 e^{i\theta_0}}{2\pi P(\zeta_0)} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \ln \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \quad \text{при } \zeta \to \zeta_0.$$

Полагая $P(\zeta_0) = |P(\zeta_0)| e^{i\delta(\zeta_0)}$, $\delta(\zeta_0) = \arg P(\zeta_0)$, находим асимптотику комплексного потенциала диполя

$$W_1 \sim -\frac{M_1 e^{i\alpha(\zeta_0)}}{2\pi |P(\zeta_0)|(\zeta - \zeta_0)} \quad \text{при } \zeta \to \zeta_0, \tag{3.3}$$

где $\alpha(\zeta_0) = \theta_0 - \delta(\zeta_0)$.

Сопоставляя (3.3) с комплексным потенциалом диполя в изотропной однородной пористой среде ($|P(\zeta_0)| = 1$, $\delta(\zeta_0) = 0$), находим, что диполь в случае анизотропной неоднородной среды можно характеризовать вектором приведенного момента диполя $\vec{m}_1 = \vec{M}_1 / |P(\zeta_0)|$. Его модуль $m_1 = M_1 / |P(\zeta_0)|$. Направлен $\vec{m}_1$ под углом $\alpha(\zeta_0) = \theta_0 - \delta(\zeta_0)$ к оси Ox. Тогда вектор момента диполя $\vec{M}_1 = \vec{m}_1 |P(\zeta_0)|$ направлен под тем же углом $\alpha(\zeta_0)$ к оси Ox.

Рассмотрим теперь пару вихрей, состоящую из двух вихрей одинаковых по величине и противоположных по знаку интенсивностей.

Пусть вихрь интенсивности $\Gamma > 0$ расположен в той же точке ζ_0, а интенсивности $\Gamma < 0$ – в другой точке $\zeta_0 + \Delta\zeta_0'$. Согласно (2.5) имеем комплексный потенциал пары вихрей

$$W' = \Gamma\left[F_2\left(\zeta, \zeta_0 + \Delta\zeta_0'\right) - F_2\left(\zeta, \zeta_0\right)\right].$$

Проведем из точки ζ_0 другой вектор $\vec{l}'$, проходящий через точку $\zeta_0 + \Delta\zeta_0'$, направленный из точки ζ_0 в точку $\zeta_0 + \Delta\zeta_0'$ и составляющий угол θ_0' с осью Ox ($\Delta\zeta_0' = \Delta l' e^{i\theta_0'}$, $\Delta l' = |\Delta\zeta_0'|$). Поделим и умножим последнее равенство на $\Delta l'$. Будем вихрь в точке $\zeta_0 + \Delta\zeta_0'$ приближать к вихрю, неподвижному в точке ζ_0 ($\Delta l' \to 0$). При этом интенсивности вихрей неограниченно увеличиваем $(\Gamma \to \infty)$. Получим в пределе комплексный потенциал W_1' другого диполя. Обозначая через $M_1' = |P(\zeta_0)| \lim\limits_{\substack{\Delta l' \to 0 \\ \Gamma \to \infty}} \Gamma \Delta l'$ величину момента этого диполя, аналогично тому как был найден комплексный потенциал (3.2), имеем

$$W_1' = \frac{M_1}{|P(\zeta_0)|}\left[\frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta_0'} + \frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} e^{-i\theta_0'}\right]. \qquad (3.4)$$

Используя асимптотику (2.2) для $F_2(\zeta, \zeta_0)$, получим асимптотическое выражение комплексного потенциала (3.4):

$$W_1' \sim -\frac{M_1' e^{i\beta}}{2\pi |P(\zeta_0)|(\zeta - \zeta_0)} \quad \text{при } \zeta \to \zeta_0, \qquad (3.5)$$

где $\beta = \theta_0' + \pi/2$. Введем вектор приведенного момента для полученного диполя $\vec{m}_1' = \vec{M}_1' / |P(\zeta_0)|$. Модуль этого вектора $m_1' = M_1' / |P(\zeta_0)|$ и направлен этот вектор под углом $\beta = \theta_0' + \pi/2$ к оси Ox (перпендикулярно вектору $\vec{l}'$). Тогда вектор момента этого диполя $\vec{M}_1' = \vec{m}_1' |P(\zeta_0)|$ направлен под тем же углом β к оси Ox.

Таким образом, имеем комплексные потенциалы (3.2) и (3.4) двух диполей с моментами $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_1'$, различными по модулю и направлению. Эти комплексные потенциалы имеют в точке ζ_0 простой полюс (полюс первого порядка).

Выберем в точке ζ_0 направления векторов $\vec{l}$ и $\vec{l}'$ так, чтобы векторы моментов $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_1'$ диполей были равны: $\vec{M}_1 = \vec{M}_1'$ ($M_1 = M_1'$, $\alpha(\zeta_0) = \beta$). Тогда будут одинаковы комплексные потенциалы W_1 и W_1' этих диполей: $W_1 = W_1'$. Из равенства комплексных потенциалов (3.2) и (3.4) при учете $M_1 = M_1'$, $\alpha(\zeta_0) = \beta$ или $\theta_0 - \theta_0' = \dfrac{\pi}{2} + \delta(\zeta_0)$ имеем

$$e^{i\theta_0}\left[\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta_0}+\frac{1}{|P(\zeta_0)|}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta_0}\right]+$$

$$+e^{-i\theta_0}\left[\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\overline{\zeta}_0}+\frac{1}{|P(\zeta_0)|}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\overline{\zeta}_0}\right]=0.$$

Это равенство будет выполняться при любых углах θ_0 (а значит θ_0'), если равны нулю выражения, стоящие в квадратных скобках, которые при учете $e^{\pm i\pi/2}=\pm i$, $P(\zeta_0)=|P(\zeta_0)|e^{i\delta}$, $\overline{P}(\zeta_0)=|P(\zeta_0)|e^{-i\delta}$ запишем

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta_0}-\frac{i}{P(\zeta_0)}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta_0}=0,\quad \frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\overline{\zeta}_0}+\frac{i}{\overline{P}(\zeta_0)}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\overline{\zeta}_0}=0. \qquad (3.6)$$

Назовем (3.6) условиями взаимной сопряженности фундаментальных решений $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ по точке-параметру ζ_0.

Учитывая

$$2\frac{\partial}{\partial\zeta_0}=\frac{\partial}{\partial\xi_0}-i\frac{\partial}{\partial\eta_0},\quad 2\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_0}=\frac{\partial}{\partial\xi_0}+i\frac{\partial}{\partial\eta_0},$$

запишем эти условия для $F_k=F_k(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$, $k=1,2$ по точке-параметру (ξ_0,η_0):

$$\begin{aligned}&HD\frac{\partial F_1}{\partial\xi_0}+\sqrt{D_a}\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi_0}-\sqrt{D_s}\,\frac{\partial F_2}{\partial\eta_0}=0,\\ &HD\frac{\partial F_1}{\partial\eta_0}+\sqrt{D_s}\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi_0}+\sqrt{D_a}\,\frac{\partial F_2}{\partial\eta_0}=0,\end{aligned} \qquad (3.7)$$

где $D=D_s+D_a=K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21}>0.$

Учитывая (2.1), выделим из (3.7) действительные и мнимые части и запишем условия взаимной сопряженности для $\Phi_k=\Phi_k(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$, $\Psi_k=\Psi_k(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$, $k=1,2$ по точке-параметру (ξ_0,η_0):

$$HD\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_0}+\sqrt{D_a}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_0}-\sqrt{D_s}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_0}=0,\quad HD\frac{\partial\Psi_1}{\partial\xi_0}+\sqrt{D_a}\,\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi_0}-\sqrt{D_s}\,\frac{\partial\Psi_2}{\partial\eta_0}=0,$$

$$(3.8)$$

$$HD\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_0}+\sqrt{D_s}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_0}+\sqrt{D_a}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_0}=0,\quad HD\frac{\partial\Psi_1}{\partial\eta_0}+\sqrt{D_s}\,\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi_0}+\sqrt{D_a}\,\frac{\partial\Psi_2}{\partial\eta_0}=0.$$

В частности, если слой изотропный, его толщина H и проницаемость K, то полагая в условиях (3.6), (3.7) и (3.8) $D_a=0$, $D=D_s=K$, $P=\overline{P}=HK$ имеем для такого слоя полученные в [4] условия сопряжения F_k и Φ_k, Ψ_k, $k=1,2$.

Заметим, что в работе [5] вводится понятие сопряженных ядер, имеющих особенности логарифмического типа, которые принципиально отличаются от введенных нами фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$.

4. В качестве примера найдем фундаментальные решения и соответствующие им комплексные потенциалы источника (стока) и вихря в случае анизотропно-однородного слоя, когда $H = 1$ и K_{ij} $(i, j = 1{,}2)$ – постоянные. В этом случае в уравнениях (1.3) и (1.5) μ и P – комплексные постоянные $\left(\mathrm{P} = \sqrt{\mathrm{D_s}} - \mathrm{i}\sqrt{\mathrm{D_a}}\right)$, следовательно $A(\zeta) = 0$. Вследствие этого уравнение (1.3) имеет гомеоморфизм

$$\zeta = z + \mu\bar{z}\,, \tag{4.1}$$

а уравнение (1.5) принимает вид $dW(\zeta)/d\bar{\zeta} = 0$. Последнее означает, что $W(\zeta)$ – аналитическая функция всюду в плоскости ζ за исключением ее особых точек.

В этом случае с учетом асимптотик (2.2) имеем фундаментальные решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$ и следующие из них функции $\Phi_k(\zeta, \zeta_0)$, $\Psi_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1{,}2$:

$$F_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi P} \ln \frac{1}{\zeta - \zeta_0}\,,$$

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|}\,, \quad \Psi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} + \arg(\zeta - \zeta_0)\right], \tag{4.2}$$

$$F_2(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1}{\zeta - \zeta_0}\,,$$

$$\Phi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} + \arg(\zeta - \zeta_0)\right], \tag{4.3}$$

$$\Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|}\,.$$

Тогда согласно (2.4) и (2.5) имеем комплексные потенциалы, обобщенные потенциалы и функции тока источника (стока)

$$W = \frac{\Pi}{2\pi P} \ln(\zeta - \zeta_0)\,,$$

$$\varphi = \frac{\Pi}{2\pi\sqrt{D_s}} \ln|\zeta - \zeta_0|\,, \quad \psi = \frac{\Pi}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} + \arg(\zeta - \zeta_0)\right] \tag{4.4}$$

и вихря

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_0)\,,$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} + \arg(\zeta - \zeta_0)\right], \quad \psi = \frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|}\,. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) имеем уравнения линий равного обобщенного потенциала $\varphi = const$ и тока $\psi = const$ для течений на плоскости ζ. Для источника (стока) линии $\varphi = const$ – концентрические окружности, радиусы которых

$$R = \left|\zeta - \zeta_0\right| = const, \tag{4.6}$$

линии $\psi = const$ – логарифмические спирали в полярных координатах R, ϑ ($R = \left|\zeta - \zeta_0\right|$, $\vartheta = \arg(\zeta - \zeta_0)$):

$$R = Ce^{k\vartheta} \quad (k = \frac{\sqrt{D_s}}{\sqrt{D_a}}, C = const), \tag{4.7}$$

а в случае ортотропной среды ($D_a = 0$) – лучи $\vartheta = const$. Для вихря линии $\varphi = const$ – логарифмические спирали вида (4.7) (в ортотропном случае – лучи $\vartheta = const$), а линии $\psi = const$ – окружности (4.6).

Учитывая гомеоморфизм (4.1), заменим в выражениях (4.2) – (4.5) $\zeta - \zeta_0 = z - z_0 + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)$ и получим фундаментальные решения и комплексные потенциалы источника (стока) и вихря в плоскости z. При этом окружности (4.6) преобразуются в эллипсы с центром в точке z_0, а логарифмические спирали (4.7) – в некоторые кривые такого же порядка.

Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. школа. 1983. 160 с.
2. Пивень В.Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физ.-мат. факультета ГОУ ВПО «ОГУ». Вып. 6. Изд-во ОГУ, 2007. С. 120-125.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ».- Харьков-Херсон. 2007. С. 239-243.
4. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл.: Изд-во ГОУ ВПО «ОГУ». 2006. 508 с.
5. Положий Г.Н. Теория и применение p – аналитических и (p, q) – аналитических функций. Киев. Наукова думка. 1973. 423 с.

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОЗАИЧНО-СКЕЛЕТОННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА[1]

С.Л. Ставцев
Россия, Институт вычислительной математики РАН,
e-mail: stav@inm.ras.ru

Изложены результаты применения мозаично-скелетонного метода к аппроксимации матриц, возникающих при решении интегральных уравнений для краевой задачи Неймана для скалярного уравнения Гельмгольца. Применение мозаично-скелетонных методов позволило провести более детальный анализ решения интегральных уравнений, в том числе для случая, когда источник расположен близко к поверхности дифрагируемого тела. Даны рекомендации по решению гиперсингулярных интегральных уравнений, возникающих при решении таких задач.

1. Постановка задачи и численный метод решения

Рассмотрим решение внешней краевой задачи Неймана для скалярного уравнения Гельмгольца на поверхности σ:

$$\Delta\varphi(M) + k^2\varphi(M) = 0, M \in D,$$

$$\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M} = -\frac{\partial\varphi_0(M)}{\partial n_M}, M \in \sigma, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\vec{r}_M}{r_M}, \nabla\varphi(M)\right) - ik\varphi(M) = O\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right), M_0 \in \sigma,$$

где потенциал $\varphi_0(M)$ представим в виде

$$\varphi_0(M) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{Q_i e^{ikr_{MM_i}}}{r_{MM_i}}, M_i \in D, \tag{2}$$

а поверхность σ задается уравнением

$$\psi = \psi(u,v), (u,v) \in \Re^2, \psi \in C^1.$$

Также как в работах [1, 2, 3] решение задачи (1)–(2) будем искать в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности σ:

$$\varphi(M) = \int_{\sigma} g(N)G(M,N)d\sigma_N, M \in D, M \notin \sigma, \tag{3}$$

где $g(N), N \in \sigma$ – плотность потенциала двойного слоя. Ядро интегрального оператора (3) имеет вид

$$G(M,N) = \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}, F(M,N) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr_{MN}}}{r_{MN}}. \tag{4}$$

Потенциал двойного слоя (3) является решением задачи (1), если его плотность $g(M), M \in \sigma$ удовлетворяет интегральному уравнению

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-00115-а.

$$\int_{\sigma} g(N)\frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M}d\sigma_N = -\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M}, M \in \sigma . \qquad (5)$$

В работе [4] показано, что если поверхность σ является плоскостью $z=0$, то решением интегрального уравнения (5) является функция

$$g(N) = 2\varphi_0(N), N \in \sigma , \qquad (6)$$

т. е. решение интегрального уравнения (5) является осциллирующей функцией, причем частота осцилляций определяется волновым числом k из дифференциального уравнения (1).

