

Орловский государственный университет

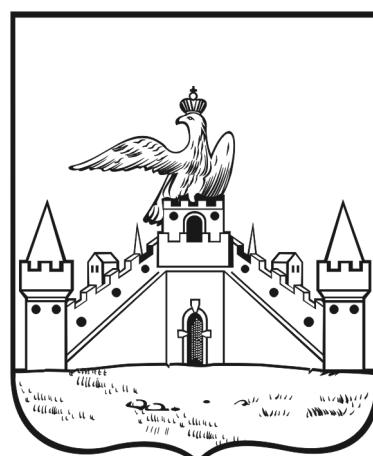
**Харьковский национальный
университет им. В.Н. Каразина**

Институт вычислительной математики РАН

**Военно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н.Е. Жуковского**

**ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНЫХ
ШКОЛ-СЕМИНАРОВ
«МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ
ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

Выпуск 7



Орёл • 2009

УДК 517+517.443+517.518.13+517.54+517.968+519.6:532.5+519.63.4.001.57+
519.688+532.546+538.971+621.362.1

Печатается по решению организационного комитета Международных школ-семинаров молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

Организационный комитет

профессор Лифанов И.К. (Россия) – почётный председатель
профессор Гандель Ю.В. (Украина) – сопредседатель
профессор Пивень В.Ф. (Россия) – сопредседатель
профессор Сетуха А.В. (Россия)
доцент Мищенко В.О. (Украина)
доцент Никольский Д.Н. (Россия)
доцент Федяев Ю.С. (Россия) – учёный секретарь

Редакционная коллегия

профессор Пивень В.Ф. – ответственный редактор
профессор Гандель Ю.В.
профессор Сетуха А.В.
доцент Федяев Ю.С. – учёный секретарь

Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Выпуск 7. – Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2009. – 120 с.

В сборнике представлены статьи участников Международных школ-семинаров молодых учёных России и Украины «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», состоявшихся на базе Орловского государственного университета, а также статьи, авторы которых занимаются проблематикой школ-семинаров. Школы-семинары «МДОЗМФ» проводятся с 2000 года.

Тематика трудов охватывает широкий спектр проблем теории фильтрации, аэро- и гидродинамики, тепlopроводности, электродинамики и других областей механики и физики, исследуемых методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, аналитических и численных методов математической физики.

Издание трудов приурочено к VII Международной школе-семинару молодых учёных России и Украины «МДОЗМФ» (Орловский госуниверситет, 9-14 ноября 2009 года).

Компьютерная вёрстка Федяев Ю.С.

Сборник трудов Международных школ-семинаров «МДОЗМФ» издаётся при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-06810).

© Оргкомитет Международных
школ-семинаров «МДОЗМФ», 2009 г.
© Авторы статей, 2009 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. <i>Антилогоў Д.И.</i>	Сингулярный интеграл в тождествах Сомильяны	5
2. <i>Апаринов А.А., Сетуха А.В.</i>	Применение мозаично-скелетонных аппроксимаций в методе дискретных вихрей	12
3. <i>Бомба А.Я., Гаврилюк В.І.</i>	Метод фіктивних областей та керування фільтраційними процесами в областях з невизначеними ділянками меж	17
4. <i>Булыгин В.С., Гандель Ю.В.</i>	Задача дифракции электромагнитной волны на плоском экране.....	24
5. <i>Васильев А.В., Васильев В.Б.</i>	О дискретных свертках	31
6. <i>Волянская И.К., Зайцев А.А., Шпилевой А.Я.</i>	Комплексные потенциалы фильтрационных течений в линзах	36
7. <i>Голубев Г.В.</i>	О некоторых точных решениях задачи определения поля давлений в неоднородной трещиновато-пористой среде	40
8. <i>Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.</i>	Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на непроницаемой окружности	46
9. <i>Дорофеева В.И., Никольский Д.Н.</i>	Исследование плоских задач о понижении уровня грунтовых вод под действием горизонтального дренажа	52
10. <i>Икрянов И.И.</i>	Разработка и сравнение моделей движения индикаторов курса и глиссады с маятниковой системой стабилизации оптических осей в условиях качки корабля на регулярном и не- регулярном морском волнении	58
11. <i>Квасов А.А.</i>	Влияние расположения водозабора на предельно допустимый дебит в слое с источником загрязнения	65
12. <i>Марков О.И.</i>	Численное решение граничной задачи по расчету температурного поля термоэлемента с одной пассивной ветвью	70

13. Никольская Т.А.	Влияние параметров жидкостей на процесс конусообразования.....	74
14. Новиков В.С.	Параллельный алгоритм решения интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода.....	77
15. Пивень В.Ф.	Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в анизотропном слое пористой среды.....	81
16. Пивень В.Ф., Костин О.В.	Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах	92
17. Федяев Ю.С.	Исследование эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном степенном слое грунта	99
18. Фролов М.А.	Влияние на дебит скважины ориентации полупроницаемой трещины (завесы) в пласте грунта.....	105
19. Хрипунов Ю.В.	Использование Фурье-преобразования для анализа поверхности монокристалла висмута	113
Авторский указатель.....		118

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ТОЖДЕСТВАХ СОМИЛЬЯНЫ

Д.И. Анпилогов

Украина, Запорожский национальный технический университет,
anpilegov@ua.fm

Аналитически вычислены левосторонние предельные значения сингулярных интегралов из тождеств Сомильяны. Доказана возможность подмены сомножителей при ядрах их значениями в точке сингулярности. Построен тестовый пример.

1. Введение. В настоящее время интерес к проблеме теоретического определения и анализа напряжённо-деформированного состояния различных конструктивных элементов не ослабевает, о чём свидетельствует объём работ в научной периодике. Однако доля работ, в которых применяется метод граничных интегральных уравнений и основанный на нём метод граничных элементов (МГЭ), не слишком велика (в сравнении, например, с долями публикаций, использующих метод конечных элементов). Несмотря на то, что теоретические основы МГЭ заложены [1 – 3], стандартом *de facto* в инженерных приложениях этот метод ещё не стал. Вероятно, такое положение обусловлено необходимостью вычисления сингулярных интегралов и их предельных значений. В ряде случаев эта задача решается численно [4]. В работе [3, с. 111], также с целью проведения численного расчёта, предложено точку наблюдения поля располагать на расстоянии 1% длины граничного элемента от точки приложения нагрузки.

Между тем, в ряде случаев предельные значения сингулярных интегралов можно вычислить аналитически. Кроме того, при условии непрерывности полей перемещений в точке сингулярности можно значительно упростить вычисление разрывных членов сингулярных интегралов. Целью работы является обоснование этого упрощения и аналитический расчёт предельных значений некоторых сингулярных интегралов.

2. Постановка задачи. При решении плоских граничных задач теории упругости прямым МГЭ используют граничные интегральные уравнения (известные также как тождества Сомильяны для перемещений). При отсутствии объёмных сил они имеют вид [3, (4.37)]:

$$u_j(p) = \int_{\Gamma} [t_i(q)G_{ij}(q,p) - u_i(q)F_{ij}(q,p)]d\Gamma(q) \quad (1)$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ – текущая точка на границе Γ области (точка приложения нагрузки), $p(\xi_1, \xi_2)$ – внутренняя точка области (точка наблюдения поля перемещений). Функции t_i являются компонентами вектора внешней нагрузки, распределённой вдоль Γ , а функции u_i – компонентами поля перемещений. Функции G_{ij} , F_{ij} (т.н. ядра) построены с использованием фундаментального сингулярного решения [3].

Техника применения прямого МГЭ подразумевает выбор узлов q_m^* на границе Γ и применение метода поточечной коллокации к уравнениям (1) по системе узлов $p = q_m^*$ с целью построения системы алгебраических уравнений относительно узловых перемещений $U_i^{(m)} \equiv U_i(q_m^*)$. Кусочно-линейные функции $U_i(q)$, однозначно восстанавливаемые по их значениям $U_i^{(m)}$, являются приближением точного решения u_i .

Ядра G_{ij} , F_{ij} имеют особенность: при подстановке $p = q_m^*$ они становятся неопределёнными в точке $q = q_m^*$. Поэтому интегралы в (1) будем понимать в предельном смысле при $p \rightarrow q_m^*$ изнутри области¹. Особенность ядер G_{ij} является «слабой» особенностью (логарифмического характера) [3, с.102]. Поэтому ядра G_{ij} мы не рассматриваем. Напротив, ядра F_{ij} имеют «сильную» особенность (порядка $1/R$, R – расстояние между точками p и q). Явный вид этих ядер [3, (4.10)]

$$F_{ik} = \frac{C_3}{R^2} \left[C_4(n_k y_i - n_i y_k) + \left(C_4 \delta_{ik} + \frac{2y_i y_k}{R^2} \right) y_j n_j \right]. \quad (2)$$

Здесь C_3 , C_4 – коэффициенты, определяемые модулем сдвига и коэффициентом Пуассона материала, n_k – компоненты вектора внешней нормали. Также обозначено $y_k = x_k - \xi_k$.

Далее ограничимся рассмотрением интегралов $\int_{bre} u_i(q) F_{ik}(q, p) d\Gamma(q)$, распространяя интегрирование только на двухзвенную ломаную bre , соединяющую начальный $b = q_{m-1}^*$ («begin»), промежуточный $r = q_m^*$ и конечный $e = q_{m+1}^*$ («end») узлы. При вычислении левостороннего предельного значения точку p разместим в её предельном положении r , а замен деформируем контур согласно рис. 1. Окружностью исчезающе малого радиуса ρ с центром в точке r вырезаны отрезки $a't$ и ta'' ; они подменены дугой $a'a''$.