Если поверхность σ не является плоскостью, то для решения уравнения (5) будем использовать численный метод дискретных особенностей, описанный в работах [1, 2]. Согласно этому методу поверхность σ равномерно разбивается по параметрам u,v. Для каждой ячейки $\sigma_{ij}, i, j = 1,\ldots n$ функция $g(N)$ считается постоянной. Затем интегральное уравнение (5) записывается в расчетных точках (точках коллокации). В результате задача сводится к решению системы линейных интегральных уравнений (СЛАУ)

$$Ag = b . \qquad (7)$$

Согласно методу дискретных особенностей элементы матрицы A вычисляются по формуле:

$$a_{ij} = -\int_{L_{\sigma_{ij}}} \vec{n}_M \cdot \left(\overrightarrow{dl} \times \nabla_N F(M,N)\right) + k^2 \int_{\sigma_{ij}} F(M,N)\vec{n}_M \cdot \vec{n}_N d\sigma, i, j = 1,\ldots n . \qquad (8)$$

Очевидно, что точность решения интегрального уравнения определяется шагами разбиения. С другой стороны искомая функция $g(N)$ является осциллирующей и для ее расчета при больших k требуется меньший шаг разбиения. Но с уменьшением шагов разбиения увеличивается размер решаемой системы (7). Таким образом, при больших k возникает необходимость решать СЛАУ больших размерностей.

Матрица A является плотной и при $n > 2 \cdot 10^4$ ее невозможно сохранить в оперативной памяти. Будем использовать метод неполной крестовой аппроксимации для того, чтобы приблизить исходную матрицу A матрицей малого ранга (см. [5, 6]).

Согласно этому методу исходная матрица разбивается на блоки и для заданной точности аппроксимации ε каждый блок заменяется матрицей ранга r. В результате для хранения блока $l_1 \times l_2$ требуется не $l_1 \times l_2$, а $r(l_1 + l_2)$ чисел. Отметим, что при использовании метода неполной крестовой аппроксимации для каждого блока необходимо вычислить только $O(r(l_1 + l_2))$ вместо $O(l_1 \cdot l_2)$ элементов матрицы. Так как при вычислении элементов матрицы по формулам (8) интегралы берутся численно, то уменьшение количества вычисляемых элементов значительно ускоряет расчет аппроксимирующей матрицы.

2. Зависимость эффективности мозаично-скелетных аппроксимаций от частоты источника

Исследуем эффективность мозаично-скелетного метода с помощью численных экспериментов. Исследование проведем для решения интегрального уравнения (5), когда поверхность σ является прямоугольным параллелепипедом $20 \times 30 \times 40$. При расчете $\varphi_0(M)$ по формуле (2) положим $m=1, Q_1=1, M_1(20,0,0)$ (см. рисунок 1).

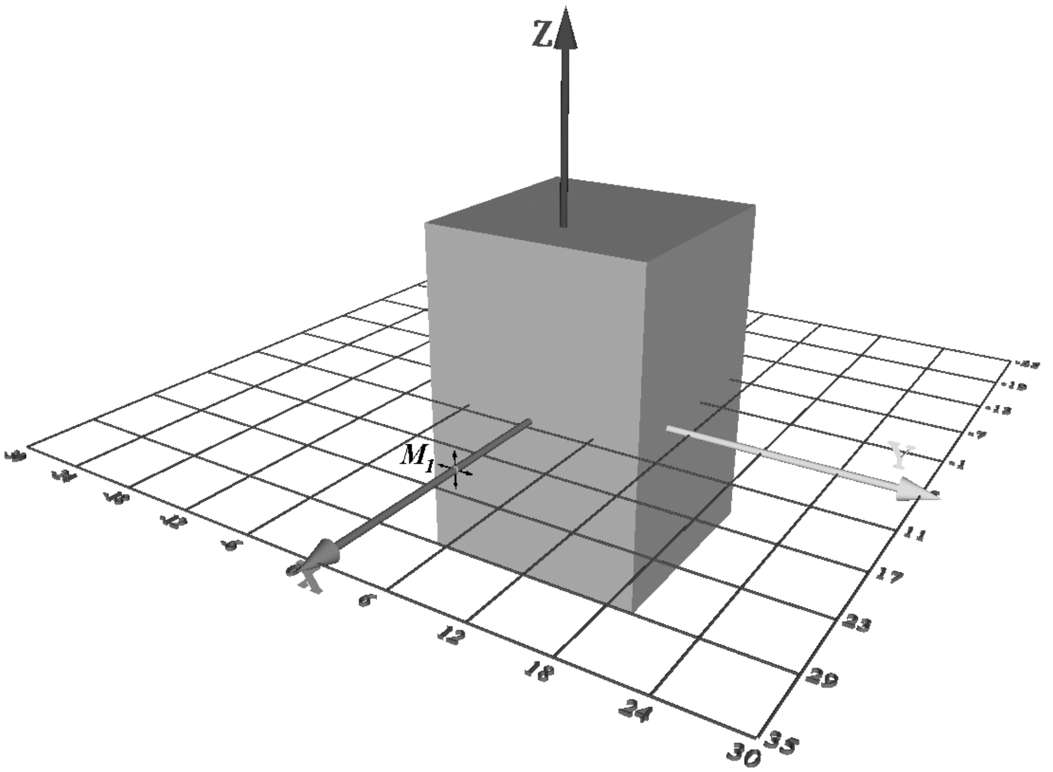


Рис. 1. Область распространения звука

В таблице 1 представлены временные затраты по заполнению матриц различной размерности прямым методом, и методом, основанном на применении мозаично-скелетонных аппроксимаций.

Табл. 1. Сравнение различных методов

h	n	T_{ms}	I_{re}	I_{im}	T_{st}
10/4	512	26 сек.	100	85,7	36 сек.
10/8	2048	2 мин. 26сек.	44	26,2	10 мин. 16 сек
10/16	8192	13мин. 25сек.	14,4	7,34	2 час. 38 мин. 56 сек.
10/32	32768	1ч. 10мин. 27сек.	4,63	2,19	1 д. 17 час. 31 мин. 44 сек.

В таблице 1 h – шаг сетки, n – размер матрицы, T_{ms} – время расчета матрицы с помощью мозаично-скелетонного метода, I_{re} – коэффициент сжатия действительной части матрицы (в процентах); I_{im} – коэффициент сжатия мнимой части матрицы (в процентах); T_{st} – время расчета матрицы с помощью прямого метода. В расчетах волновое число k полагалось равным $0{,}2$.

Пусть $mem(\widetilde{A})$ – объем памяти, необходимый для хранения всех блоков саппроксимированной матрицы, $mem(A)$ – объем памяти, необходимый для хранения несаппроксимированной матрицы, тогда коэффициент сжатия

$$I = \frac{mem(\widetilde{A})}{mem(A)} \cdot 100 .$$

Он определяет эффективность метода по используемой для хранения памяти.

Очевидно, что на коэффициент сжатия I влияют параметры решаемой задачи, в том числе волновое число k. Исследуем зависимость мозаичного ранга

$$R = \frac{2nI}{100}$$

(см. [Tyrt2]) от волнового числа k для задачи, проиллюстрированной на рисунке 1, при $n = 8192$, точность аппроксимаций матриц $\varepsilon = 10^{-4}$.

Результаты расчетов представлены в таблице 2.

Табл. 2. Изменение мозаичного ранга R при изменении волнового числа k

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
R_{re}	880	940	1000	1080	1170	1250	1350	1450	1540	1650	1740	1830
R_{im}	368	501	651	785	908	1040	1160	1280	1410	1510	1620	1730

Как видно из таблицы 2 с ростом k мозаичный ранг R растет, что приводит к необходимости вычисления и хранения большего количества элементов матрицы. Анализ данных таблицы показывает, что рост ранга в зависимости от волнового числа дает оценку

$$R = const(ka - \log_2 \varepsilon)^{\alpha}, \tag{9}$$

где a – характерный размер области. Для действительной матрицы показатель степени $\alpha = 0{,}7$, для мнимой матрицы – $\alpha = 1{,}32$. То, что это показатель сравнительно небольшой (меньше $1{,}5$), дает основание для использования мозаично-скелетонных аппроксимаций при большом волновом числе.

Табл. 3. Сравнение различных методов

k	0,4	0,6	0,8	1,2	1,6	2,4
h	10/4	10/6	10/8	10/12	10/16	10/24
n	512	1152	2048	4608	8192	18432
I_{re}	100	100	75,9	49,8	37,0	24,3
I_{im}	100	94,9	72,7	47,9	35,4	23,3
T	41 сек.	3 мин. 13 сек.	7 мин 14 сек.	24 мин. 21 сек.	1 ч. 10 мин. 52 сек.	3 ч. 43 мин. 45сек.

С увеличением частоты, а значит и волнового числа k увеличивается число осцилляций в рассчитываемой плотности $g(M)$. Для сохранения точности вычислений будем с увеличением k пропорционально увеличивать число точек разбиения на единицу длины (т.е. размер матрицы увеличивается пропорционально квадрату). Будем считать, что на длину волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ приходится 2π контрольных точек. Результаты представлены в таблице 3.

Из таблицы видно, что с ростом волнового числа k индекс сжатия I, как для действительной, так и для мнимой частей матрицы уменьшается, что приводит к уменьшению степени роста времени расчета матрицы с увеличением частоты.

3. Исследование задачи об источнике, расположенном близко к поверхности с помощью мозаично-скелетных аппроксимаций

Мозаично-скелетные аппроксимации позволяют более подробно исследовать задачи дифракции волн, когда источник расположен близко к поверхности.

В задаче, изображенной на рисунке 1, будем приближать источник к поверхности и рассмотрим, как будет изменяться решение уравнения (5).

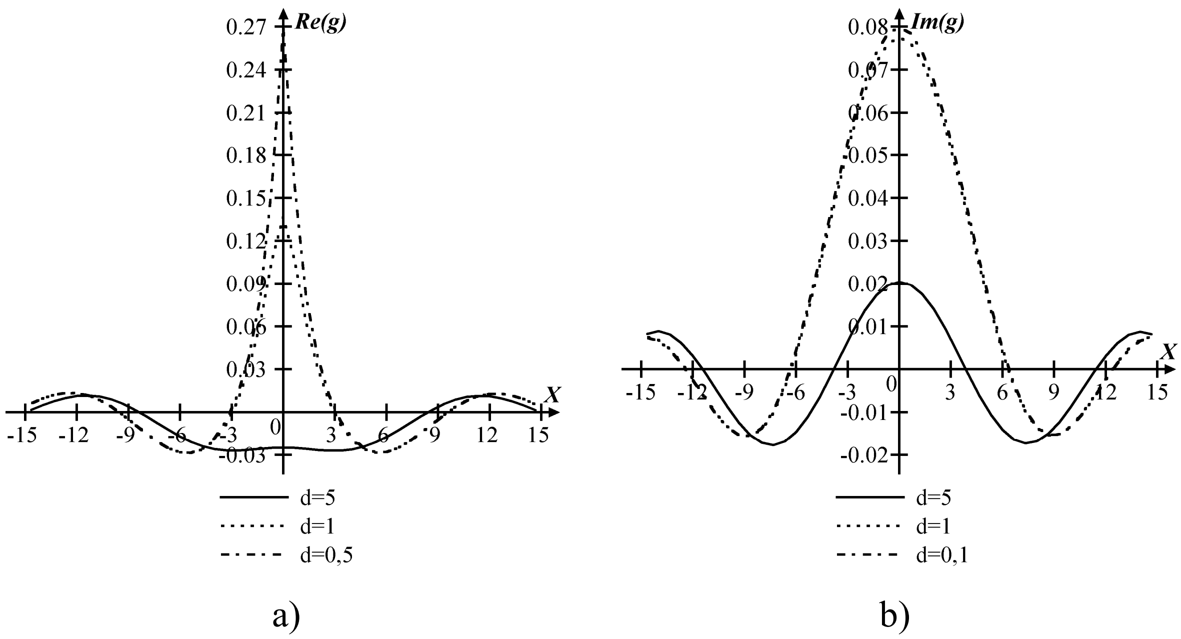


Рис. 2. Графики плотности решения гиперсингулярного интегрального уравнения при разных положениях источника – действительная и мнимая части

Пусть d – кратчайшее расстояние от источника до поверхности. На рисунке 2 изображены изменения вдоль оси OZ действительной (a) и мнимой (b) частей решения в точках пересечения плоскости OXZ с частью поверхности σ – $x = 10$ при $d = 5$, $d = 1$ и $d = 0{,}5$.

Видим, что с уменьшением d усиливается острота пика функции g в точке $N^* \in \sigma$, близкой к источнику. Поэтому, при получении решения $g(N)$ интегрального уравнения (5) требуется либо мелкая сетка, либо неравномерная сетка, сгущающаяся вблизи точек N^*.

Однако если решать систему относительно функции

$$h(N) = g(N) - p_Q(N), N \in \sigma, \qquad (10)$$

которая не содержит острых пиков, то решение можно искать на равномерной и достаточно грубой сетке.

В результате из формул (5) и (10) получаем следующее интегральное уравнение:

$$\int_\sigma g(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} d\sigma_N = -\frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M} - \int_\sigma p_Q(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} d\sigma_N, M \in \sigma. \qquad (11)$$

Как выбрать функцию $p_Q(N)$, чтобы функция $h(N)$ удовлетворяла требуемому свойству!?

Напомним, что формула (6) является решением интегрального уравнения (5), когда поверхность σ – плоскость $z = 0$. Поэтому в качестве функции $p_Q(N)$ можно выбрать

$$p_Q(N) = 2\varphi_0(N), N \in \sigma. \qquad (12)$$

Обратим внимание на то, что острый пик существует только для действительной части решения $g(N)$ (см. рисунок 2). Если в функции $\varphi_0(N)$, вычисляемой по формуле (2), разложим $e^{ikr_{NM_i}}$, $i = 1,\ldots,m$ в степенной ряд, то, очевидно, что существование пика определяется первыми членами ряда, т. е. функцией

$$\varphi_R(N) = \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{4\pi} \frac{1}{r_{NM_i}}. \qquad (13)$$

Поэтому в качестве $p_Q(N)$ можно выбрать

$$p_Q(N) = 2\varphi_R(N), N \in \sigma. \qquad (14)$$

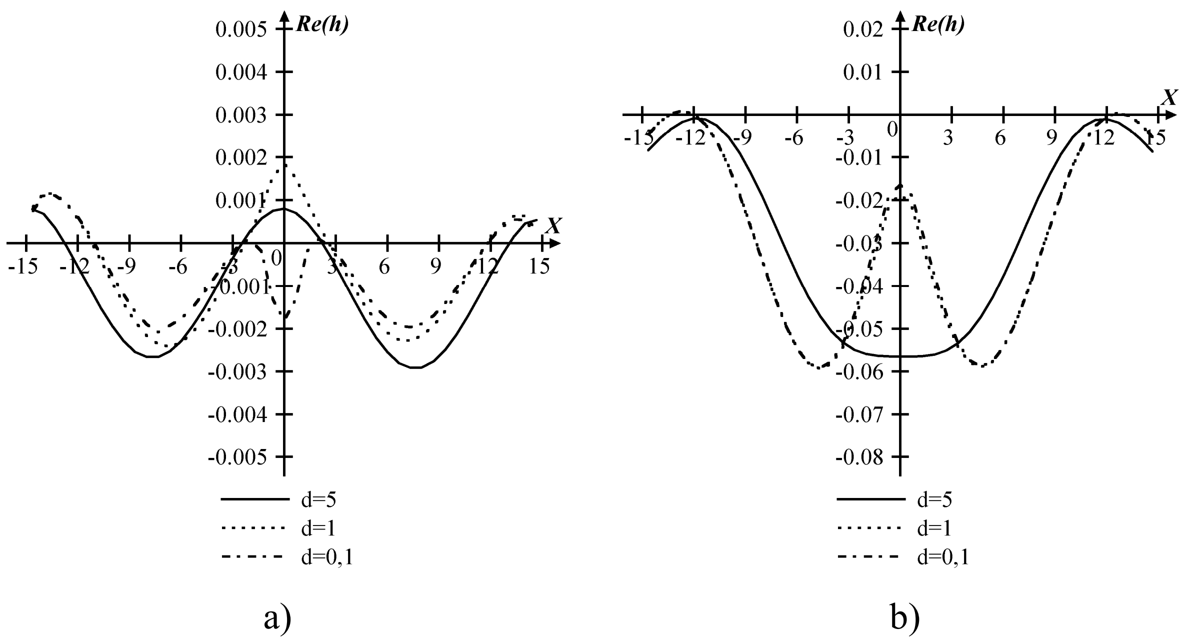


Рис. 3. Графики функции $h(N)$ для разных $p_Q(N)$ (действительная часть)

На рисунке 3 приведены графики функции $h(N)$ в точках передней грани параллелепипеда: на рисунке (a), если $p_Q(N)$ рассчитывается по формуле (12), на рисунке (b) – при расчете $p_Q(N)$ по (14).

На рисунке 3 приведены результаты расчета с использованием функции $g(N)$, которая рассчитывалась численно, при решении интегрального уравнения. Из-за существования пика погрешность вычислений функции $g(N)$, а значит и $h(N)$, вблизи оси OZ получилась большой.

Литература

1. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002. 344 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.
3. Лифанов И.К., Ставцев С.Л. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // Дифференциальные уравнения, Т. 40, № 9, 2004. С. 1256-1270.
4. Ставцев С.Л. Итерационный подход к численному решению системы интегральных уравнений для краевых задач скалярного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. Т. 42, № 9, 2006. С. 1282-1290.
5. Tyrtyshnikov E.E. Mosaic-skeleton approximations // Calcolo. 1996. V. 33(1-2), p. 47-57.
6. Tyrtyshnikov E.E. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method // Computing. 2000. V. 64(4), p. 367-380.

УДК 532.5

ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРУГОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В.А. Толпаев, Д.В. Баско, С.А. Гоголева
Россия, Северо-Кавказский государственный технический университет
e-mail: pm@ncstu.ru

Основное дифференциальное уравнение (1.102) в [1] упругого режима линейной фильтрации жидкости в изотропной неоднородной пористой среде является нелинейным. Классическое линейное уравнение (1.44) в [1] упругого режима фильтрации в однородной среде из (1.102) непосредственно не вытекает. В статье предлагаются упрощенные линейные математические модели упругого режима фильтрации, охватывающие оба случая неоднородной и однородной среды.

Упрощенные математические модели строим путем объединения закона сохранения массы фильтрующейся жидкости, динамического уравнения ее движения и уравнений состояния жидкости и пористой среды.

В простейших условиях уравнение состояния (характеристическое уравнение) упругой жидкости, описывающее зависимость ее плотности ρ от гидродинамического давления p имеет вид [1, 2]

$$\rho \cong \rho_0 \left[1 + \beta_{ж} (p - p_0) \right] , \tag{1}$$

где ρ_0 - начальное значение плотности при некотором зафиксированном гидродинамическом давлении p_0, например, при пластовом давлении в начальный момент времени, а $\beta_{ж}$ - объемный коэффициент упругости (или сжимаемости) жидкости.

Представляет интерес оценка «колебания плотности» $\Delta\rho$ - разность между возможным максимальным и минимальным значением плотности жидкости в данной точке пласта. Согласно экспериментальным данным $\beta_{ж} \approx 10^{-3} \dfrac{1}{МПа}$ [1], а перепад давлений $\Delta p = p_{max} - p_{min}$ в пласте для практических условий составляет величину порядка $10 МПа$ [1]. По формуле (1) для этих данных для относительного изменения плотности жидкости $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0} = \beta_{ж} \cdot \Delta p$ в каждой точке пласта получим значение порядка $\approx 1\%$. Это говорит о том, что в каждой точке пласта и при переходе от одной его точки к другой плотность жидкости при изменении давления в максимально возможных для практики пределах меняется весьма незначительно.

Уравнение состояния упругой изотропной неоднородной пористой среды, описывающее зависимость ее пористости m от гидродинамического давления p в простейшем случае имеет вид [1, 2]:

$$m = m_0 (x, y, z) + \beta_c (x, y, z) \cdot (p - p_0) , \tag{2}$$

где $m_0(x,y,z)$ – начальное распределение пористости, соответствующее начальному пластовому давлению p_0, выбираемому так же, как и для определения начальной плотности жидкости, $\beta_c(x,y,z)$ - коэффициент объемного сжатия пористой среды, а x,y,z - декартовые координаты точек пласта. (Зависимостью проницаемости среды от давления в линейных математических моделях, следуя классической теории [1, 2] упругой фильтрации, пренебрегаем).

Математической формулировкой закона сохранения массы фильтрующейся жидкости является уравнение неразрывности, для вывода которого, как хорошо известно, нужно выделить в пласте его произвольную пространственную часть V с ограничивающей ее замкнутой поверхностью S. Предполагается, что внутри всей области движения, в том числе внутри V, жидкость движется без разрывов в ее сплошности, все величины, характеризующие фильтрационный неустановившийся поток жидкости, являются конечными, непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и времени и в рассматриваемой области отсутствуют источники и стоки. За время Δt изменение ΔM_V массы жидкости внутри элементарного объема V находим путем баланса притока и утечки жидкости через ограничивающую объем замкнутую поверхность S. Как известно, величина ΔM_V равна потоку за время Δt векторного поля $\rho \cdot \vec{v}$ через внешнюю сторону поверхности S:

$$\Delta M_V = \Delta t \cdot \oiint\limits_S (\rho \cdot \vec{v}, \vec{n}) dS \cong \Delta t \cdot \rho_0 \cdot \oiint\limits_S (\vec{v}, \vec{n}) dS . \tag{3}$$

При подсчете величины ΔM_V в (3) учтено замечание о том, что в первом приближении плотность жидкости можно считать постоянной, равной $\rho \cong \rho_0 = const$. Применяя далее к поверхностному интегралу в правой части формулы (3) теорему Гаусса-Остроградского, окончательно для ΔM_V получим выражение

$$\Delta M_V = \Delta t \cdot \rho_0 \cdot \oiint\limits_S (\vec{v}, \vec{n}) dS = \Delta t \cdot \rho_0 \cdot \iiint\limits_V div\, \vec{v} \cdot dV . \tag{4}$$

С другой стороны, изменение массы жидкости внутри выделенного элементарного объема можно подсчитать как разность масс в разные моменты времени t и $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \Delta M_V = \iiint\limits_V \left[\rho(x,y,z,t) \cdot m(x,y,z,t) - \rho(x,y,z,t+\Delta t) \cdot m(x,y,z,t+\Delta t)\right] \cdot dV \cong \\ \cong -\Delta t \cdot \iiint\limits_V \frac{\partial (\rho \cdot m)}{\partial t} \cdot dV \end{aligned} . \tag{5}$$

Обращаем внимание, что в формуле (5), приближенное равенство $\rho \cong \rho_0 = const$ не применяется, так как в случае его использования в математической модели будет учитываться только сжимаемость пористого пласта и не учитываться, хотя и весьма малая, сжимаемость жидкости. (О частной математической модели фильтрации несжимаемой жидкости в упруго-деформируемом пласте ниже делается специальное замечание).

Далее, как обычно, приравниваем величины ΔM_V в формулах (4) и (5) друг к другу и после сокращения Δt, получаем:

$$\iiint_V \left[\rho_0 \cdot div\ \vec{v} + \frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} \right] \cdot dV = 0 . \qquad (6)$$

Равенство нулю последнего интеграла в силу произвольного выбора элементарного объема V возможно лишь при условии обращения в нуль выражения в квадратной скобке в каждой точке области фильтрации, т.е.

$$\rho_0 \cdot div(\vec{v}) + \frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение неразрывности в виде (7) и применяется в построении упрощенных линейных математических моделей упругой фильтрации жидкости.

Обобщенный закон Дарси линейной фильтрации сжимаемой жидкости в изотропной как однородной, так и неоднородной пористой среде записывается в виде формулы [1, 2]:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu}\left(grad\ p + \rho g \vec{e}_z\right) \qquad (8)$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости фильтрации, K – коэффициент проницаемости пористой среды, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, $grad\, p$ – вектор-градиент гидродинамического давления, g – ускорение свободного падения, $\vec{e}_z$ – единичный вектор, направленный вертикально верх по оси z декартовой системы координат x, y, z.

Снова вспомним, что ρ практически не отличается от постоянной величины ρ_0 и заменим в уравнении (8) переменную плотность ее начальной величиной. Тогда учитывая, что $\rho_0 \cdot g \cdot \vec{e}_z = grad\left(\rho_0 \cdot g \cdot z\right)$, получим

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu}\left(grad\ p + \rho_0 g \vec{e}_z\right) = -\frac{K}{\mu} \cdot grad\left(\ p + \rho_0 g z\right). \qquad (9)$$

Введем теперь в рассмотрение (по аналогии с теорией фильтрации несжимаемой жидкости) величину $P = p + \rho_0 g z$ – приведенное давление. Тогда динамическое уравнение линейной фильтрации малосжимаемой упругой жидкости в изотропной неоднородной (в частном случае, однородной) пористой среде окончательно запишется в виде

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} grad\, P . \qquad (10)$$

Уравнения (1), (2), (7) и (10) представляют собой замкнутую систему для определения независимых величин $\vec{v}, \rho, p, m$. Для вывода основного дифференциального уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде, позволяющего вычислить $\vec{v}, \rho, p, m$, надо объединить упомянутые выше уравнения. Для этого сначала в уравнение неразрывности (7) подставим выражение для скорости фильтрации из (10):

$$\rho_0 \cdot div\left(-\frac{K}{\mu} grad\, P\right) + \frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} = 0. \qquad (11)$$

Проницаемость пористой среды $K(x,y,z)$ представим в виде

$$K(x,y,z) = k_0 \cdot k(x,y,z), \qquad (12)$$

где k_0 – постоянный коэффициент с размерностью проницаемости, а $k(x,y,z)$– безразмерная функция координат точек пласта. С учетом выражения (12) для проницаемости среды, уравнение (11) запишется в виде

$$\frac{\rho_0 k_0}{\mu} \cdot div\left[k(x,y,z) \cdot grad\, P\right] = \frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t}. \qquad (13)$$

Для расчета произведения $\rho \cdot m$ воспользуемся выражениями (1) и (2). Получим:

$$c \cdot m = \rho_0 m_0 \left[1 + \frac{\beta^*}{m_0}(p - p_0) + \frac{\beta_c \beta_{ж}}{m_0} \cdot (p - p_0)^2\right], \qquad (14)$$

где $\beta^*(x,y,z) = \beta_c(x,y,z) + m_0(x,y,z) \cdot \beta_{ж}$ – коэффициент, называемый коэффициентом упругоемкости пласта [1, 2]. Поскольку третье слагаемое в квадратной скобке последней формулы значительно меньше первых двух [1, 2], то им пренебрегают и считают

$$c \cdot m \cong \rho_0 m_0 \left[1 + \frac{\beta^*}{m_0}(p - p_0)\right]. \qquad (15)$$

Согласно (15) и формулы $P = p + \rho_0 gz$, для производной по времени $\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t}$ в правой части (14) получаем значение

$$\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t} = \rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 \beta^* \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (16)$$

После подстановки $\frac{\partial(\rho \cdot m)}{\partial t}$ из (16) в (13) получаем следующее дифференциальное уравнение линейной математической модели упругого режима фильтрации в изотропных неоднородных средах

$$\frac{\rho_0 k_0}{\mu} \cdot div\left[k(x,y,z) \cdot grad\, P\right] = \rho_0 \beta^* \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (17)$$

Введем в уравнение (17) коэффициент пьезопроводности κ. Как известно [1, 2], коэффициент пьезопроводности определяется по формуле

$$\kappa(x,y,z) = \frac{k_0}{\mu \cdot \beta^*(x,y,z)}. \qquad (18)$$

Поэтому окончательно, взамен нелинейного уравнения (1.102) в [1], получаем следующее основное линейное уравнение трехмерной упругой фильтрации жидкости в изотропной неоднородной среде

$$\kappa(x,y,z)\cdot div\left[k(x,y,z)\cdot grad\,P\right]=\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{19}$$

Замечание 1. В случае фильтрации несжимаемой жидкости ($\beta_{ж}=0$) в упруго-деформируемом пласте, коэффициент упругоемкости пласта $\beta^*(x,y,z)=\beta_c(x,y,z)$. Поэтому для этого случая в формуле для коэффициента пьезопроводности (18) нужно заменить $\beta^*(x,y,z)$ на $\beta_c(x,y,z)$. В остальном вид уравнения (19) не изменится.