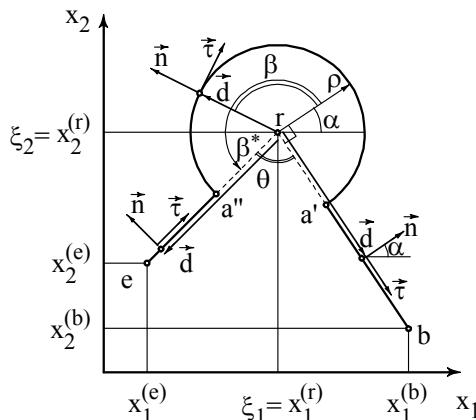


Рис. 1. К определению предельных значений сингулярных интегралов

¹ В частности, при рассмотрении внутренней граничной задачи интерес представляет левостороннее предельное значение интегралов из (1).

Тогда понятие левостороннего предельного значения можно определить так:

$$\left(\int_{\text{bre}} u_i F_{ik} d\Gamma \right)^+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{ba'} u_i F_{ik} d\Gamma + \int_{a''e} u_i F_{ik} d\Gamma \right] + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{a'a''} u_i F_{ik} d\Gamma. \quad (3)$$

Здесь первый предел называют главным значением по Коши, а второй – разрывным членом. Дальнейшей целью поставим вычисление выражения (3) при условии, что функции u_i подменены своими кусочно-линейными приближениями U_i .

3. Геометрия контура интегрирования и представление сингулярных ядер. Трудность вычисления выражения (3) состоит в громоздкости выражений (2). В частности, желательно упростить фрагменты $(n_k y_i - n_i y_k)$, $y_j n_j$. В этом пункте рассмотрим геометрические характеристики контура bre и их использование для компактного представления ядер F_{ik} .

Координаты $x_1^{(b)}, x_2^{(b)}, \dots, x_2^{(e)}$ будем считать известными. Соответственно, известны длины L_{br}, L_{re} отрезков br, re. Нормируем вектор \vec{br} на единицу: $\frac{\vec{br}}{|\vec{br}|} = \left(\frac{x_1^r - x_1^b}{L_{br}}, \frac{x_2^r - x_2^b}{L_{br}} \right)$. Совершив поворот этого вектора на 90° по часовой стрелке, получим вектор правосторонней (т.е. внешней) нормали к отрезку br: $\vec{n}(n_1, n_2)$, где $n_1 = (x_2^r - x_2^b)/L_{br}$, $n_2 = -(x_1^r - x_1^b)/L_{br}$. Пусть α – угол, образованный этой нормалью с положительным направлением оси OX₁. Далее будем считать этот угол известным: $\cos \alpha = n_1$, $\sin \alpha = n_2$.

Получим выражения для ядер F_{ik} сначала на отрезках ba', a''e, а затем – на дуге a'a''.

Примем параметризации отрезков ba', a''e в виде

$$x_i = -\frac{s-1}{2} x_i^{(b)} + \frac{s+1}{2} x_i^{(r)}, \quad -1 \leq s \leq s'(\rho) < 1, \quad q \in ba'; \quad (4)$$

$$x_i = -\frac{s-1}{2} x_i^{(r)} + \frac{s+1}{2} x_i^{(e)}, \quad -1 < s''(\rho) \leq s \leq 1, \quad q \in a''e. \quad (5)$$

Величины $s'(\rho) = 1 - 2\rho/L_{br}$, $s''(\rho) = -1 + 2\rho/L_{re}$ соответствуют положениям точек a', a'' и могут быть найдены при совместном решении уравнений отрезков br, re и окружности радиуса ρ с центром в точке r.

Рассмотрим вектор \vec{d} с началом в точке r и с концом в текущей точке q контура ba'a''e; $|\vec{d}| \equiv R$ как расстояние между точками r и q. Очевидно, $\vec{d} = \vec{d}(y_1, y_2)$. Имеем $y_j n_j \equiv y_1 n_1 + y_2 n_2 = \vec{d} \cdot \vec{n} = 0$, $q \in ba' \cup a''e$. Тогда

$$F_{11} \equiv F_{22} \equiv 0, \quad q \in ba' \cup a''e. \quad (6)$$

Рассмотрим также вектор $\vec{\tau}(n_2, -n_1)$, возникающий при повороте вектора \vec{n} на 90° по часовой стрелке. Тогда из (2) имеем

$$F_{12} = \frac{C_3 C_4}{R^2} (n_2 y_1 - n_1 y_2) = C_3 C_4 \frac{\vec{d} \cdot \vec{\tau}}{d^2}, \quad F_{21} = \frac{C_3 C_4}{R^2} (n_1 y_2 - n_2 y_1) = -C_3 C_4 \frac{\vec{d} \cdot \vec{\tau}}{d^2}.$$

Как видно из рис. 1, при $q \in ba'$ векторы \vec{d} и $\vec{\tau}$ параллельны, и поэтому $\vec{d} \cdot \vec{\tau} = d$. Тогда $F_{12} = C_3 C_4 / d$, $F_{21} = -C_3 C_4 / d$, $q \in ba'$. Используя (4), находим $d = \frac{1-s}{2} \cdot L_{br}$. Учитывая, что элемент длины $d\Gamma = \frac{L_{br}}{2} ds$, $q \in ba'$, получаем

$$F_{12} d\Gamma = C_3 C_4 \cdot \frac{ds}{1-s}, \quad F_{21} d\Gamma = -C_3 C_4 \cdot \frac{ds}{1-s}, \quad q \in ba'. \quad (7)$$

При $q \in a''e$ векторы \vec{d} и $\vec{\tau}$ антипараллельны, и поэтому $\vec{d} \cdot \vec{\tau} = -d$. Составляя аналогичные выкладки с использованием параметризации (5), имеем

$$F_{12} d\Gamma = -C_3 C_4 \cdot \frac{ds}{1+s}, \quad F_{21} d\Gamma = C_3 C_4 \cdot \frac{ds}{1+s}, \quad q \in a''e. \quad (8)$$

Теперь, когда выражения для ядер F_{ik} получены в компактном виде (6-8), вычисление главного значения по Коши можно легко выполнить при задании явного вида функций U_i :

$$\begin{aligned} U_i &= -\frac{s-1}{2} U_i^{(b)} + \frac{s+1}{2} U_i^{(r)}, & -1 \leq s \leq 1, & q \in br; \\ U_i &= -\frac{s-1}{2} U_i^{(r)} + \frac{s+1}{2} U_i^{(e)}, & -1 \leq s \leq 1, & q \in re. \end{aligned}$$

Получим теперь вид ядер F_{ik} , пригодный для вычисления разрывного члена; будем считать, что $q \in a'a''$. Пусть, как и прежде, $\vec{d} = \vec{rq}$. На этот раз $|\vec{d}| = \rho$. Положение текущей точки q на дуге $a'a''$ будем характеризовать углом β , на который вектор \vec{d} отклоняется в положительном направлении от правосторонней нормали к отрезку br . Вектор \vec{d} , следовательно, образует с положительным направлением оси Ox_1 угол $(\alpha + \beta)$, и поэтому имеет координаты $\vec{d}(y_1, y_2) = (\rho \cos(\alpha + \beta), \rho \sin(\alpha + \beta))$.

Как видно из рис. 1, при $q \in a'a''$ векторы $\vec{d} \parallel \vec{n}$, $\vec{d} \perp \vec{\tau}$. Поэтому $y_j n_j = \vec{d} \cdot \vec{n} = |\vec{d}| = \rho$, $n_2 y_1 - n_1 y_2 = \vec{\tau} \cdot \vec{d} = 0$. Считая теперь, что $R = \rho$, из (2) получаем:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{C_3}{\rho} \cdot (C_4 + 2 \cos^2(\alpha + \beta)), & F_{22} &= \frac{C_3}{\rho} \cdot (C_4 + 2 \sin^2(\alpha + \beta)), \\ F_{12} &= F_{21} = \frac{C_3}{\rho} \cdot \sin 2(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь легко видеть, что функции F_{ik} имеют особенность порядка $1/\rho$. Избавление от этой особенности при интегрировании выражений, содержащих сомножители $F_{ik} d\Gamma$, происходит «естественному путём» (с учётом выражения $d\Gamma = \rho d\beta$ для элемента длины на дуге $a'a''$). Добавим, при таком интегрировании, как видно из рис. 1, для пробегания вдоль всей дуги $a'a''$ переменную β следует изменять в интервале от $\beta = -\pi/2$ ($\vec{d} \parallel \vec{rb}$) до $\beta^* = 3\pi/2 - \theta$ ($\vec{d} \parallel \vec{re}$). Через θ обозначен внутренний угол области при вершине r .

4. К вычислению разрывных членов. В этом пункте будем иметь дело с разрывными членами $R_k = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{a'a''} U_i F_{ik} d\Gamma$. Достаточно ограничиться рассмотрением выражений вида

$$R(\alpha, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} U(q)f(\alpha, \beta)d\beta. \quad (10)$$

Здесь использовано обозначение $f(\alpha, \beta) = \rho F_{ik}$. Сомножитель $f(\alpha, \beta)$ при любых сочетаниях значений индексов i, k , как видно из (9), не зависит от ρ и является ограниченным: существует такое постоянное $f^* > 0$, что при любых β выполнено неравенство $|f(\alpha, \beta)| < f^*$.