Замечание 2. В частном случае трехмерной упругой фильтрации жидкости в изотропных однородных пластах уравнение (19) принимает вид классического уравнения (1.44) в [1]

$$\kappa\cdot div(grad\,P)=\frac{\partial P}{\partial t} \tag{20}$$

с постоянным коэффициентом пьезопроводности κ.

В природных условиях пласты-коллекторы нефти и газа имеют искривленную форму и переменную толщину. Кроме того, их проницаемость, пористость, упругоемкость и пьезопроводность могут зависеть от координат точек пласта-коллектора. Поэтому для практики представляют интерес линейные математические модели упругой фильтрации в искривленных изотропных неоднородных пластах, ограниченных непроницаемыми кровлей и подошвой.

Для построения математических моделей упругой фильтрации в искривленных пластах введем в рассмотрение такие ортогональные криволинейные координаты ξ,η,ζ, в которых непроницаемые подошва и кровля представляют собой $\zeta-$ координатные поверхности $\zeta=\zeta_1=const$ и $\zeta=\zeta_2=const$ соответственно. Связь декартовых координат x,y,z с криволинейными задаем зависимостями $x=x(\xi,\eta,\zeta)$, $y=y(\xi,\eta,\zeta)$, $z=z(\xi,\eta,\zeta)$. При этом в области фильтрации между криволинейными и декартовыми координатами подразумевается существование взаимно однозначного соответствия. Далее, пользуясь известными формулами векторного анализа, запишем уравнение (19) в ортогональных криволинейных координатах:

$$\begin{gathered}\frac{\kappa(\xi,\eta,\zeta)}{H_1H_2H_3}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\cdot k(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\cdot k(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\cdot k(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{\partial P}{\partial\zeta}\right)\right\}=\frac{\partial P}{\partial t}\end{gathered}, \tag{21}$$

где H_1, H_2, H_3 – параметры Ламе.

Для построения **точного решения** задач упругого режима фильтрации в криволинейных пластах с непроницаемыми кровлей и подошвой требуется решить начально-краевую задачу для уравнения (21) с заданными начальным и граничными условиями (которые сейчас не приводим). Это представляет весьма сложную математическую задачу. Однако эта задача может быть упрощена, если исследуется упругая фильтрация жидкости в достаточно тонких искривленных пластах.

Криволинейный пласт-коллектор, ограниченный непроницаемыми подошвой $\zeta = \zeta_1 = const$ и кровлей $\zeta = \zeta_2 = const$ будем называть *весьма тонким* (в краткой речи – *тонким*), если, во-первых, можно пренебречь изменениями параметров Ламе по толщине пласта и считать их равными своим средним значениям:

$$H_1 \cong \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_1(\xi,\eta,\zeta) d\zeta = h_1(\xi,\eta) \ , \tag{22}$$

$$H_2 \cong \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_2(\xi,\eta,\zeta) d\zeta = h_2(\xi,\eta) \ , \tag{23}$$

$$H_3 \cong \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_3(\xi,\eta,\zeta) d\zeta = \frac{H(\xi,\eta)}{\zeta_2 - \zeta_1} \ . \tag{24}$$

Подчеркнем, что в формуле (24) $H(\xi,\eta)$ представляет собой длину дуги ζ – координатной линии соединяющей подошву и кровлю пласта и характеризующей толщину тонкого слоя. Во-вторых, проницаемость и пьезопроводность в тонких искривленных пластах естественно считать зависящими только от координат ξ и η, т.е. $k = k(\xi,\eta)$ и $\kappa = \kappa(\xi,\eta)$. В-третьих, координатные поверхности $\zeta = const$ в тонких искривленных пластах принимаются за поверхности тока течения. Это значит, что в каждой точке пласта проекция скорости фильтрации $v_\zeta = 0$ и, следовательно, согласно закону Дарси (10) $\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0$. Из последнего в свою очередь следует, что приведенное давление в тонких искривленных пластах будет функцией вида $P = P(\xi,\eta,t)$.

С учетом всех трех перечисленных допущений после подстановки параметров Ламе из (22), (23), (24) и приведенного давления в виде функции $P = P(\xi,\eta,t)$ в уравнение в (21) приходим к уравнению

$$\begin{gathered} \kappa(\xi,\eta) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_2(\xi,\eta)}{h_1(\xi,\eta)} \cdot k(\xi,\eta) \cdot H(\xi,\eta) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_1(\xi,\eta)}{h_2(\xi,\eta)} \cdot k(\xi,\eta) \cdot H(\xi,\eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = h_1(\xi,\eta) \cdot h_2(\xi,\eta) \cdot H(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \end{gathered} . \tag{25}$$

Уравнение (25) является основным дифференциальным уравнением в линейной математической модели упругой фильтрации жидкости в тонких искривленных изотропных **неоднородных** (в частном случае – в однородных) пластах.

По-видимому, впервые уравнение упругой фильтрации жидкости в тонких искривленных изотропных **однородных** пластах без вывода приводилось Ю. А. Гладышевым [3] в 1970 г. Однако между уравнением (25) и уравнением в [3] есть существенные отличия. В (25) одновременно задаются и подошва и кровля пласта ζ – координатными поверхностями выбранной ортогональной системы координат ξ,η,ζ, а в [3] заранее задается только одна криволинейная поверхность подошвы, на которой должны быть выбраны изотермические координаты x_1, x_2. Вместо криволинейной поверхности кровли в [3] задается функция $H(x_1, x_2)$, определяющая длину перпендикуляра до кровли пласта, восстановленного в точке (x_1, x_2) его подошвы, называемая толщиной слоя. В уравнении (25) аналогом $H(x_1, x_2)$ выступает длина $H(\xi,\eta)$ дуги ζ – координатной линии соединяющей подошву и кровлю пласта. Далее, при выводе уравнения (25) поверхности тока течения в криволинейном пласте моделируются ζ – координатными поверхностями, а при выводе соответствующего уравнения в [3] вектора скорости фильтрации считаются расположенными параллельно подошве слоя, что может иметь место лишь в слоях с постоянной, а не переменной толщиной $H(x_1, x_2)$. Поэтому уравнение (25) по сравнению с уравнением [3] точнее описывает упругие фильтрационные течения в тонких искривленных неоднородных пластах переменной толщины. Для очень тонких однородных криволинейных слоев оба подхода будут приводить практически к одинаковым результатам. В случае плоскопараллельных однородных пластов оба уравнения (25) и [3] оказываются, естественно, одинаковыми.

Литература

1. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. – М.: Нефть и газ, 1995, ч. 1, 586 с.
2. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Учебное пособие для вузов. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 544 с.
3. Гладышев Ю. А. Некоторые вопросы нестационарной фильтрации в искривленном слое переменной толщины. // Гидродинамика. (Материалы совещания секции физики по гидродинамике 14-15 апреля 1970 года). – М.: МОИП, 1970, с. 7-12.

УДК 532.546

ЭВОЛЮЦИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ СТЕПЕННОМ СЛОЕ ГРУНТА [1]

Ю.С. Федяев
Россия, Орловский государственный университет,
e-mail: fedyaevys@gmail.com

Для поля скоростей ставится двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в кусочно-неоднородном степенном слое грунта. Исследование задачи сводится к решению системы интегральных и дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений. Предлагается численный алгоритм решения полученных уравнений на основе метода дискретных особенностей. Исследованы конкретные задачи эволюции границы раздела жидкостей. Показана практическая сходимость численной схемы.

Исследуем двумерное движение границы раздела жидкостей различной вязкости в тонком слое проводимости $P = KH$ (K – коэффициент проницаемости слоя, H – его толщина). Полагаем, что движение жидкости обусловлено источниками (стоками) течения. На горизонтальной плоскости основания слоя выберем декартовы оси координат Oxy. Пусть неподвижная граница Γ делит неограниченную область фильтрации D на области D_1 и D_2, в которых слои характеризуются проводимостями P_1 и P_2. Полагаем, что $P_\nu = k_\nu P(M)$, где k_ν – постоянные, $\nu = 1,2$, $M = M(x, y)$ – точка в плоскости основания слоя. Здесь $P(M)$ – степенная функция координат вида

$$P(M) = y^s,\ s > 0. \tag{1}$$

Считаем, что скачок проводимости на границе Γ обусловлен изменением коэффициента проницаемости грунта.

В начальный момент времени в области D_1 имеется изменяющаяся с течением времени область D_t, ограниченная кривой Γ_t, в которой движется жидкость постоянной вязкости μ_2. Вне области D_t находится жидкость постоянной вязкости μ_1. Полагаем, что конфигурация области D_t и её границы Γ_t в начальный момент времени $t = 0$ известна и обозначим их D_0 и Γ_0 соответственно. Положение границы Γ_0 определяется параметрическим уравнением (σ – параметр):

$$\text{при } t = 0 \quad \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \quad M \in \Gamma_0. \tag{2}$$

Из закона изменения проводимости слоя (1) следует, что в области течения D присутствует сингулярная линия $L_0 : y = 0$, на которой проводимость слоя обращается в ноль. Она служит границей области фильтрации D, для которой координата $y > 0$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

Решение задачи о движении границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое сводится к эволюционной задаче для системы интегрального и интегро-дифференциальных уравнений с начальными условиями (2) [1].

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N - \int\limits_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) d\ell_N = \vec{\upsilon}_0(M,t),$$

$$M \in \Gamma_t . \qquad (3)$$

$$g(M,t) - 2\lambda_k \left(\int\limits_{\Gamma} g(N,t) \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N + 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}_B^*(M,N) \cdot \vec{\tau}_M d\ell_N \right) =$$

$$= 2\lambda_k \vec{\upsilon}_0(M,t) \cdot \vec{\tau}_M , \quad M \in \Gamma . \quad (4)$$

Здесь параметр $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\vec{\tau}_M$ – единичный вектор касательной к границе в точке M, $\vec{V}_B^*(M,N) = \vec{V}_B(M,N)/K(N)$, $\vec{V}_B$ – скорость вихря с циркуляцией равной –1, $g(N,t)$ – плотность распределения особых точек по границе Γ, $\vec{\upsilon}_0$ – скорость течения в отсутствии границ Γ и Γ_t ($k_1 = k_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$). С помощью метода дискретных особенностей решение системы уравнений (3), (4) при начальных условиях (2) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно координат положения границы Γ_t и плотности $g(M,t)$ [1].

Исследуем работу системы нагнетательной и эксплуатационной скважин в кусочно-неоднородном слое постоянной толщины ($H = 1$, $K = y^s$, $s > 0$). Нагнетательную скважину моделируем источником полной мощности $q_и$, а эксплуатационную – стоком полной мощности $q_с$. Эта задача соответствует так называемому направляемому или пробному заводнению [2]. Считаем, что нагнетательная скважина находится в точке с координатами $(x_и, y_и)$, а эксплуатационная – в точке $(x_с, y_с)$. Для потенциала невозмущённой скорости в рассматриваемом случае имеем [3]

$$\varphi_0 = -\frac{q_и}{2\pi} (yy_и)^{-\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_и) - \frac{q_с}{2\pi} (yy_с)^{-\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_с). \qquad (5)$$

Здесь $\omega_{и(с)} = \dfrac{(x - x_{и(с)})^2 + y^2 + y_{и(с)}^2}{2yy_{и(с)}}$, Q_ν – функция Лежандра второго рода.

Невозмущённое поле скоростей вычисляется по формуле

$$\vec{\upsilon}_0 = K \nabla \varphi_0 . \qquad (6)$$

Функцию тока вихря Ψ имеет вид

$$\Psi = \frac{\gamma}{2\pi} (y\eta)^{\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}}(z). \qquad (7)$$

Здесь (ξ, η) – точка расположения вихря, $z = \dfrac{(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2}{2y\eta}$, $\gamma = -1$.

Считаем, что скважины работают с постоянными равными по модулю дебитами. То есть $q_{\text{и}} = q$, $q_{\text{с}} = -q$. Скважины находятся на расстоянии c от сингулярной линии L_0. Расстояние между источником и стоком обозначим d. Ось Oy проведём посередине между скважинами. Тогда для их координат получим $(x_{\text{и}}, y_{\text{и}}) = (-d/2, c)$, $(x_{\text{с}}, y_{\text{с}}) = (d/2, c)$. Границу Γ будем моделировать окружностью радиуса R, центр которой находится посередине между источником и стоком в точке $(0, c)$. Первоначальное положение границы Γ_t совпадает с контуром нагнетательной скважины и представляет собой окружность радиуса R_0 с центром в точке расположения источника.

В качестве характерного размера выберем расстояние d. За характерное время T возьмём время T_z загрязнения эксплуатационной скважины нагнетаемой жидкостью при отсутствии границы Γ ($\lambda_k = 0$) и сингулярной линии L_0 (однородный слой) для модели «разноцветных» жидкостей ($\lambda_\mu = 0$). Это время определяется по формуле

$$T = \frac{\pi d^2}{3q} \quad (R_0 << d). \tag{8}$$

В этом случае безразмерный дебит $q = \pi/3$. Также положим $c = d$, $R_0 = R_c = 0{,}01d$, $R = 0{,}125d$.