Пусть функция $U(q)$ непрерывна в точке $q = r$. Такое предположение вполне оправдано в контексте представления о непрерывности полей перемещений. Тогда при обозначении $U_0 = U(q)|_{q=r}$ (10) принимает вид

$$R(\alpha, \theta) = U_0 \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} f(\alpha, \beta)d\beta.$$

Иначе говоря, при вычислении разрывного члена (10) допустима подмена функции $U(q)$ её значением U_0 , которое можно вынести за знак интеграла, и далее – за символ предельного перехода; этот последний опущен, т.к. $f(\alpha, \beta)$ не зависит от ρ . Докажем это утверждение.

Очевидно, произвольное положение (x_1, x_2) точки q (как на контуре bre , так и вне его в произвольной точке, принадлежащей ρ -окрестности точки r) взаимно однозначно определяется парой чисел (ρ, β) :

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(r)} + \rho \cos(\alpha + \beta); \\ x_2 = x_2^{(r)} + \rho \sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Поэтому $U(q) = U_0 + \varphi(q) = U_0 + \varphi(\rho, \beta)$. Через φ обозначено приращение функции $U(q)$ при переходе из точки r в точку q . Подставляя последнее соотношение в (10), имеем:

$$R(\alpha, \theta) = U_0 \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} f(\alpha, \beta)d\beta + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} \varphi(\rho, \beta)f(\alpha, \beta)d\beta.$$

Требуется доказать, что предел в этом выражении равен нулю. Достаточно при произвольном $\varepsilon > 0$ предъявить $\rho_1(\varepsilon)$ такое, что если $0 < \rho < \rho_1$, то

$$\left| \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} \varphi(\rho, \beta)f(\alpha, \beta)d\beta \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

Поскольку функция $U(q)$ непрерывна в точке r , то $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi(\rho, \beta) = 0$. Это значит, что при произвольных β для любого $\varepsilon^* > 0$ уже нашлось $\rho^*(\varepsilon^*)$ такое, что оценка $|\varphi| < \varepsilon^*$ оправдывается тотчас при выполнении неравенства

$$0 < \rho < \rho^*. \quad (12)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} \varphi(\rho, \beta) f(\alpha, \beta) d\beta \right| &\leq \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} |\varphi(\rho, \beta)| \cdot |f(\alpha, \beta)| d\beta \leq \int_{-\pi/2}^{\beta^*(\theta)} \varepsilon^* f^* d\beta = \\ &= \varepsilon^* f^* (\beta^* + \pi/2) = \varepsilon^* f^* (2\pi - \theta) < M \varepsilon^* f^* (2\pi - \theta), \quad \forall M > 1. \end{aligned}$$

Величину ε^* мы можем выбирать произвольно. В частности, положим

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{M f^*(2\pi - \theta)}.$$

Тогда последняя цепочка неравенств будет влечь за собою требуемое неравенство (11). Но эта цепочка имеет место при выполнении неравенства (12), поэтому для завершения доказательства достаточно предъявить значение $\rho_1 = \rho^*(\varepsilon^*)$ (причём последняя правая часть «уже нашлась»).

5. Аналитические результаты и построение тестового примера.

Изложенное выше позволяет получить, например, следующий результат:

$$\left(\int_{\text{bre}} U_1 F_{12} d\Gamma \right)^+ = U_1^{(b)} \cdot C_3 C_4 - U_1^{(e)} \cdot C_3 C_4 + U_1^{(r)} \cdot C_3 \left[C_4 \ln \frac{L_{br}}{L_{re}} + \sin \theta \sin(2\alpha - \theta) \right].$$

Построим для него тестовый пример. Узловые смещения приняты равными $U_1^{(b)} = 1$, $U_1^{(r)} = 2$, $U_1^{(e)} = -3$. В качестве пути интегрирования принята двухзвенная ломаная с вершинами в точках $b(3,0)$, $r(1,2)$, $e(0,2)$ (рис. 2).

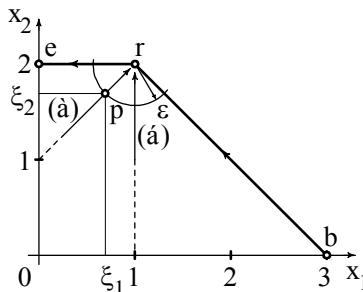


Рис. 2. Пути интегрирования в тестовом примере

Использованы значения $\alpha = \pi/4$, $\theta = 3\pi/4$. Принято $C_3 = 1$, $C_4 = 0,42$. Последнее значение соответствует коэффициенту Пуассона $\nu = 0,29$.

Левую часть проверяемой формулы вычисляли с использованием четырёхточечной квадратурной формулы Гаусса-Лежандра. Интегрирование по отрезкам br и re проводили отдельно. Точку p приближали к её предельному положению r , оставляя расстояние pr равным конечному малому значению ε . Приближение точки p к точке r осуществляли в двух направлениях: по пути (а) вдоль прямой $x_2 = x_1 + 1$ и по пути (б) вдоль прямой $x_1 = 1$. Величину ε уменьшали от 10^{-2} до 10^{-4} .

Значение правой части составило приблизительно 1,55337. Отличие левой части от этого значения обозначали через δ и выражали в процентах. Результаты расчётов представлены на рис. 3.

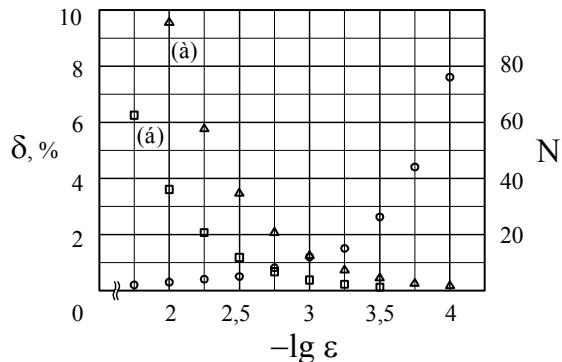


Рис. 3. Результаты расчёта в тестовом примере

Треугольниками обозначены результаты расчётов при приближении вдоль пути (а), а квадратиками – вдоль пути (б). Попутно фиксировали требуемое количество итераций. Кружочками обозначено количество N итераций, потребовавшихся для интегрирования по отрезку re при стремлении вдоль пути (а) (шкала справа). Для других отрезков интегрирования и путей стремления количества итераций оказались сопоставимыми.

Из рис. 3 видно, что при $\varepsilon = 10^{-4}$ относительное отличие частей проверяемой формулы становится графически неразрешимым в масштабе рис. 3. Однако, при таком значении ε фактическое значение δ для пути (а) находится на уровне десятых долей процента. Дальнейшее улучшение этой точности затруднительно из-за роста требуемого количества итераций.

6. Выводы. В настоящей работе с использованием геометрических представлений получен компактный вид ядер сингулярных интегралов из тождеств Сомильяны, пригодный для вычисления как главных их значений по Коши, так и разрывных членов. Доказано, что если сомножители при сингулярных ядрах являются функциями, непрерывными в точке сингулярности, то при вычислении разрывных членов эти функции можно формально подменять их значениями в этой точке. С использованием этого утверждения получены аналитические результаты, пригодные для формирования матрицы прямого метода граничных элементов. Построен тестовый пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Литература

1. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твёрдого тела. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. – 295 с.
2. Крауч С., Старфилд А. Метод граничных элементов в механике твёрдого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. Дияк І.І., Макар І.І., Чирун Л.Б. Числовий аналіз схем обчислення гіперсингулярних інтегралів під час моделювання проблем механіки // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. Політехніка». Комп'ют. системи проектув. Теорія і практика. – 2007. – № 591. – С. 94 – 102.

ПРИМЕНЕНИЕ МОЗАИЧНО-СКЕЛЕТОННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

А.А. Апаринов, А.В. Сетуха

Россия, Институт вычислительной математики РАН,
andrey.aparinov@gmail.com

Военно-Воздушная Академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А.Гагарина,
Setuhaav@ramdler.ru

В работе предложена модификация метода дискретных вихревых отрезков с использованием мозаично-скелетонных аппроксимаций для ускорения вычислений в задачах трехмерного моделирования течений идеальной жидкости. На примере задачи расчета давления на поверхности профиля крыла NACA-0012 показаны ускорение расчетов и принципиально новые возможности расчетов на мелких сетках.

Задача моделирования переноса завихренности в трехмерной безграничной области

Нестационарное течение идеальной жидкости в неограниченном пространстве описывается следующими уравнениями для поля скоростей $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = (w_1, w_2, w_3)$ и завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \text{rot} \mathbf{w}$:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^3 w_i \partial_i \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \partial_i \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \text{div} \mathbf{w} = 0,$$

где $\partial_i \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i}$, $\partial_t \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in R^3.$$

Исходная завихренность аппроксимируется вихревыми элементами $(\mathbf{l}_j^0, \Gamma_j^0)$, где \mathbf{l}_j^0 - вектор с фиксированными началом и концом, длины l , Γ_j - интенсивность отрезка, сосредоточенная в его центре, $j = 1, \dots, n$. Выражение для скорости в произвольной точке \mathbf{x} принимает вид:

$$\mathbf{W}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j \mathbf{l}_j \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j|^3} \bullet \theta_\varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j|),$$

\mathbf{y}_j - центры вихревых элементов (\mathbf{l}_j, Γ_j) . $\theta_\varepsilon(|\mathbf{x}|)$ - сглаживающая функция.

Для дискретизации задачи по времени используется схема Эйлера второго порядка точности. Таким образом, задача о движении завихренности сводится к задаче умножения матрицы на вектор.