На рис. 1 показана эволюция границы Γ_t в слое $K = y^2$ при $\lambda_k = 0{,}5$ и $\lambda_\mu = 0{,}5$, а на рис. 2 при $\lambda_k = -0{,}5$ и $\lambda_\mu = 0{,}5$. Видим, что нагнетаемая жидкость преимущественно движется в направлении увеличения проницаемости слоя (вдоль оси Oy). В менее проницаемой области D_2 ($\lambda_k > 0$) движение нагнетаемой жидкости замедляется. Когда же область D_2 более проницаема ($\lambda_k < 0$), то жидкость вязкости μ_2 движется в ней быстрее, чем в области D_1. Аналогичный вид имеет эволюция границы Γ_t в слое $K = y^4$.

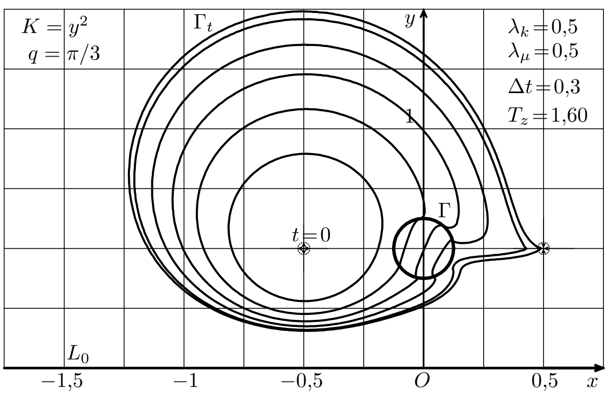


Рис. 1. Эволюция границы Γ_t в слое при $s = 2$, $\lambda_k = 0{,}5$ и $\lambda_\mu = 0{,}5$

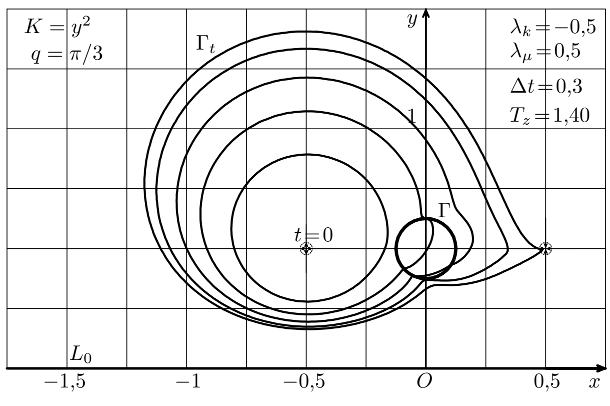


Рис. 2. Эволюция границы Γ_t в слое при $s = 2$, $\lambda_k = -0{,}5$ и $\lambda_\mu = 0{,}5$

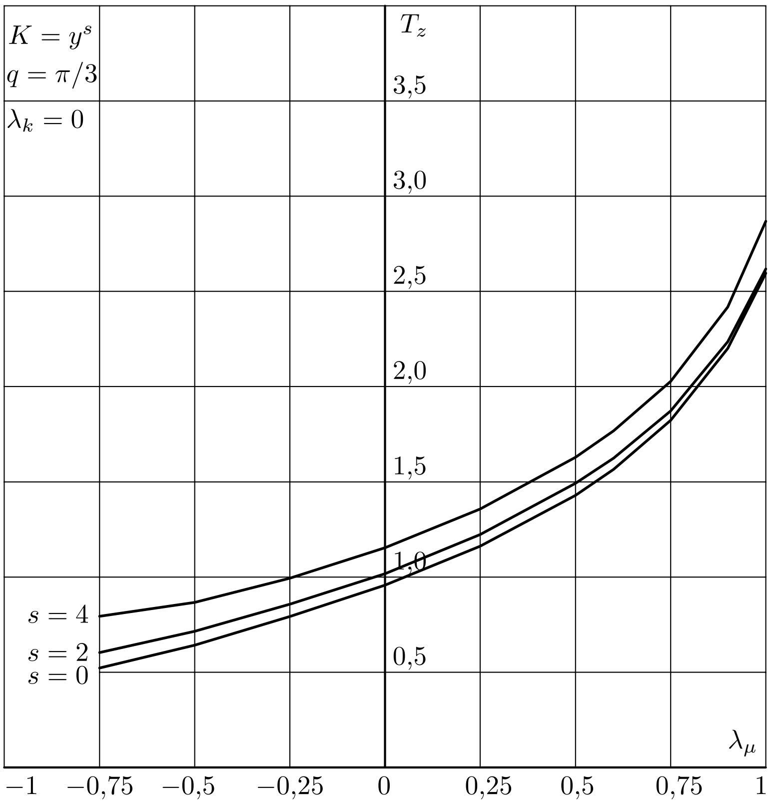


Рис. 3. Зависимость времени T_z от параметра λ_μ

На рис. 3 показана зависимость времени загрязнения эксплуатационной скважины T_z от параметра λ_μ для различных значений параметра s. Случаю $s = 0$ соответствует однородный слой грунта, ограниченный непроницаемой границей L_0. При расчётах полагали, что граница Γ отсутствует (параметр $\lambda_k = 0$). Видим, что с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости (параметра λ_μ) время T_z растет. Также наблюдается увеличение времени T_z с ростом степени неоднородности слоя (параметра s).

Практическая сходимость нахождения времени T_z для исследуемой задачи представлена в табл. 1 и табл. 2 для слоя $K = y^2$, а в табл. 3 и табл. 4 для слоя $K = y^4$. При расчётах полагали, что $\lambda_k = 0,5$ и $\lambda_\mu = 0,5$. В таблицах обозначено: n – число точек разбиения границы Γ_t; T_1 – время T_z, найденное при условии, что максимальное смещение точек границы $\Delta R_{\max} = 0,01$; T_2 – время T_z, найденное при условии $\Delta R_{\max} = 0,005$. Параметры η_1 и η_2 показывают как изменяется время T_z при увеличении числа точек разбиения на подвижной границе и определяются по формуле:

$$\eta_i = \left(T_i^{n_2} \Big/ T_i^{n_1} - 1 \right) \cdot 100\%, \quad i = 1, 2. \qquad (9)$$

Здесь $T_i^{n_1}$ – время T_i, найденное при $n = n_1$; $T_i^{n_2}$ – время T_i, найденное при следующем значении числа точек разбиения на подвижной границе $n = n_2$. Таблицам 1 и 3 соответствует число точек разбиения на границе сопряжения слоёв $m = 100$, а таблицам 2 и 4 соответствует $m = 200$. Видим, что с увеличением числа точек разбиения на подвижной границе величины η_1 и η_2 уменьшаются, то есть наблюдается практическая сходимость. Также замечаем, что параметр η_2 уменьшается быстрее, чем параметр η_1. То есть уменьшение шага по времени улучшает сходимость.

Табл. 1. Сходимость численного счёта при $m = 100$ и $s = 2$

n	100	200	300	400
T_1	1,4878	1,5168	1,5200	1,5222
T_2	1,4924	1,5223	1,5300	1,5377
η_1, %	–	1,95	0,21	0,14
η_2, %	–	2,00	0,51	0,50

Табл. 2. Сходимость численного счёта при $m = 200$ и $s = 2$

n	100	200	300	400
T_1	1,4888	1,5110	1,5191	1,5228
T_2	1,4895	1,5214	1,5318	1,5347
η_1, %	–	1,49	0,54	0,24
η_2, %	–	2,14	0,68	0,19

Табл. 3. Сходимость численного счёта при $m = 100$ и $s = 4$

n	100	200	300	400
T_1	1,6849	1,7048	1,7171	1,7217
T_2	1,6804	1,7176	1,7296	1,7306
η_1, %	–	1,18	0,72	0,27
η_2, %	–	2,21	0,70	0,06

Табл. 4. Сходимость численного счёта при $m = 200$ и $s = 4$

n	100	200	300	400
T_1	1,6714	1,7151	1,7235	1,7218
T_2	1,6818	1,7201	1,7304	1,7317
η_1, %	–	2,61	0,49	0,10
η_2, %	–	2,28	0,60	0,08

Литература

1. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование двумерной эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородных слоях грунта // Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Выпуск 3. Орёл. ОГУ. 2004. С. 54-63.
2. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: «Мир», 1964. 351 с.
3. Пивень В.Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей //ПММ. 1997. Т.61, вып.4. С. 595-605.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ С ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ (ЗАВЕСОЙ) В ПЛАСТЕ ГРУНТА[1]

М.А. Фролов
Орловский государственный институт экономики и торговли,
e-mail: mark.75@list.ru

Ставится плоскопараллельная задача о дебите скважины при наличии полупроницаемой замкнутой трещины (завесы) в пласте. В отличие от [2], где рассмотрены канонические границы (прямая, окружность), методом дискретных особенностей задача решается численно, что позволяет моделировать границы контуров произвольными гладкими и кусочно-гладкими кривыми.

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости в недеформируемой изотропной однородной пористой среде. Такое течение описывается законом Дарси и уравнением неразрывности, записанными в безразмерных величинах [4]:

$$\vec{v} = k\nabla\varphi, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{2}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\vec{v}$ — скорость фильтрации, φ — потенциал скорости, k — коэффициент проницаемости среды — постоянная (кусочно-постоянная) скалярная величина в случае однородной (кусочно-однородной) среды.

Пусть в некоторой точке области фильтрации $M_0 = (x_0, y_0)$ расположена совершенная эксплуатационная скважина дебита q. Работу скважины будем моделировать точечным стоком мощности q (см. [6]). Полагаем, что координаты центра скважины $M_0 = (x_0, y_0)$, а её контур L_c — окружность радиуса R_c. Контур питания L_n скважины ограничивает область фильтрации D. Пусть в этой области имеется замкнутая трещина произвольной формы, ограниченная гладкими контурами L_1 и L_2. Область D_1, ограниченная контуром L_1, и область D_3 между контурами L_2 и L_n, заполнены средой с коэффициентом проницаемости k_1, а сама трещина (завеса) — область D_2 — средой с коэффициентом проницаемости k_2 (для трещины $k_2>k_1$, для завесы $k_2<k_1$). Потенциалы скоростей течения в областях D_1, D_2 и D_3, обозначим соответственно φ_1, φ_2 и φ_3. Контуры L_n, L_1, L_2 моделируем гладкими кривыми. Поставим задачу о дебите скважины.

Функции φ_ν, $\nu = 1, 2, 3$ координат точки M, всюду в области D $\left(D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3\right)$ ограниченной Γ $\left(\Gamma = L_c \bigcup L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_n\right)$ удовлетворяют уравнению Лапласа [4, 6]:

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

$$\Delta\varphi_\nu(M)=0,\;\; \nu=1,2,3,\;\; M\in D. \qquad (3)$$

На контуре L_1 эти потенциалы удовлетворяют условиям непрерывности давления и расхода жидкости [1, 4-6]:

$$\varphi_1^-(M)=\varphi_2^+(M),$$
$$k_1\left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^- = k_2\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^+,\;\; M\in L_1, \qquad (4)$$

где знаками «-» и «+» отмечены предельные значения соответствующих функций при подходе к контуру L_1 из областей D_1 и D_2 (выбор единичных ортов нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ см. на рис. 1).

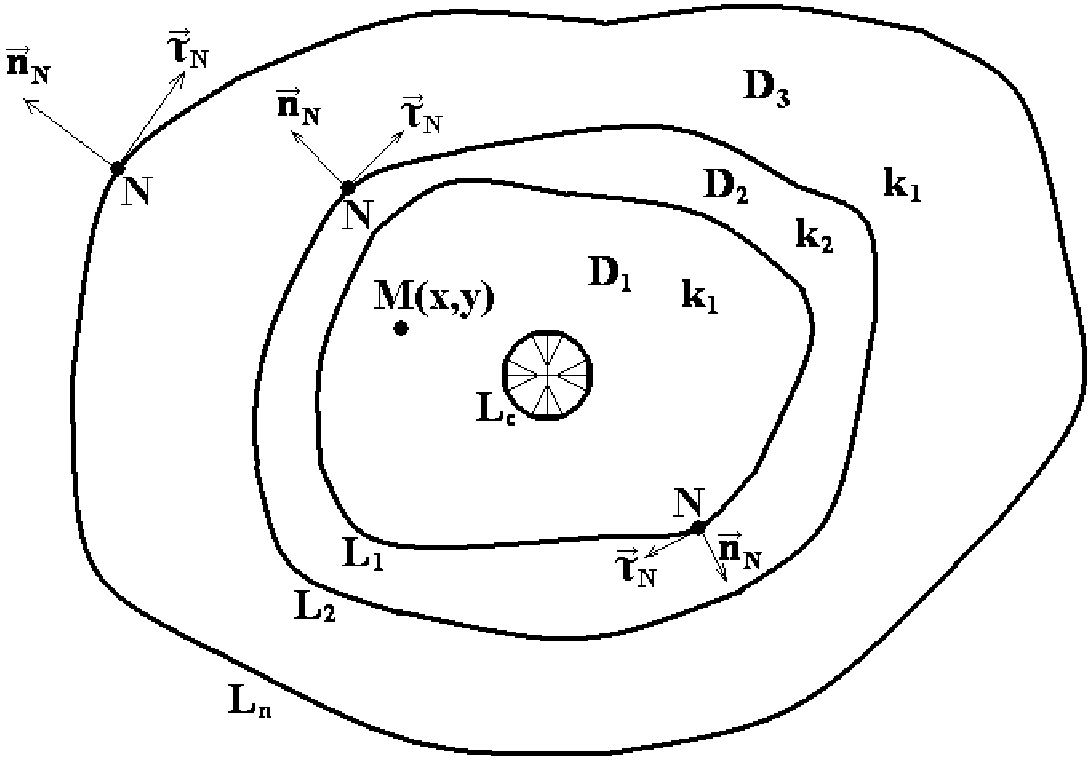


Рис. 1. Постановка задачи

На контуре L_2 аналогичным образом должны выполняться условия непрерывности давления и расхода жидкости:

$$\varphi_3^+(M)=\varphi_2^-(M),$$
$$k_1\left(\frac{\partial\varphi_3(M)}{\partial n_M}\right)^+ = k_2\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^-,\;\; M\in L_2. \qquad (5)$$

Течение жидкости в слое происходит вследствие разности давлений на контуре питания L_n и на контуре скважины L_c. Пусть на этих контурах заданы давления. Тогда согласно [6] на контурах L_n и L_c, имеем:

$$k_1\varphi_3(M)=\alpha(M),\;\; M\in L_n, \qquad (6)$$

$$k_1\varphi_1(M)=C, \qquad M\in L_c, \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная, $\alpha(M)$ — непрерывная периодическая функция координат.

Течение жидкости к скважине в отсутствии контуров L_n, L_1, L_2 и L_c описывает потенциал $\varphi_0(M)$ вида:

$$\varphi_0(M)=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+C_0, \tag{8}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, C_0 — некоторая постоянная.

Учтём потенциал (8) и решение задачи, следуя [4-6], представим в виде

$$\varphi_\nu(M)=\frac{\varphi_0(M)+\varphi_\nu^*(M)}{k_\mu},\ \nu=1,2,3, \tag{9}$$
$$(\mu=1 \text{ и } 2 \text{ при } \nu=1 \text{ и } 2;\ \mu=1 \text{ при } \nu=3).$$

Функции $\varphi_\nu^*(M)$ $(\nu=1,2,3)$ — потенциалы возмущений, вызванных наличием контуров L_n, L_1, L_2 и L_c. Поскольку потенциал $\varphi_0(M)$ удовлетворяет уравнению (3), то потенциалы возмущения $\varphi_\nu^*(M)$ также удовлетворяют этому же уравнению. Условия (4)-(7) для потенциалов $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu=1,2,3$ примут вид

$$\begin{gathered} k_2\varphi_1^{*-}(M)-k_1\varphi_2^{*+}(M)=(k_1-k_2)\varphi_0(M), \\ \left(\frac{\partial\varphi_1^*(M)}{\partial n_M}\right)^- = \left(\frac{\partial\varphi_2^*(M)}{\partial n_M}\right)^+,\ M\in L_1, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} k_2\varphi_3^{*+}(M)-k_1\varphi_2^{*-}(M)=(k_1-k_2)\varphi_0(M), \\ \left(\frac{\partial\varphi_3^*(M)}{\partial n_M}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_2^*(M)}{\partial n_M}\right)^-,\ M\in L_2, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\varphi_3^{*-}(M)=\alpha(M)-\varphi_0(M),\ M\in L_n, \tag{12}$$

$$\varphi_1^*(M)=C-\varphi_0(M), \qquad M\in L_c. \tag{13}$$

Таким образом, чтобы найти дебит q скважины, необходимо определить потенциалы $\varphi_1^*(M)$, $\varphi_2^*(M)$ и $\varphi_3^*(M)$, удовлетворяющие уравнению (3) и условиям (10)-(13).

Если контуры L_n, L_1, L_2 и L_c канонические, например, концентрические окружности радиусов R_n, R_1, R_2, R_c, решение задачи можно получить в конечном виде. Определим дебит скважины в этом случае.

В силу симметрии данной задачи течение будет радиальным, а потенциалы скоростей течений с учётом (8) и (9) будут иметь вид:

$$\varphi_1(M)=\frac{q}{2\pi k_1}\ln\frac{1}{r}+\frac{C_1}{k_1},\ R_c<r<R_1, \tag{14}$$

$$\varphi_2(M)=\frac{q}{2\pi k_2}\ln\frac{1}{r}+\frac{C_2}{k_2},\ R_1<r<R_2, \tag{15}$$

$$\varphi_3(M)=\frac{q}{2\pi k_1}\ln\frac{1}{r}+\frac{C_3}{k_1},\ R_2<r<R_n, \tag{16}$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые постоянные, вызванные наличием контуров L_n, L_1, L_2 и L_c. Удовлетворяя потенциалы (14)-(16) граничным условиям (4)-(7) получим:

$$\begin{cases} \frac{q}{2\pi k_1}\ln\frac{1}{R_1}+\frac{C_1}{k_1}=\frac{q}{2\pi k_2}\ln\frac{1}{R_1}+\frac{C_2}{k_2}, \\ \frac{q}{2\pi k_2}\ln\frac{1}{R_2}+\frac{C_2}{k_2}=\frac{q}{2\pi k_1}\ln\frac{1}{R_2}+\frac{C_3}{k_1}, \\ \frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{R_n}+C_3=\alpha(M), \\ \frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{R_c}+C_1=C. \end{cases} \tag{17}$$

Имеем систему четырёх уравнений и четырёх неизвестных q, C_1, C_2, C_3. Решая данную, систему получим выражение для дебита скважины:

$$q=\frac{2\pi(1-\lambda)(C-\alpha(M))}{(1-\lambda)\ln\frac{R_1R_n}{R_2R_c}-(1+\lambda)\ln\frac{R_1}{R_2}}, \tag{18}$$

где $\lambda=\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$, $\lambda\in[-1,1]$.

В случае границ L_n, L_1, L_2, моделируемых гладкими кривыми класса Ляпунова, задача о дебите сводится к системе интегральных уравнений.

Следуя [4-6], потенциалы возмущения $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu=1,2,3$ будем искать в виде потенциалов двойных слоёв:

$$\varphi_\nu^*(M)=\int_{L_1} g_\mu(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N+\int_{L_2} s_\mu(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N+$$

$$+\int_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N,\nu=1,2,3, \tag{19}$$

$$(\mu=1\text{ и }2,\text{ при }\nu=1\text{ и }2,\ \mu=1\text{ при }\nu=3),\ M\in D.$$

Здесь $g_\mu(N)$, $s_\mu(N)$, $\mu=1,2$ и $f(N)$ — плотности распределения особенностей на контурах L_1, L_2 и L_n соответственно; ∇_N — оператор

Гамильтона по координатам точки N; $G(N,M)$ — фундаментальное решение уравнения (3).

Согласно [3-6] находим предельное значение потенциала двойного слоя на границе контура L_n при приближении к нему из области D_3:

$$\begin{aligned}\varphi_3^{*-}(M) = \int\limits_{L_1} g_\mu(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int\limits_{L_2} s_\mu(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \\ + \int\limits_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N - \frac{f(M)}{2},\ M \in L_n.\end{aligned} \tag{20}$$

Предельные значения потенциала двойного слоя на границе контура L_1 при приближении к нему из областей D_1 и D_2 будут вида:

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2}^{*\,\mp}(M) = \int\limits_{L_1} g_{1,2}(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int\limits_{L_2} s_{1,2}(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \\ + \int\limits_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N \mp \frac{g_{1,2}(M)}{2},\ M \in L_1.\end{aligned} \tag{21}$$

Аналогично для контура L_2 имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{3,2}^{*\,\pm}(M) = \int\limits_{L_1} g_{1,2}(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int\limits_{L_2} s_{1,2}(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \\ + \int\limits_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N \pm \frac{s_{1,2}(M)}{2},\ M \in L_2.\end{aligned} \tag{22}$$

С учетом (8), (9), (20)-(22) удовлетворим (19) условиям (10)-(13).

Вторые условия (10), (11) обращаются в тождества, если $g_1(M) = g_2(M) = g(M)$, $s_1(M) = s_2(M) = s(M)$. Из первого условия (10) имеем интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}-2\lambda\Bigg(\int\limits_{L_1} g(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int\limits_{L_2} s(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \\ + \int\limits_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N\Bigg) - g(M) = 2\lambda\varphi_0(M),\ M \in L_1.\end{aligned} \tag{23}$$

Из первого условия (11) на контуре L_2 получим:

$$\begin{aligned}-2\lambda\Bigg(\int\limits_{L_1} g(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int\limits_{L_2} s(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \\ + \int\limits_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N\Bigg) + s(M) = 2\lambda\varphi_0(M),\ M \in L_2.\end{aligned} \tag{24}$$

Условие (12) на контуре питания примет вид:

$$2\left(\int_{L_1} g(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int_{L_2} s(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \right.$$
$$\left. + \int_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N \right) - f(M) = 2(\alpha(M) - \varphi_0(M)),\ M \in L_n. \quad (25)$$

Из условия (13) на контуре скважины получим интегральное соотношение:

$$\int_{L_1} g(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N + \int_{L_2} s(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N +$$
$$+ \int_{L_n} f(N)\nabla_N G(N,M)\vec{n}_N dS_N = C - \varphi_0(M),\ M \in L_c. \quad (26)$$

Уравнения (23)-(25) — неоднородные интегральные уравнения второго рода типа Фредгольма [4].

Таким образом, для определения дебита q скважины необходимо решать систему уравнений (23)-(26).

Решить аналитически систему (23)-(26) не представляется возможным, поэтому, используя развитый в [3-6] подход, решим задачу численно.

Сведем систему интегральных уравнений (23)-(25) и интегрального соотношения (26) к системе алгебраических уравнений. Зададим контуры L_1, L_2 и L_n параметрически. Для контура L_1 имеем:

$$x_N = x(t),\ y_N = y(t),\ x_M = x(t_0),\ y_M = y(t_0);\ \ t_0, t \in [0, S_1], \quad (27)$$

где t — параметр, t_0 — некоторое его значение, S_1 — длина контура L_1. Аналогично для контура L_2 получим:

$$x_N = x(\xi),\ y_N = y(\xi),\ x_M = x(\xi_0),\ y_M = y(\xi_0);\ \ \xi_0, \xi \in [0, S_2], \quad (28)$$

где ξ — параметр, ξ_0 — некоторое его значение, S_2 — длина контура L_2. Параметрическим заданием для контура L_n будет

$$x_N = x(\tau),\ y_N = y(\tau),\ x_M = x(\tau_0),\ y_M = y(\tau_0);\ \ \tau_0, \tau \in [0, S_n], \quad (29)$$

где τ — параметр, τ_0 — некоторое его значение, S_n — длина контура L_n.

Так как контуры L_1, L_2 и L_n обходим в направлении ортов касательных к этим контурам (см. Рис. 1.), то согласно [3] имеем:

$$\vec{r}_{NM} = \left((x(t) - x(t_0))\vec{i} + (y(t) - y(t_0))\vec{j}\right),\ \vec{n}_N = \frac{-y'_t\vec{i} + x'_t\vec{j}}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}},\ dS_N = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt,$$

$$\vec{r}_{NM} = \left((x(\xi) - x(\xi_0))\vec{i} + (y(\xi) - y(\xi_0))\vec{j}\right),\ \vec{n}_N = \frac{-y'_\xi\vec{i} + x'_\xi\vec{j}}{\sqrt{x_\xi'^2 + y_\xi'^2}},$$

$$dS_N = \sqrt{x_\xi'^2 + y_\xi'^2}\,d\xi.$$

$$\vec{r}_{NM}=\left(\left(x(\tau)-x(\tau_0)\right)\vec{i}+\left(y(\tau)-y(\tau_0)\right)\vec{j}\right),\ \vec{n}_N=\frac{-y'_\tau\vec{i}+x'_\tau\vec{j}}{\sqrt{{x'_\tau}^2+{y'_\tau}^2}},$$

$$dS_N=\sqrt{{x'_\tau}^2+{y'_\tau}^2}\,d\tau. \tag{30}$$

Запишем систему (23)-(26) в параметрическом виде с учётом (30):

$$\left\{\begin{aligned}
&-2\lambda\left(\int_0^{S_1}g(t)K(t,t_0)dt+\int_0^{S_2}s(\xi)K(\xi,t_0)d\xi+\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^{S_n}f(\tau)K(\tau,t_0)d\tau\right)-g(t_0)=2\lambda\varphi_0(t_0),\ t_0\in[0,S_1],\\
&-2\lambda\left(\int_0^{S_1}g(t)K(t,\xi_0)dt+\int_0^{S_2}s(\xi)K(\xi,\xi_0)d\xi+\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^{S_n}f(\tau)K(\tau,\xi_0)d\tau\right)+s(\xi_0)=2\lambda\varphi_0(\xi_0),\ \xi_0\in[0,S_2],\\
&2\left(\int_0^{S_1}g(t)K(t,\tau_0)dt+\int_0^{S_2}s(\xi)K(\xi,\tau_0)d\xi+\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^{S_n}f(\tau)K(\tau,\tau_0)d\tau\right)-f(\tau_0)=2\left(\alpha(\tau_0)-\varphi_0(\tau_0)\right),\ \tau_0\in[0,S_n],\\
&\int_0^{S_1}g(t)K(t,M)dt+\int_0^{S_2}s(\xi)K(\xi,M)d\xi+\int_0^{S_n}f(\tau)K(\tau,M)d\tau=C-\varphi_0(M),\\
&\qquad\qquad M\in L_c,
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

где $K(t,t_0)$, $K(\xi,t_0)$, $K(\tau,t_0)$, $K(t,\xi_0)$, $K(\xi,\xi_0)$, $K(\tau,\xi_0)$, $K(t,\tau_0)$, $K(\xi,\tau_0)$, $K(\tau,\tau_0)$, $K(t,M)$, $K(\xi,M)$, $K(\tau,M)$ — интегральные ядра [6]:

$$K(\beta,\beta_0)=\left[\frac{\partial G(x(\beta),y(\beta),x(\beta_0),y(\beta_0))}{\partial x(\beta)}y'_\beta-\frac{\partial G(x(\beta),y(\beta),x(\beta_0),y(\beta_0))}{\partial y(\beta)}x'_\beta\right],$$

$\beta=t,\xi,\tau;\ \beta_0=t_0,\xi_0,\tau_0,$

$$K(t,M)=\left[\frac{\partial G(x(t),y(t),x,y)}{\partial x(t)}y'_t-\frac{\partial G(x(t),y(t),x,y)}{\partial y(t)}x'_t\right],$$

$$K(\xi,M)=\left[\frac{\partial G(x(\xi),y(\xi),x,y)}{\partial x(\xi)}y'_\xi-\frac{\partial G(x(\xi),y(\xi),x,y)}{\partial y(\xi)}x'_\xi\right],$$

$$K(\tau,M)=\left[\frac{\partial G(x(\tau),y(\tau),x,y)}{\partial x(\tau)}y'_\tau-\frac{\partial G(x(\tau),y(\tau),x,y)}{\partial y(\tau)}x'_\tau\right].$$

Следуя [6], разобьём контуры L_1, L_2 и L_n по параметрам длин дуг t, ξ, τ на n_1, n_2, n_3 равных частей соответственно. Пусть шаги разбиения контуров h_1, h_2 и h_3. Пусть k, m, l и p — какие-либо фиксированные номера точек из множеств разбиения контуров L_1, L_2 и L_n. Согласно [6] используя правило прямоугольников, получим систему числа $n_1+n_2+n_3+1$ линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -2\lambda\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n_1} g_k K(t_k,t_m)h_1+\sum\limits_{k=1}^{n_2} s_k K(\xi_k,t_m)h_2+\sum\limits_{k=1}^{n_3} f_k K(\tau_k,t_m)h_3\right)-g_m= \\ \qquad\qquad = 2\lambda\varphi_0(t_m), \qquad m=1,\ldots,n_1, \\ -2\lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{n_1} g_k K(t_k,\xi_l)h_1+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n_2} s_k K(\xi_k,\xi_l)h_2+\sum\limits_{k=1}^{n_3} f_k K(\tau_k,\xi_l)h_3\right)+s_l= \\ \qquad\qquad = 2\lambda\varphi_0(\xi_l), \quad l=1,\ldots,n_2, \\ 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n_1} g_k K(t_k,\tau_p)h_1+\sum\limits_{k=1}^{n_2} s_k K(\xi_k,\tau_p)h_2+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{n_3} f_k K(\tau_k,\tau_p)h_3\right)-f_p= \\ \qquad\qquad = 2\left(\alpha(\tau_p)-\varphi_0(\tau_p)\right), \qquad p=1,\ldots,n_3, \\ \sum\limits_{k=1}^{n_1} g_k K(t_k,M)h_1+\sum\limits_{k=1}^{n_2} s_k K(\xi_k,M)h_2+\sum\limits_{k=1}^{n_3} f_k K(\tau_k,M)h_3= \\ \qquad\qquad = C-\varphi_0(M), M\in L_c, \end{cases} \tag{32}$$

Решая эту систему методом Гаусса, находим неизвестные величины: g_k $(k=1,\ldots,n_1)$, s_k $(k=1,\ldots,n_2)$, f_k $(k=1,\ldots,n_3)$ и дебит q.