Задача нестационарного трехмерного обтекания тел идеальной жидкостью

Рассматривается трёхмерная задача о нестационарном обтекании тела (группы тел) идеальной несжимаемой жидкостью, имеющей заданную скорость на бесконечности. На поверхностях тел ставится условие непротекания. Предполагается, что течение является потенциальным всюду вне тел и вихревых следов, которые образуются на заданных на тела линиях отрыва. Движение вихревых следов подчиняется законам о движении вихревых линий вместе с жидкими частицами и о сохранении циркуляции скорости по контуру, движущемуся вместе с жидкостью.

Численное моделирование обтекания тел осуществлялось модифицированным методом вихревых рамок [1,2]. Поверхности обтекаемых тел заменяются системой замкнутых вихревых рамок. Вихревой след делится на две части: «ближний след» и « дальний след». Ближний след состоит из вихревых рамок, которые, сходя в поток с линии отрыва в дискретные моменты времени и имеют не зависящие от времени циркуляции. При этом рамки, образующие ближний след можно перегруппировать в систему вихревых отрезков, образующих связанную структуру. Дальний след состоит из отдельных вихревых отрезков (вортонов), длины которых не зависят от времени и которые могут быть не связаны друг с другом.

Скорость жидкости в произвольной точке течения M представляется в виде:

$$\mathbf{W}(\mathbf{M}) = \mathbf{W}_T(\mathbf{M}) + \mathbf{W}_P(\mathbf{M}) + \mathbf{W}_V(\mathbf{M}) + \mathbf{V}_\infty$$

где, \mathbf{W}_T – скорость, индуцируемая рамками тела, \mathbf{W}_P – скорость, индуцируемая связанными отрезками из ближнего следа, \mathbf{W}_V – скорость, индуцируемая изолированными отрезками. Расчёт скорости, индуцируемой вихревым отрезком, осуществляется так же, как и в задаче переноса завихренности в безграничной области. Т.е. задача о сдвиге пелены снова сводится к умножению матрицы на вектор.

О методе мозаично-скелетонных аппроксимаций

В основе алгоритма мозаично-скелетонной аппроксимации [3] лежит простая идея представления матрицы в виде произведения строки и столбца. Разделяя матрицу на блоки и представляя каждый из них в виде суммы произведений некоторого числа столбцов и строк, мы получаем представление матрицы, которое аппроксимирует исходную матрицу, позволяет быстро умножать матрицы на вектор ($O(N \log N)$ операций).

Для построения мозаичного бieniaия матрицы, считается, что элемент a_{ij} в матрице характеризует взаимодействие элементов сетки с номерами i и j и на основе информации о геометрическом положении элементов строится дерево кластеров (групп элементов).

Для каждого кластера каждого уровня определяются «ближние зоны» и «далние зоны» по заданному правилу. Таким образом, блоки матрицы, соответствующие близким и дальним «зонам» образуют некоторое

мозаичное биение исходной матрицы. Далее для блоков матрицы, определяющих «ближние зоны» все элементы вычисляются путем прямого счета, а для блоков определяющих «далние зоны», применяются скелетонные аппроксимации.

Пример расчета давления на профиле NACA-0012

Рассмотрим задачу моделирования обтекания профиля крыла NACA-0012, удлинение $\lambda=5$, под углом атаки $\alpha=10,8^\circ$, что соответствует значению коэффициента подъемной силы $c_y = 0,8$. Расчеты проводились с использованием предложенного «быстрого» алгоритма и сравнивались с экспериментальными данными.

Априорный параметр выхода из цикла аппроксимации в блоке матрицы в методе мозаично-скелетонных аппроксимаций полагался равным $\delta = 10^{-1}$, шаг безразмерного времени $\Delta t = 0.05$, радиус вихря $\varepsilon = 0.05$. Поверхность профиля и ближний след моделировались замкнутыми вихревыми рамками, дальний след – изолированными вихревыми отрезками. Расчет проводился на 300 шагов безразмерного времени.

Для моделирования профиля крыла использовалось 3200 вихревых рамок в расчете 1 (Рисунок 1) и 4800 вихревых рамок в расчете 2 (Рисунок 2). Результаты распределения давления в том и другом случае сравнивались с экспериментальными данными [4].

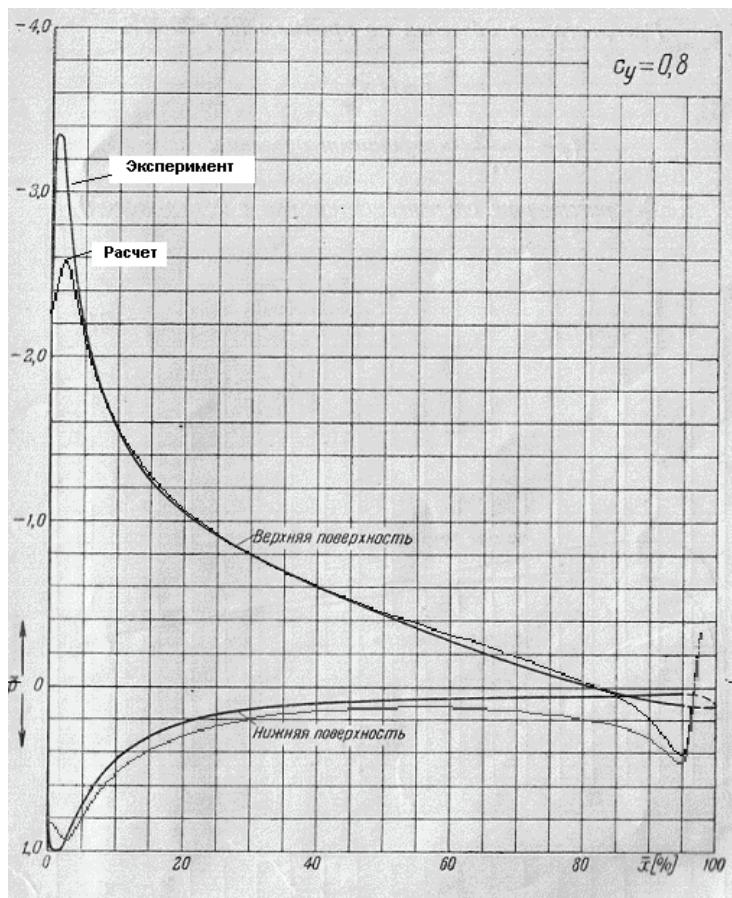


Рис. 1. Распределение давления на профиле NACA-0012,
3200 вихревых рамок

Как видно из рисунка 1 давление в носке на верхней поверхности крыла, полученное при расчете, существенно выше экспериментального значения. На рисунке 2 видно, что использование более мелкого разбиения позволяет получить правильное распределение давления в носке на верхней поверхности крыла. Следует отметить, что проведение прямых расчетов на персональных компьютерах с использованием более, чем 3000 вихревых рамок, моделирующих профиль крыла, затруднительно, ввиду высокой вычислительной сложности. Предложенный «быстрый» позволяет сократить время счета в 20 и более раз. На рисунке 3 приводится сравнение времени счета «прямого» и «быстрого» алгоритмов при моделировании профиля крыла 3200 вихревыми рамками.

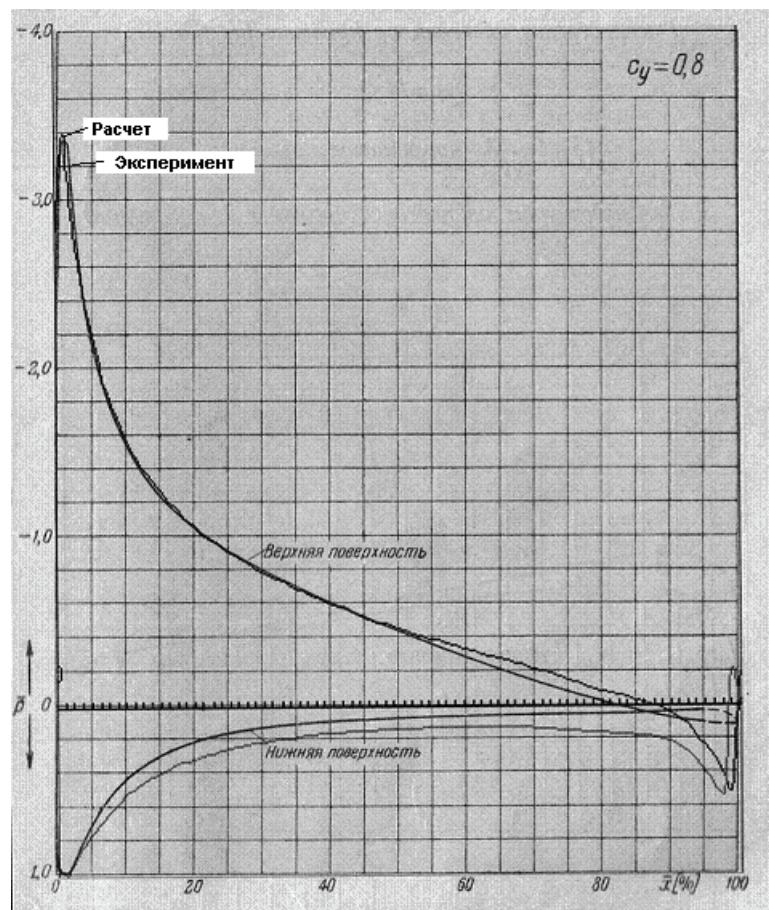


Рис 2. Распределение давления на профиле NACA-0012,
4800 вихревых рамок

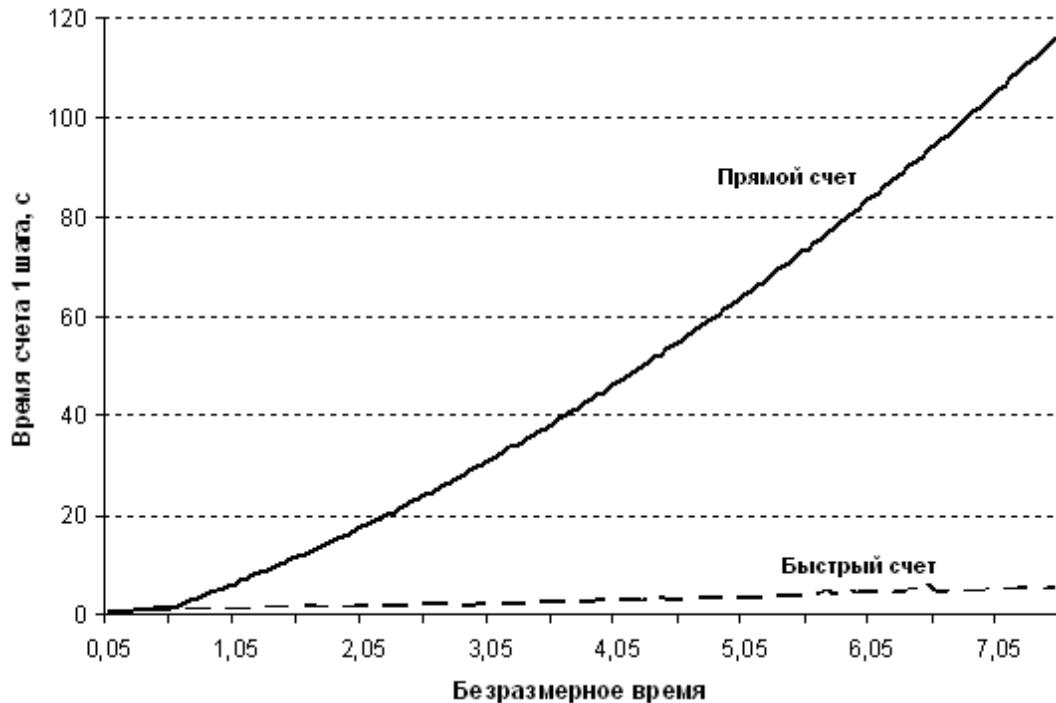


Рис 3. Сравнение времени счета «прямого» и «быстрого» алгоритмов, 3200 вихревых рамок

Хорошее совпадение результатов численного моделирования и экспериментальных данных на малых углах атаки для профиля крыла NACA-0012 позволяет предполагать, что предложенный метод позволит получать правильные распределения давлений по поверхности крыла и на больших углах атаки.

Литература

1. Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок. – Механика жидкости и газа, №4, 2006, 79-93с
2. Кирякин В.Ю. Моделирование обтекания объектов методом дискретных вихрей с представлением вихревой пелены изолированными вихревыми частицами. – Научный вестник МГТУ ГА. № 125(1), 2007.
3. Tutyshnykov E.E. Mosaic-Skeleton approximations. Calcolo. 1996. V. 33(1-2). p. 47-57
4. Атлас аэродинамических характеристик. М. ЦАГИ. 1940.

**МЕТОД ФІКТИВНИХ ОБЛАСТЕЙ ТА КЕРУВАННЯ
ФІЛЬТРАЦІЙНИМИ ПРОЦЕСАМИ В ОБЛАСТЯХ З
НЕВИЗНАЧЕНИМИ ДІЛЯНКАМИ МЕЖ**

А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк

Україна, Рівненський державний гуманітарний університет

Запропоновано варіант поєднання методу фіктивних областей і методології розв'язання краївих задач на конформні відображення для розрахунку фільтраційного процесу в горизонтальному симетричному дренажу при наявності вільної поверхні ґрутових вод. Пропонується новий тип постановок такого роду задач, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області, задаються умови, що характеризують процес на певній фіктивній примежовій області (території). Як приклад побудована гідродинамічна сітка, знайдено мінімальну глибину закладання дренажу (для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня) та інші характеристики процесу.

Вступ. Захист територій і населених пунктів від затоплення і підтоплення ґрутовими водами в результаті їх різкого підйому, водозабір і пониження рівня підземних вод, а також інші практичні завдання пов'язані з необхідністю пристрою дренажних споруд. Особливо важлива ця проблема для меліорації, де дренаж є основним елементом будь-якої гідромеліоративної системи. В даний час при числових дослідженнях відповідних краївих задач найбільш ефективними є метод обернених краївих задач (конформних і квазіконформних відображень). Зокрема, у роботі [1, 2] розглядається випадок поєднання методів фіктивних областей та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних краївих задач для розрахунку фільтраційних режимів у середовищах з вільними ділянками границь (кривими депресії) та проміжками типу „височування”, а в [3] пропонується алгоритм числового розв'язання модельних нелінійних краївих задач на квазіконформні відображення в областях обмежених двома еквіпотенціальними лініями та двома лініями течії, коли однією з ділянок границі є невідома (вільна) крива із закріпленим та вільним кінцями. В [4] розглянуто стаціонарну задача плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації рідини до горизонтального симетричного дренажу при наявності вільної поверхні (кривої депресії) ґрутових вод. У цій роботі пропонується варіант поєднання методу фіктивних областей і методології розв'язання краївих задач на конформні відображення для випадку областей з вільними кривими, які не є ні лініями течії, ні еквіпотенціальними лініями, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області [4], задаються умови, що характеризують процес на певній фіктивній області (території), яка прилягає до заданої ділянки області, а також відшукання мінімальної глибини закладання дренажу (при заданих інших конструктивних параметрах, та

характеристиках процесу), для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня.

Постановка задачі. Розглянемо процес фільтрації до горизонтального дренажу. В силу симетрії картини руху розглядається лише один фрагмент такої системи - однозв'язна шестикутна криволінійна область (пористий пласт) $G_z^*(z = x + iy, \partial G_z^* = A'B'C^*CD, G_z^* \in G_z, \partial G_z = ABC^*CD)$ (див. рис. 1), обмежений двома лініями течії $A'D = \{z: x = 0, -h_1 \leq y \leq 0\}$ та $B'C^* = \{z: x = l, -h_1 \leq y \leq 0\}$, $C^*C = \{z: y = -h_1, d \leq x \leq l\}$, еквіпотенціальною лінією $CD = \{z: y = -h_1, 0 \leq x \leq d\}$ та вільною (невідомою) кривою $A'B'$, що знаходиться в процесі розв'язку задачі (невідома точка A' належить кривій $AD = \{z: x = 0, -h_1 \leq y \leq 0\}$, а точка B' – кривій $BC^* = \{z: x = l, -h_1 \leq y \leq 0\}$). Аналогічно до [1-6] описуватимемо його рівнянням руху $\vec{v} = \kappa \operatorname{grad} \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$ – швидкість фільтрації, $\kappa = \kappa(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$ – коефіцієнт провідності, $\varphi = \varphi(x, y)$ – потенціал в точці (x, y) , такий що $\varphi|_{CD} = \varphi^*(h_1) = h_1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{B'C^*C} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{A'D} = 0$, $\varphi|_{A'B'} = g(y)$, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області, $g(y)$ – обмежена неперервно-диференціал функція. Крім цього, розглядається випадок встановлення мінімальної глибини h_1 залягання дрени, для виконання умови $y_{B'} = -H$. Для простоти викладок покладемо $\kappa = \text{const}$.

Замість другої з (однієї із традиційних, див., напр., [4–6]) умов на вільній кривій пропонуємо задати певні умови на деякій фіктивній області, що прилягає до даної ділянки межі. А саме: вважатимемо, що на ділянці $G_z \setminus G_z^*$ також має місце деякий процес (який є певним “продовженням” (розширенням) вихідного процесу), наприклад, вважатимемо, що рух в даній області відбувається за законом $\vec{v} = \tilde{\kappa} \operatorname{grad} \varphi$, де $\tilde{\kappa}$ – деякий фіктивний тензор фільтрації, зокрема $\tilde{\kappa} = \kappa$. Отже, відповідну задачу розв'язуємо у визначеній області G_z за “незмінної” умови $\varphi|_{CD} = h_1$, “продовжених” умов $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{B'C^*C} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{AD} = 0$, та додаткової умови $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, яка задається виходячи із змісту задачі (див., напр., нижче), при цьому вільна крива $A'B'$ шукається, як деяка внутрішня крива за умови $\varphi|_{A'B'} = g(y)$.