Исследуем сходимость метода. Пусть величина $\eta=\dfrac{q_{chisl}}{q_{an}}-1$, где q_{chisl} — дебит найденный численно (путём решения системы (32)), а q_{an} — дебит, рассчитанный по формуле (18). На рис. 2. представлены графики зависимости $\eta(\lambda)$ для различного числа точек разбиения контуров L_1, L_2 и L_n. При расчёте полагалось: $R_n=1$, $R_1=0.1R_n$, $R_2=0.2R_n$, $R_c=0.01R_n$, $C=1$, $\alpha(M)=0$. Контуры расположены концентрично, т.е. $x_0=x_1=x_2=x_3=0$, $y_0=y_1=y_2=y_3=0$, где x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 — абсциссы и ординаты контуров L_c, L_1, L_2 и L_n соответственно. Разбиение контуров осуществлялось так, чтобы $h_1=h_2=h_3$. Например, если $n_3=100$, то, в нашем случае, $n_1=10$, $n_2=20$. Из графика видно, что с ростом числа точек разбиения контуров погрешность η уменьшается. Так при $n_3 = 600$ в интервале $\lambda \in [-0.8; 0.8]$ величина η не превышает 5%. Как видим, численный счёт даёт хорошее соответствие с формулой (18) в указанном интервале. В дальнейшем для исследований будем выбирать n_3 таким, чтобы величина η в крайних точках интервала λ не превышала 5%.

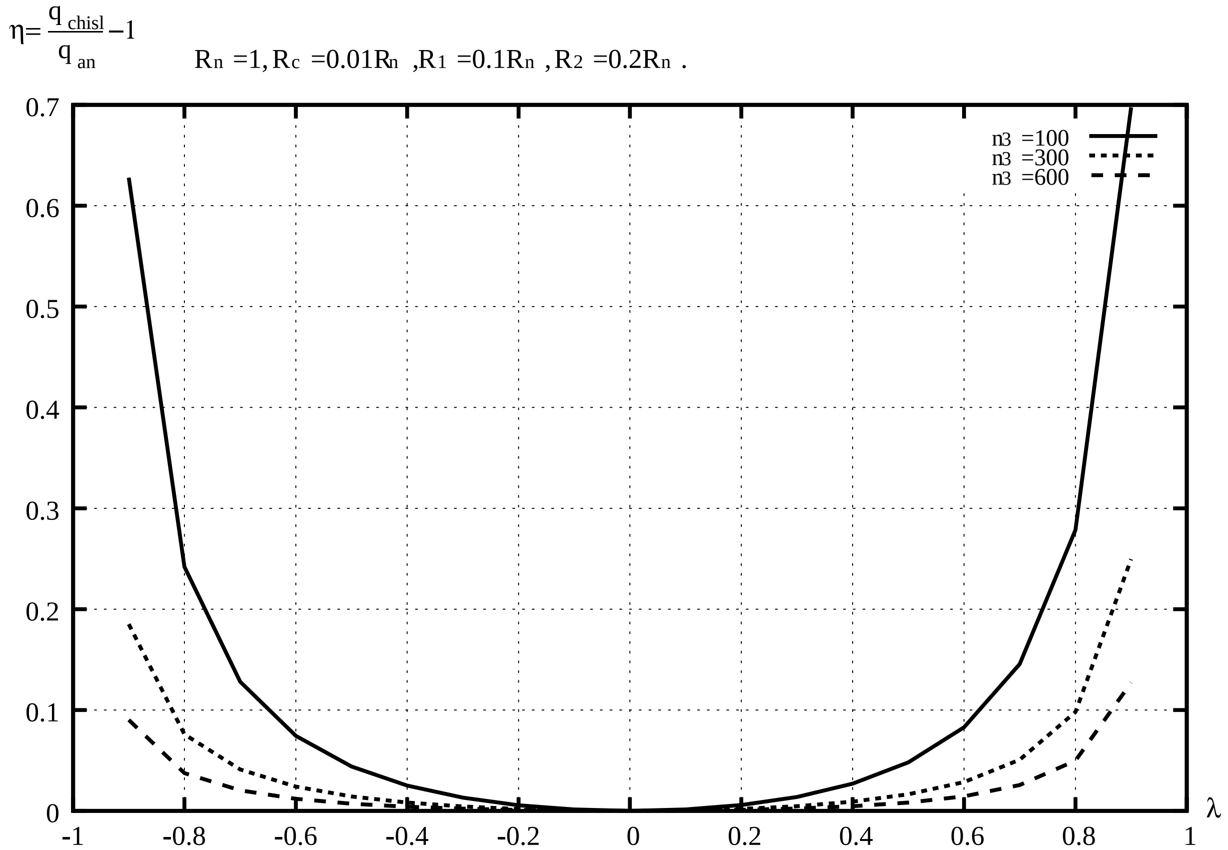


Рис. 2. Сходимость метода

Возрастание погрешности при $\lambda \to 1$ объясняется тем, что при $\lambda = 1$ задача некорректна. При $\lambda = -1$ контуром питания становится контур R_1. Аналитически здесь дебит определяется по формуле Дюпюи [1]:

$$q_0 = \frac{2\pi\left(C - \alpha(M)\right)}{\ln\dfrac{R_1}{R_c}}.$$

Из формулы (18) имеем:

$$q = \frac{2\pi\left(C - \alpha(M)\right)}{\ln\dfrac{R_1}{R_c} + \ln\dfrac{R_n}{R_2}}.$$

При $\lambda = -1$ и выбранных выше численных значениях величин $\eta = \dfrac{q_0}{q} - 1 = 41\%$. Такое различие в результатах обусловлено слагаемым $\ln\dfrac{R_n}{R_2}$ в знаменателе второй формулы.

Хорошее соответствие численного результата с формулой (18) в указанном интервале значений λ, даёт возможность в дальнейшем рассматривать и случаи эксцентричного расположения контуров L_n, L_1, L_2, L_c, а также моделировать границы контуров гладкими и кусочно-гладкими кривыми.

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука. 1971. 368 с.
2. Лайпанов Х.С. Влияние полукольцевой трещины переменной ширины на дебит скважины // Проблемы теоретической гидромеханики. Тула, Тулгоспединститут, 1977. – С. 45-48.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
4. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дисс. Орёл, Орловский гос. ун-т, 1998, 266 с.
5. Пивень В.Ф. Интегральное уравнение граничной задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородной среде. Труды IX международного симпозиума «МДОЗМФ - 2000». Орёл, 2000. С. 343-348.
6. Фролов М.А. Исследование двумерных граничных задач о дебитах системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Канд. дисс. – Орёл: ОГУ, 2001. – 148 с.

УДК 532.546

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА НА ВЕРХНЮЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

И.К. Волянская, И.Д. Дорогая, А.А. Зайцев, А.Я. Шпилевой
Россия, Российский государственный университет им. И. Канта,
e-mail: theory@albertina.ru

Получено новое представление для конформного отображения прямоугольника с произвольными длинами сторон на верхнюю полуплоскость, которая не требует решения трансцендентного уравнения для модуля эллиптических функций. Получены решения задачи теории фильтрации для прямоугольника.

1. Конформное отображение прямоугольника на верхнюю полуплоскость

Как известно [1 - 4], эллиптический синус w=sn(z,k) осуществляет конформное отображение прямоугольника $-\mathbf{K}(k)<\text{Re } z<\mathbf{K}(k)$, $0<\text{Im } z<\mathbf{K}(k')$ на верхнюю полуплоскость Im w>0 ($\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интерграл Лежандра 1-го рода, $k'=\sqrt{1-k^2}$).

Ситуация с произвольными длинами сторон a и b сложней. Отображение также выражается через эллиптический синус w=sn(z,k), где B=a/2**K**(k). Однако для определения модуля эллиптических функций k требуется решить трансцендентное уравнение **K**(k')/**K**(k)=2b/a, которое точно решается лишь в частных случае квадрата $k=3-2\sqrt{2}$, тогда $k'=2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)$, $\mathbf{K}(2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1))=2\mathbf{K}(3-\sqrt{2})\to\mathbf{K}(2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1))/2\mathbf{K}(3-\sqrt{2})=1$. В общем случае имеет место сложная формула:

$$k=4\left(\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}q^{(n+1/2)^2}}{1+2\sum_{n=1}^{+\infty}q^{n^2}}\right),q=\exp\left(\frac{-2\pi\pi}{a}\right),$$

что ведет к затруднениям при использовании для решения конкретных прикладных задач. Полезно получить другое представление для конформного отображения на верхнюю полуплоскость прямоугольника с произвольными длинами сторон a и b, чтобы не возникала проблема определения значения модуля эллиптических функций. Это делается в данной работе.

Пусть D – внутренность прямоугольника с вершинами в точках $z_1=0$, $z_2=a, z_3=a+ib, z_4=ib$ (рис. 1). Пусть ζ=H(z) – функция, голоморфная в области D, которая имеет там единственный простой ноль в центре прямоугольника – точке c=(a+bi)/2, и

H(z)|=1 на границе области D. (1)

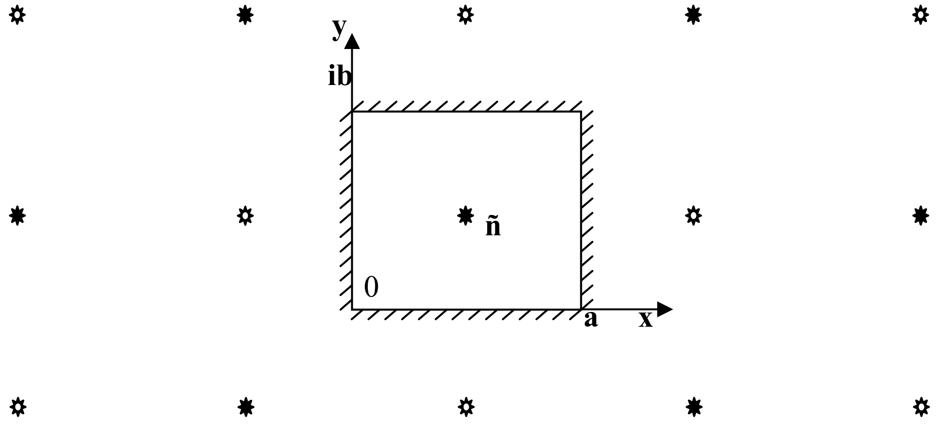


Рис. 1. Нули и полюсы функции H(z)

Этими условиями она полностью определяется с точностью до множителя exp(ia), где α – постоянное действительное число. Отражениями от сторон прямоугольника функция H(z) однозначно продолжается на всю комплексную плоскость так, что выполняются соотношения

$$\left|\mathbf{H(z)}\right| = \overline{\mathbf{H(s_k z)}} = 1, \mathbf{k} = 1,2,3,4, \tag{2}$$

где $s_k, k = 1,2,3,4$ – отражение от сторон прямоугольника (факторизованный вариант принципа симметрии Римана – Шварца). Условия (1) и (2) равносильны. Результатом продолжения будет мероморфная функция с простыми нулями в точках z=c+2ma+(a+bi)n и простыми полюсами в точках z=c+(2m+1)a+(a+bi)n, $m, n \in Z$ (рис.1) Одной из таких функций является

$$H(z) = \frac{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a}\middle|\tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z-c-a}{2a}\middle|\tau\right)}, \tau = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} i,$$

где $\theta_1(z)$ - тета-функция Якоби [1 – 5]. Поскольку мероморфная функция не определяется однозначно своим дивизором нулей и полюсов, необходима проверка выполнения соотношений (2). Для проверки нужно использовать нечетность функции $\theta_1(z|\tau)$, формулы преобразования при сдвиге ее аргумента на 1 и τ, а также специальное тождество

$$\overline{\theta_1(z|\tau)} = \exp(-\pi i/4)\theta_1(\bar{z}|\tau),$$

которое выводится из тригонометрического ряда для этой функции [5]. Результат проверки оказывается положительным.