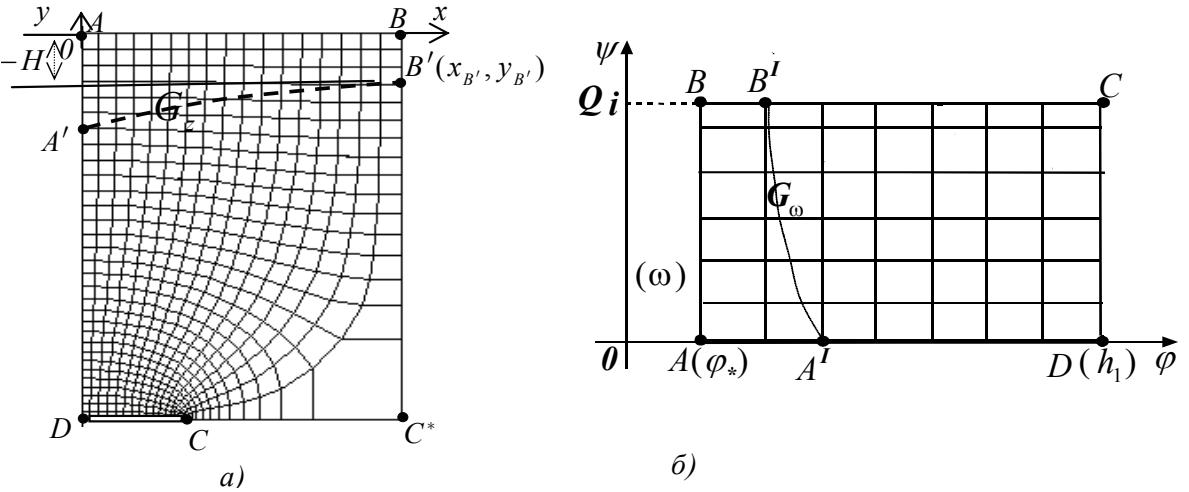


Рис.1. Область фільтрації G_z з свободною кривою $A'B'$ (а)) і відповідна їй область комплексного потенціала G_ω (б))

Відповідна задача на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ розглядуваної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < h_1, 0 < \psi < Q\}$ (Q – задана повна питома витрата) з відомим параметром φ_* – має вигляд [1-3]:

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = h_1, \quad h|_{A'B'} = g(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC^*C} = Q, \quad (2)$$

Обернену до (1) – (2) задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + i y(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому φ_* представимо у вигляді

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (3)$$

$$\begin{cases} y(\varphi_*, \psi) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ y(h_1, \psi) = -h_1, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, Q) = l, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_1, \\ y(\varphi, Q) = -h_1, & \varphi_1 \leq \varphi \leq h_1, \\ x(\varphi, 0) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq h_1, \\ g(y(\varphi, \psi)) = \varphi, & 0 \leq \psi \leq Q, \varphi_* \leq \varphi \leq h_1. \end{cases} \quad (4)$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Алгоритм числового розв'язання задачі.

Різницевий аналог рівнянь (5), країових умов (4), приграницьких умов ортогональності та умов "конформної подібності в малому" відповідних чотирикутників, у відповідній рівномірній сітковій області $G_{\omega}^{\gamma} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = (h_1 - \varphi_*)/(m+1), \Delta\psi = Q/(n+1), \varphi_* = h_1 - (m+1) \cdot \gamma \cdot \Delta\psi, m, m_1, n \in \mathbf{N}\}$ запишемо у вигляді [1-3, 7, 8]

$$\begin{cases} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + \gamma^2 (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) = 0, \\ (y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) + \gamma^2 (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y_{0,j} = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ y_{m+1,j} = -h_1, & j = \overline{0, n+1}, \\ x_{i,n+1} = l, & i = \overline{0, m_1}, \\ y_{i,n+1} = -h_1, & i = \overline{m_1, m+1}, \\ x_{i,0} = 0, & i = \overline{0, m+1}, \\ g(x_{i,j}, y_{i,j}) = \varphi_i, & j = \overline{0, n+1}, i = \overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ (x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ (y_{i,n} - y_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{0, m_1}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{m_1, m+1}, \\ (y_{i,1} - y_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m+1}. \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}, \quad (9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

Розв'язок різницевої задачі (6) – (9) побудуємо так [1-3]. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_{ω} , параметр ε , що

характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Задання початкового наближення конформного інваріанта γ проведемо за формулою (9), в якій використовуємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$. Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [7] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$; величини γ за формулою (9) та потенціалу Φ_* за формулою $\Phi_* = h_1 - (m+1) \cdot \gamma \cdot \Delta\psi$; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(|x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}| \right) < \varepsilon, \quad (10)$$

$$|\Phi_*^{(k+1)} - \Phi_*^{(k)}| < \varepsilon, \quad |D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon,$$

де $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}}$ – усереднене

значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^γ , та

$$|y_{B'} - H| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Якщо умови (10) не справджаються, то повертаемося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. В разі не виконання умови (11) зменшуємо $h_1 = h_1 - 0.02$ (при $|y_{B'}| > H + \varepsilon$) або збільшуємо $h_1 = h_1 + 1/30$ (при $|y_{B'}| < H + \varepsilon$) глибину залягання дрени, та розв'язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново.

У протилежному випадку обчислюємо нев'язку комфортності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Її величина характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику рівне одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку, якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m, n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж

потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [1-3] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана. Обґрунтування побудованого алгоритму “почергової фіксації характеристик процесу та середовища, параметра конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області” проводиться аналогічно до [1-3] з використанням ідей методів блочних ітерацій [8].

3. Результати числових розрахунків

Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при: $g(y) = -y$, $d = 1\text{м}$, $H = 1.06\text{ м}$, $l = 4\text{ м}$, $Q = 2,4 \text{ м}^3/\text{добу}$, розбитті $m \times n = 30 \times 16$ області G_z , точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, коефіцієнті провідності середовища $\kappa = 1\text{ м}/\text{добу}$ за $k = 1784$ кроків отримано гідродинамічну сітку руху (див. рис. 1.), знайдено мінімальну глибину залягання дрени $h_l = 5\text{ м}$, потенціал $\varphi_* = 0.31$ за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 2,4 \text{ E}-3$, встановлено положення вільної кривої $A'B'$ для відповідної фільтраційної схеми в системі кругового горизонтального дренажу.

Висновки і зауваження.

Таким чином у роботі запропоновано варіант поєднання методу „фіктивних областей” і методології розв'язання краївих задач на конформні відображення для випадку областей з вільними кривим, які не є ні лініями течії, ні еквіпотенціальними лініями, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області, задаються умови, що характеризують процес на певній „фіктивній” області (території), яка прилягає до заданої ділянки області. Знайдено мінімальну глибину закладання дренажу, для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня.

При обґрунтуванні (а також побудові) відповідного алгоритму, що ґрунтуються на почерговому „замороженні” шуканих параметра конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, тощо, використовувались ідеї методу блочної ітерації [8]; при цьому підкреслимо, що дискретний аналог умови оптимізації функціоналів типу Рімана, є рівносильним умові $\Delta\psi \rightarrow \Delta\varphi$ (тобто виродженню внутрішніх прямокутників сіткової області G_o до квадратів).

Для випадку, коли потенціал на дрені визначається традиційно за формулою $\varphi^* = -\kappa \left(\frac{p}{\rho g} - h_l \right)$, де ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, p – тиск у дрені, маємо можливість з допомогою параметра p керувати процесом (регулювати положення вільної кривої).

Наприклад, в залежності від кількості опадів (що характеризується величиною Q) маємо можливість розраховувати таке (оптимальне) із

значень p (що реалізується на практиці, наприклад, шляхом прикриття зазору у вихідному регулюючому пристрой), щоб вільна крива (крива депресії) не виходила із певних меж.

Проведені числові розрахунки є підтвердженням того, що запропоновані в роботі постановки задач та алгоритми їх числового розв'язання можуть бути застосовані при моделюванні нелінійних фільтраційних процесів, що виникають в системах горизонтального дренажу, а також при проектуванні дренажних споруд та оптимізації інших гідросистем.

Література

1. Бомба А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [текст] / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький . – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Бомба А.Я. Новая методика решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями [текст] / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк, В.В. Скопецкий // Компьютерная математика.– 2007. – № 1. – С.31-39.
3. Бомба А.Я. Модифікація алгоритму числового розв'язання обернених задач на квазіконформні відображення для випадку областей з вільними межами [текст] / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», № 833. – 2008 р. – С. 39-46.
4. Капранов Ю.И. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными [текст] / Ю.И. Капранов, В.Н. Эмих // ПМТФ. Т. 45., № 4.– 2004. – С. 79-93.
5. Є. Борюшкіна Чисельне розв'язання задачі стаціонарної фільтрації до горизонтального дренажу при наявності вільної поверхні [текст] / Є. Борюшкіна // Матеріали студентської наукової конференції. Випуск 2.– Рівне. – 2007.– С. 53-54.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.-Л.: Изд.- во АН СССР, 1948.- 144 с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656 с.
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - Киев: Наукова думка, 1980.- 334 с.

ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

В.С. Булыгин, Ю.В. Гандель

Украина, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
Харьков, пл. Свободы, 4

Рассматривается 3-Д задача дифракции электромагнитной волны на экране, который представляет собой часть плоскости декартовой системы координат. Задача сводится к системе двух гиперсингулярных интегральных уравнений относительно компонент поверхностной плотности тока на экране. Система интегральных уравнений решается приближенно с помощью кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных функций. Через решения системы выражаются поля в ближней и дальней зонах. Приведены результаты численного эксперимента.

1. Постановка задачи

На идеально проводящий плоский экран σ падает монохроматическая электромагнитная волна $(E^0(x,t), H^0(x,t))$. Рассеянную экраном волну обозначим $(E(x,t), H(x,t))$. Полное поле представляется в виде суммы падающего и рассеянного полей:

$$(E^f, H^f) = (E^0, H^0) + (E, H)$$

Зависимость от времени электрического и магнитного полей задается множителем $e^{-i\omega t}$:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}(x,t) = \vec{H}(x)e^{-i\omega t}, \quad x \in R^3$$

Вне экрана рассеянное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i\epsilon\omega \vec{E} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\mu\omega \vec{H} \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{4}$$

ϵ, μ - относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость

На идеально проводящем экране тангенциальные компоненты электрической составляющей полного поля обнуляются, так что:

$$E_i(\tilde{x}, +0) = -E_i^0(\tilde{x}, 0) = E_i(\tilde{x}, -0), \quad \tilde{x} \in \sigma, \tag{5}$$

где $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $i = 1, 2$

Также рассеянное поле удовлетворяет условию конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$E, H \in L_2^{loc}(R^3) \tag{6}$$

и условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности:

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} - ik \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = o(r^{-1}), \quad \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = O(r^{-1}) \text{ при } r \rightarrow +\infty \tag{7}$$

Здесь $r = \sqrt{\tilde{x}^2 + x_3^2}$

2. Интегро-дифференциальные уравнения задачи

Из (1) – (4) следует, что компоненты векторов поля удовлетворяют уравнению Гельмгольца вне экрана [1]:

$$\Delta H_i(x) + k^2 H_i(x) = 0 \quad (8)$$

где $i = 1..3$, $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$, $x \notin \sigma$

Ищем магнитное поле в виде:

$$\vec{H}^\pm(\tilde{x}, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \vec{C}^\pm(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x}) \mp \gamma(\lambda)x_3} d\lambda \quad (9)$$

соответственно в верхнем и нижнем полупространствах, где

$$\begin{aligned} \vec{C}^\pm(\lambda) &= (C_1^\pm(\lambda), C_2^\pm(\lambda), C_3^\pm(\lambda)), \\ \gamma(\lambda) &= \sqrt{|\lambda|^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re}(\gamma(\lambda)) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(\gamma(\lambda)) \geq 0 \end{aligned}$$

Компоненты вектор-функции вида (9) удовлетворяют уравнению Гельмгольца (8) и условиям излучения (7).

Тангенциальная составляющая вектора $E(x)$ непрерывна, поэтому:

$$E_m(\tilde{x}, +0) = E_m(\tilde{x}, -0), \quad \tilde{x} \in R^2, \quad m = 1, 2 \quad (10)$$

Тангенциальная составляющая вектора $H(x)$ непрерывна при переходе через раздел двух сред. в предположении, что отсутствует поверхностный ток:

$$H_m(\tilde{x}, +0) = H_m(\tilde{x}, -0), \quad \tilde{x} \notin \sigma, \quad m = 1, 2 \quad (11)$$

В силу уравнения (1) с учетом представления (9) находим

$$E_1^\pm(x) = \frac{1}{-4\pi^2 i\epsilon\omega} \int_{R^2} (-i\lambda_2 C_3^\pm(\lambda) \pm \gamma(\lambda) C_2^\pm(\lambda)) e^{-i(\lambda, \tilde{x}) \mp \gamma(\lambda)x_3} d\lambda \quad (12)$$

$$E_2^\pm(x) = \frac{1}{-4\pi^2 i\epsilon\omega} \int_{R^2} (\mp \gamma(\lambda) C_1^\pm(\lambda) + i\lambda_1 C_3^\pm(\lambda)) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda \quad (13)$$

Из условия (4) и представления (9) следует:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \mp \gamma(\lambda) C_3^\pm(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} (i\lambda_1 C_1^\pm(\lambda) + i\lambda_2 C_2^\pm(\lambda)) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda, \quad \tilde{x} \in R^2 \quad (14)$$

Из (14) следует:

$$C_3^\pm(\lambda) = \mp \frac{i\lambda_1 C_1^\pm(\lambda) + i\lambda_2 C_2^\pm(\lambda)}{\gamma(\lambda)} \quad (15)$$

Подставим найденное выражение для $C_3^\pm(\lambda)$ в уравнения (12) и (13), переходя к пределу при $x_3 \rightarrow +0$ и $x_3 \rightarrow -0$, получаем для всех $\tilde{x} \in R^2$:

$$E_1(\tilde{x}, \pm 0) = \frac{\pm 1}{-4\pi^2 i\epsilon\omega} \int_{R^2} \left(i\lambda_2 \frac{i\lambda_1 C_1^\pm(\lambda) + i\lambda_2 C_2^\pm(\lambda)}{\gamma(\lambda)} + \gamma(\lambda) C_2^\pm(\lambda) \right) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda \quad (16)$$

$$E_2(\tilde{x}, \pm 0) = \frac{\pm 1}{-4\pi^2 i\epsilon\omega} \int_{R^2} \left(\gamma(\lambda) C_1^\pm(\lambda) + i\lambda_1 \frac{i\lambda_1 C_1^\pm(\lambda) + i\lambda_2 C_2^\pm(\lambda)}{\gamma(\lambda)} \right) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda \quad (17)$$

Из условия (10) и представлений (16) и (17) имеем:

$$-\lambda_2 \frac{\lambda_1(C_1^+(\lambda) + C_1^-(\lambda)) + \lambda_2(C_2^+(\lambda) + C_2^-(\lambda))}{\gamma(\lambda)} + \gamma(\lambda)(C_2^+(\lambda) + C_2^-(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in R^2$$

$$-\lambda_1 \frac{\lambda_1(C_1^+(\lambda) + C_1^-(\lambda)) + \lambda_2(C_2^+(\lambda) + C_2^-(\lambda))}{\gamma(\lambda)} + \gamma(\lambda)(C_1^+(\lambda) + C_1^-(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in R^2$$

Обозначим $u(\lambda) = C_1^+(\lambda) + C_1^-(\lambda)$ и $v(\lambda) = C_2^+(\lambda) + C_2^-(\lambda)$, имеем систему однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -u(\lambda) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\gamma(\lambda)} + v(\lambda) \left(\gamma(\lambda) - \frac{\lambda_2^2}{\gamma(\lambda)} \right) &= 0 \\ u(\lambda) \left(\gamma(\lambda) - \frac{\lambda_1^2}{\gamma(\lambda)} \right) - v(\lambda) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\gamma(\lambda)} &= 0 \end{aligned}$$

Детерминант этой СЛАУ есть

$$D(\lambda) = -\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\gamma(\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\gamma(\lambda)}\right)^2 + \gamma(\lambda)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = k^2 \neq 0$$

Поэтому $v(\lambda) = u(\lambda) = 0$, что эквивалентно тождествам:

$$C_1^+(\lambda) = -C_1^-(\lambda) \quad C_2^+(\lambda) = -C_2^-(\lambda) \quad (18)$$

Подставляя (19) в выражение для $C_3^\pm(\lambda)$ (16) получаем:

$$C_3^+(\lambda) = C_3^-(\lambda) \quad (19)$$

Из (11) следует:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} C_m^+(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} C_m^-(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda, \quad \tilde{x} \notin \sigma, \quad m = 1, 2$$

или, с учетом (19):

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} C_m^+(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = 0, \quad \tilde{x} \notin \sigma \quad (20)$$

Запишем краевое условие (5), используя представление (16) и (17) для $E_i(\tilde{x}, \pm 0)$, $i = 1, 2$ и (19):

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\gamma(\lambda)} C_1^+(\lambda) + \frac{1}{\gamma(\lambda)} (\lambda_1^2 - k^2) C_2^+(\lambda) \right) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f_1(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in R^2 \quad (21)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \left(\frac{1}{\gamma(\lambda)} (\lambda_2^2 - k^2) C_1^+(\lambda) - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\gamma(\lambda)} C_2^+(\lambda) \right) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f_2(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in R^2 \quad (22)$$

где $f_i(\tilde{x}) = i\varepsilon\omega E_i^0(\tilde{x}, 0)$, $i = 1, 2$

Введем новые неизвестные функции:

$$u_l(\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} C_m^+(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda, \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m \quad (23)$$

Воспользуемся представлением для псевдодифференциального оператора с символом $1/\gamma(\lambda)$ [2, с. 55]:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \frac{1}{\gamma(\lambda)} C_m^+(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x}) - \gamma(\lambda)x_3} d\lambda = \int_{\sigma} \frac{e^{ik|\xi-x|}}{|\xi-x|} u_l(\xi) d\xi, \quad (24)$$

здесь $l, m = 1, 2$, $l \neq m$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

Используя (24) получаем тождество:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \frac{-\lambda_n \lambda_l}{\gamma(\lambda)} C_m^+(\lambda) e^{-i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = \lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_l} \int_{\sigma} \frac{e^{ik|\xi-x|}}{|\xi-x|} u_m(\xi) d\xi \quad (25)$$

Здесь $m, n, l = 1, 2$

Таким образом, из (21), (22) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lim_{x_3 \rightarrow 0} [(A_{11}u_1)(x) + (A_{12}u_2)(x)] &= f_1(\tilde{x}) \\ \lim_{x_3 \rightarrow 0} [(A_{12}u_1)(x) + (A_{22}u_2)(x)] &= f_2(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} (A_{ll}u)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} - k^2 \right) \frac{e^{ik|\xi-x|}}{|\xi-x|} u(\xi) d\xi, \quad l=1, 2 \\ (A_{12}u)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{e^{ik|\xi-x|}}{|\xi-x|} u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

3. Выражения для поля в ближней и дальней зонах

Получим выражения для компонент вектора напряженности магнитного поля. Из (23) следует:

$$C_m^+(\lambda) = \int_{R^2} u_l(\tilde{x}) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda, \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m \quad (27)$$

Подставляя в представление (8) выражения (27), используя интегральное представление функции Бесселя нулевого порядка [3, с.661], и интеграл Зоммерфельда [3, с.671], получим:

$$H_l^\pm(\tilde{x}, x_3) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} Q(\xi - \tilde{x}, x_3) u_m(\xi) d\xi, \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m \quad (28)$$

$$Q(\zeta, x_3) = -\frac{\partial}{\partial x_3} P(\zeta, x_3), \quad (29)$$

где

$$P(\zeta, x_3) = \frac{e^{ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2}}}{(|\zeta|^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (30)$$

Используя (4), находим:

$$H_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} Q_1(\xi - \tilde{x}, x_3) u_2(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} Q_2(\xi - \tilde{x}, x_3) u_1(\xi) d\xi, \quad (31)$$

$$\text{где } Q_i(\zeta, x_3) = -\frac{\partial}{\partial \zeta_i} P(\zeta, x_3)$$

Теперь найдем поле в дальней зоне для компонент вектора напряженности магнитного поля:

$$F_i^H(\theta, \varphi) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{H_i(x)|x|}{e^{ik|x|}},$$

где (θ, φ) - точка на единичной сфере в сферической системе координат:

$$x_1 = r \cdot \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \cdot \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cdot \cos \theta$$

Вычислив предел:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_i} P(\xi - \tilde{x}, x_3) = \frac{(-ik)e^{-ik\left(\frac{\tilde{x}}{|x|}\xi\right)}}{|x|} x_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (32)$$

используя (28) и (31), находим:

$$F_l^H(\theta, \varphi) = \mp \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} (-ik)e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi + \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} \cos \theta \cdot u_m(\xi) d\xi, \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m \quad (33)$$

знак «-» выбирается при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ и знак «+» - при $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

$$F_3^H(\theta, \varphi) = \frac{-ik}{2\pi} \int_{\sigma} e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi + \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} (\sin \theta \cos \varphi \cdot u_2(\xi) + \sin \theta \sin \varphi \cdot u_1(\xi)) d\xi \quad (34)$$

Теперь найдем выражения для компонент вектора напряженности электрического поля.