Функция H(z) конформно отображает прямоугольник D на единичный круг $|\zeta| < 1$, причем центр прямоугольника, точка z=c, отображается в центр круга. Комбинируя это преобразование с отображением единичного круга $|\zeta| < 1$ на верхнюю полуплоскость Im z >0

$$\zeta \to w = -i\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \tag{3}$$

получаем следующую формулу для конформного отображения прямоугольника D на верхнюю полуплоскость:

$$w = -i\frac{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a}\middle|\tau\right) - \theta_1\left(\frac{z-c-a}{2a}\middle|\tau\right)}{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a}\middle|\tau\right) + \theta_1\left(\frac{z-c-a}{2a}\middle|\tau\right)}, \tau = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}i. \qquad (4)$$

Задача построения конформного отображения прямоугольника с произвольными длинами сторон a и b на верхнюю полуплоскость решена.

Каждую из двух косоугольных решеток нулей и полюсов функции H(z) можно расчленить на две прямоугольные решетки, для которых τ=bi/a. Это приводит к другому выражению для H(z):

$$w = -i\frac{\theta_1\left(\frac{z-c}{2a}\middle|\frac{b}{a}i\right) - \theta_1\left(\frac{z+c}{2a}\middle|\frac{b}{a}i\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar{c}}{2a}\middle|\frac{b}{a}i\right) + \theta_1\left(\frac{z+\bar{c}}{2a}\middle|\frac{b}{a}i\right)}.$$

Если его скомбинировать с преобразованием (3), то получится другое представление для преобразования прямоугольника D на полуплоскость Im w > 0. Хотя оно выглядит сложнее преобразования (4), но в некоторых случаях оказывается полезней.

Полученные результаты использованы при решении следующих задач.

2. Решение задач теории фильтрации для прямоугольника

Рассмотрим задачу построения комплексного потенциала источника, расположенного внутри прямоугольника. Для решения задачи удобно использовать метод изображения особых точек. В работах [6,7] получены решения задачи для случаев, когда границами прямоугольной области фильтрации являются непроницаемые стенки или область фильтрации окружена свободной жидкостью.

Решения выражены через сигма-функцию Вейерштрасса или тэта-функцию Якоби. Эти задачи можно также решить с помощью конформного отображения, рассмотренного в п.1.

Однако в работах [6,7] не рассмотрены случаи, когда граничные условия на границе области фильтрации различны. Метод изображения особых точек дает возможность решать задачу для этих случаев. Рассмотрим одну из таких задач. Пусть область фильтрации представляет собой прямоугольник со сторонами a и b. Полагаем, что область фильтрации ограничена сверху и снизу непроницаемыми стенками, а справа и слева ограничена свободной жидкостью (рис. 2.)

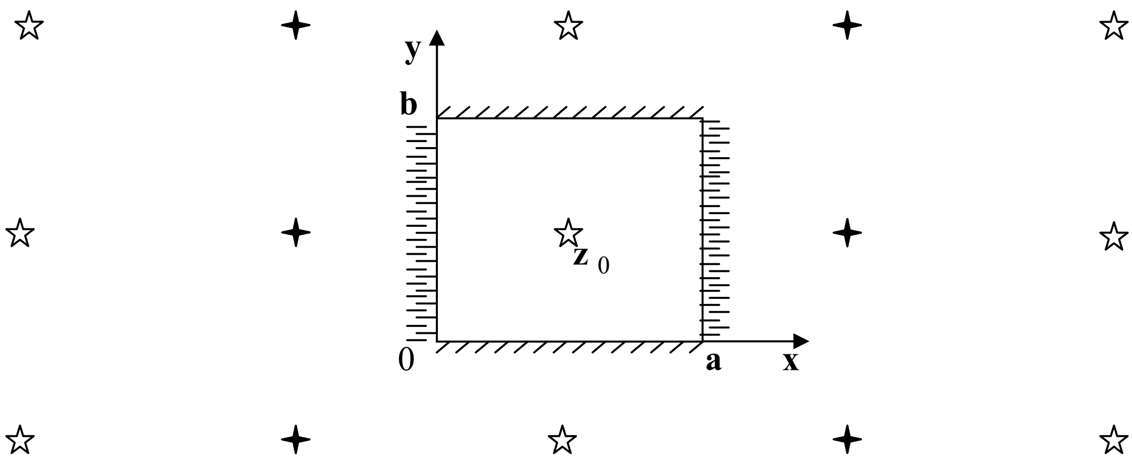


Рис. 2. Область фильтрации с различными граничными условиями (☆ - источник, ✦ - сток)

Пусть в области фильтрации находится точечный источник, комплексный потенциал которого для среды без границ имеет вид

$$f_1(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0)\ . \tag{5}$$

Пусть область фильтрации ограничена двумя параллельными стенками x=0 и x=a, причем при x<0 и x>a находится свободная жидкость. Течение точечного источника (5) определяется комплексным потенциалом [8]

$$f_2(z) = \ln\sin\frac{\pi(z - z_0)}{2a} - \ln\sin\frac{\pi(z + \bar{z}_0)}{2a}\ . \tag{6}$$

Далее положим что область фильтрации ограничена сверху и снизу непроницаемыми стенками y=0 и y=b. Для аналитической функции f(z), имеющей особые точки в области 0<y<b с непроницаемыми верхней и нижней границами, комплексный потенциал течения получен с помощью теоремы о прямой и имеет вид [8]

$$W(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(z + 2kib) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(z + 2kib) \tag{7}$$

Записывая выражения (7) для функции (6) находим комплексный потенциал для точечного источника в прямоугольнике (рис.2.):

$$\begin{gathered} W(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln\sin\frac{\pi(z + 2kib - z_0)}{2a} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln\sin\frac{\pi(z + 2kib + \bar{z}_0)}{2a} + \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln\sin\frac{\pi(z + 2kib - \bar{z}_0)}{2a} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln\sin\frac{\pi(z + 2kib + z_0)}{2a} \end{gathered}\ . \tag{8}$$

Выражение (8) можно преобразовать и выразить через тета – функцию Якоби

$$\vartheta_0(\upsilon) = H_0 \prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^{2k-1}e^{2\pi i\upsilon})(1 - q^{2k-1}e^{-2\pi i\upsilon})$$

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^{2k})$$

В результате комплексный потенциал точечного источника в прямоугольной области принимает вид

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\vartheta_0(\upsilon_2)\vartheta_0(\upsilon_4)}{\vartheta_0(\upsilon_1)\vartheta_0(\upsilon_3)}, \tag{9}$$

где $q = e^{-\pi a/b}, \upsilon_1 = \dfrac{z - z_0 + a}{2ib}, \upsilon_2 = \dfrac{z + z_0 + a}{2ib}, \upsilon_3 = \dfrac{z - \bar{z}_0 + a}{2ib}, \upsilon_4 = \dfrac{z + \bar{z}_0 + a}{2ib}$.

Аналогично решается задача для источника в прямоугольной области с другими граничными условиями.

Таким образом сочетание метода конформных отображений и метода изображения особых точек дает возможность определить комплексный потенциал точечного источника в прямоугольной области фильтрации с различными граничными условиями.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для решения практических задач электростатики, магнетизма, теплопроводности

Литература

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука. 1970. 304 с.
2. Лаврентьев М.А, Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высш. шк.. 1999. 432 с.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука 1969. 576 с.
5. Бейтмен Г.,Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. эллиптические и автономные функции. функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 300 с.
6. Шпилевой А.Я. Моделирование фильтрованных течений жидкости в кусочно-однородных средах методом изображения особых точек// Материалы Всерос. научно-практической конференции «Вклад земляков-орловцев в развитии и становление российской науки, культуры и образования. Орел, 2003. Т. 3. С. 134 - 136
7. Севостьянова Н.В., Шпилевой А.Я. Решения задач теории фильтрации, выражения через тэта-функцию Якоби для областей с границами в виде треугольника // Труды Международной конференции «Современные методы физико-математических наук». Орел, 2006. Т. 2. С. 67 - 70
8. Зайцев А.А, Шпилевой А.Я Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах // Калининград: издательство КГУ, 2001. 126 с.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

МДОЗМФ-2009

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина	**(Украина)**
Институт вычислительной математики РАН	**(Россия)**
Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е.Жуковского	**(Россия)**
Херсонский государственный университет	**(Украина)**
Орловский государственный университет	**(Россия)**
Государственный научно-исследовательский центр ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского	**(Россия)**
Институт гидромеханики НАН Украины	**(Украина)**

Первое официальное сообщение о XIV Международном симпозиуме «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009)

http://dsmmph.univer.kharkov.ua

С 1983 г. раз в 2 года проводятся симпозиумы по методам дискретных особенностей в задачах математической физики. Очередной международный симпозиум МДОЗМФ-2009 будет проведен в Украине

с 8 по 12 июня **2009 г.**

в г. Херсоне и пос. Лазурное (Херсонская обл.)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

проф. Ю.В. Гандель (Харьков), **чл.кор. НАНУ С.А. Довгий** (Киев), **проф. И.К. Лифанов** (Москва), **доц. В.О. Мищенко** (Харьков), **проф. В.Ф. Пивень** (Орел), **проф. Дж.Г. Саникидзе** (Тбилиси), **чл.кор.РАН Е.Е. Тыртышников** (Москва), **проф. А.С. Гиневский** (Москва), **проф. А.И. Желанников**(Москва), **prof. A.V. Menshykov** (Aberdeen), **проф. А.И. Носич** (Харьков), **проф. С.Л. Просвирнин** (Харьков), **проф. А.В. Сетуха** (Москва) **проф. В.А. Щербина** (Харьков).

Сопредседатели Оргкомитета:

профессор Ю.И. Беляев, ректор ХГУ (Херсон),
профессор Ю.В. Гандель, ХНУ им. В.Н. Каразина, (Харьков),
профессор И.К. Лифанов (Москва), **профессор В.Ф. Пивень,** ОГУ (Орёл),
профессор А.В. Сетуха, ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского (Москва).
Зам. сопредседателей **- профессор А.В. Спиваковский**, ХГУ (Херсон),
доц. Д.И. Черний, КНУ (Киев).
Учёный секретарь – **доц. В.О. Мищенко,** ХНУ им. В.Н. Каразина (Харьков)

Члены Оргкомитета:

доц. Г.С. Абрамов (Украина), **д.т.н. В.В. Вышинский** (Россия), **к.ф.м.н., PhD Olga Gavrylyako** (USA), **проф. Г.В. Голубев** (Россия), **проф. Г.Н. Жолткевич** (Украина), **доц. В.И. Кузьмич** (Украина), **ст.н.с. В.А. Меньшиков** (Украина), **проф. В.И. Морозов** (Россия), **доц. Д.Н. Никольский** (Россия), **доц. В.Н. Сейчук** (Молдова), **проф. Л.С. Сорока** (Украина), **проф. Е.А. Стрельникова** (Украина), **доц. Ю.С. Федяев** (Россия), **проф. А.Н. Хомченко** (Украина), **проф. В.Н. Эмих** (Россия).

<u>Основные направления работы МДОЗМФ – 2009:</u>

- Краевые задачи математической физики и их численное решение МДО
- Интегральные уравнения и их приложения
- Метод дискретных вихрей в аэрогидродинамике
- Методы дискретных особенностей в электродинамике и электронике
- Спектральные задачи теории колебаний и волн, их численное решение МДО
- Математическое моделирование на базе МДО и численные методы в задачах фильтрации
- Компьютерное моделирование и вычислительные эксперименты по МДО, проектирование и разработка программных средств: UML, параллелизм, библиотеки, БД, тестирование
- *Математическое моделирование в образовании, науке и технике: новые постановки задач*

Подготовку к симпозиуму планируется провести по следующему графику:

- с **19 ноября 2008 г.** по **18 января 2009 г.** – приём заявок на участие с докладами в симпозиуме МДОЗМФ-2009 (форма заявки включает <u>краткую аннотацию доклада)</u>
- **декабрь 2008 - январь 2009 г.** – рассмотрение заявок Программным комитетом и рассылка второго сообщения, которое будет содержать условия опубликования работ участников и разъяснение порядка уплаты оргвзноса
- **февраль-март 2009 г.** – уплата оргвзносов, присылка докладов для опубликования в традиционном сборнике научных трудов МДОЗМФ и статей, которые (по желанию авторов и при наличии рецензии членов Программного комитета) выйдут в рецензируемом издании.
- **май 2009 г.** – опубликование программы симпозиума, отправка участникам официальных приглашений и регистрация на сайте МДОЗМФ-2009 их прибытия на симпозиум

Сопутствующие мероприятия для молодых учёных:

- **традиционная школа-семинар по высоким информационным технологиям (её курирует Yahoo-группа Ada-ru),**
- **новая школа-семинар по математическому и компьютерному моделированию в образовании и науке.**

<u>Заявка на участие в работе МДОЗМФ-2009</u> осуществляется регистрацией на Интернет-странице МДОЗМФ-2009, открываемой с 18 ноября 2008 г. по адресу

http://dsmmph.univer.kharkov.ua.

При наличии проблем с этой страницей, заявку можно дублировать письмом (указав суть проблемы) по адресу электронной почты:

Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua

Материалы для публикации нужно направить **только** через Интернет-страницу.

<u>Содержание заявки:</u>

Я, фамилия, имя, отчество, уч.степень, уч.звание,
место работы, должность,
служеб. и домашний адреса, телефоны,
адрес электронной почты для переписки: e-mail ,

прошу зарегистрировать мою заявку на участие в симпозиуме МДОЗМФ-2009 с докладом « … » (или без доклада). В случае включения доклада в программу, я приму личное участие в работе симпозиума или обеспечу приезд моих соавторов или представителя для озвучения доклада.

Другими авторами доклада являются: аналогичные данные всех соавторов.

Официальный адрес Оргкомитета:

кафедра математической физики и выч.математики
ХНУ им. В.Н. Каразина: **ММФ**,
пл. Свободы 4, Харьков, Украина 61077

Оргкомитет МДОЗМФ-2009

Научное издание

Т Р У Д Ы

Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» Выпуск 6

Компьютерная верстка: Ю.С. Федяев

Подписано в печать 28.11.2008 г. Формат 60х84 1/16
Печать ризография. Бумага офсетная. Гарнитура Times
Объём 8,25 усл. печ. л. Тираж 100 экз.
Заказ № 759 от 28.11.2008 г.

Редакционно-издательский отдел
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95

Лицензия ПД №8-0023 от 25.09.2000 г.
Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»
г. Орёл, ул. Васильевская, 138. Тел./факс (4862)741152