Из (1) и представлений (28), (31) следует:

$$E_1(x) = \frac{i}{2\pi k} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\int_{\sigma} Q_{12}(\xi - \tilde{x}, x_3) u_2(\xi) d\xi + \int_{\sigma} (Q_{22} + Q_{33})(\xi - \tilde{x}, x_3) u_1(\xi) d\xi \right] \quad (35)$$

$$E_2(x) = \frac{i}{2\pi k} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\int_{\sigma} (Q_{33} + Q_{11})(\xi - \tilde{x}, x_3) u_2(\xi) d\xi + \int_{\sigma} Q_{12}(\xi - \tilde{x}, x_3) u_1(\xi) d\xi \right] \quad (36)$$

$$E_3(x) = \frac{i}{2\pi k} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\int_{\sigma} Q_{23}(\xi - \tilde{x}, x_3) u_2(\xi) d\xi - \int_{\sigma} Q_{13}(\xi - \tilde{x}, x_3) u_1(\xi) d\xi \right] \quad (37)$$

где

$$Q_{lm}(\zeta, x_3) = \frac{\partial}{\partial \zeta_l} \frac{\partial}{\partial \zeta_m} P(\zeta, x_3), \quad l, m = 1, 2, 3 \quad (38)$$

Найдем поле в дальней зоне для компонент напряженности электрического поля:

$$F_i^E(\theta, \varphi) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{E_i(x)|x|}{e^{ik|x|}},$$

Вычислив предел:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_m} P(\xi - \tilde{x}, x_3) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{-k^2 x_l x_m e^{-ik\left(\frac{\tilde{x}}{|x|}\xi\right)}}{|x|^2}, \quad l, m = 1, 2, 3 \quad (39)$$

используя представления (35) – (37), находим:

$$F_i^E(\theta, \varphi) = -\frac{ik}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{\sigma} (g_i^1(\theta, \varphi) j_1(\xi) + g_i^2(\theta, \varphi) j_2(\xi)) e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi + \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} d\xi \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
g_1^1(\theta, \varphi) &= \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & g_1^2(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \\
g_2^1(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi & g_2^2(\theta, \varphi) &= \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
g_3^1(\theta, \varphi) &= -\sin \theta \cos \varphi \cos \theta & g_3^2(\theta, \varphi) &= \sin \theta \sin \varphi \cos \theta
\end{aligned}$$

4. Дискретная математическая модель

Плоский экран σ представляется в виде объединения квадратных ячеек σ_q , $q = 0..n-1$, где n - количество ячеек. Точку пересечения диагоналей квадрата σ_q обозначим (a_q, b_q) , а длину его стороны через h . Неизвестные функции $u_m(\tilde{x})$, $m = 1, 2$ ищутся в виде кусочно-постоянных и принимающих постоянные значения u_q^m на квадрате σ_q .

$$\sum_{q=0}^{n-1} u_q^1(T_{11}^q)(\tilde{x}) + \sum_{q=0}^{n-1} u_q^2(T_{12}^q)(\tilde{x}) = f_1(\tilde{x}) \quad (41)$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} u_q^1(T_{12}^q)(\tilde{x}) + \sum_{q=0}^{n-1} u_q^2(T_{22}^q)(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x}) \quad (42)$$

$$(T_{ii}^q)(\tilde{x}) = \lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_q} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} + k^2 \right) \frac{e^{ik|\xi-x|}}{|\xi - x|} d\xi, \quad i = 1, 2 \quad (43)$$

$$(T_{12}^q)(\tilde{x}) = \lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_q} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + k^2 \right) \frac{e^{ik|\xi-x|}}{|\xi - x|} d\xi \quad (44)$$

Используя теорему Стокса:

$$\int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \xi_2) d\sigma = - \int_L f(\xi_1, \xi_2) d\xi_j, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

где L - контур плоской поверхности σ

перейдем к пределу в (43) и (44):

$$\begin{aligned}
(T_{ii}^q)(\tilde{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_q} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{e^{ik|\xi-\tilde{x}|} d\xi_j}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}} + \frac{k^2}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{e^{ik|\xi-\tilde{x}|} d\xi}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}}, \quad i = 1, 2 \\
(T_{12}^q)(\tilde{x}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{L_q} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{e^{ik|\xi-\tilde{x}|}}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}} d\xi_1
\end{aligned}$$

Подставляя вместо \tilde{x} точки пересечения диагоналей x_p^0 ячейки σ_p , получаем систему линейных алгебраических уравнений. В случае, когда σ - прямоугольная область, матрицы $\{(T_{ii}^q)(x_p^0)\}_{p,q=0}^{n-1}$ $i = 1, 2$ и $\{(T_{12}^q)(x_p^0)\}_{p,q=0}^{n-1}$ имеют дважды теплицеву структуру [4], что позволяет вычислить элементы матрицы, зная лишь элементы ее первый строки или столбца.

Ниже приведены результаты численного эксперимента для квадратного экрана с длиной стороны $2a$. Высчитывался модуль диаграммы направленности напряженности электрического поля в плоскостях XOZ и

YOZ $F^E(\theta, \varphi) = \sqrt{F_1^E(\theta, \varphi)^2 + F_2^E(\theta, \varphi)^2 + F_3^E(\theta, \varphi)^2}$ при $k = 5\pi$, используя формулу(40). На рисунках на оси *OX* отмечены значения угла θ сферической системы координат, а по оси *OY* - значения модуля диаграммы направленности.

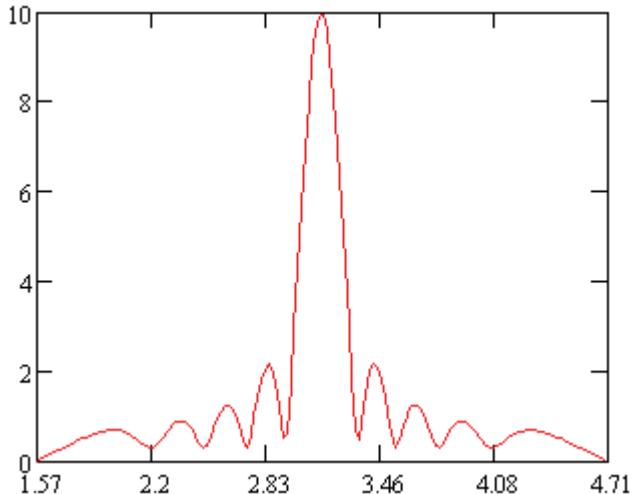


Рис. 1. $F^E(\theta, 0)$

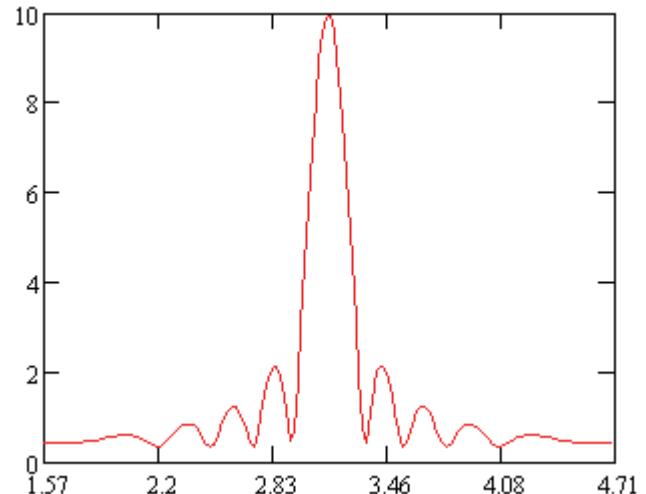


Рис. 2. $F^E(\theta, \pi/2)$

Литература

- Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель.– Вісник Харк. Нац. Ун-ту. Сер. “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління” №733, 2006, С. 58-75
- Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих – тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).– М.:ИПРЖР, 1996. – 176 с.: ил.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977, 735 с.
- Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.– М.: Наука, 1987.– 320 с.
- Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы. Доклады АН СССР, 1984, т.276, в.1, С. 96-100.
- Хенл Л., Мауз А., Вестфаль К. Теория дифракции.– М.: Мир, 1964.– 428 с.
- Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.– М.:”Янус-К”, 2001.– 508 с.

О ДИСКРЕТНЫХ СВЕРТКАХ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев

Россия, ГОУ ВПО «Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского», alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Обсуждаются возможные связи между континуальными и дискретными свертками и вопросы аппроксимации уравнения в свертках подходящей системой линейных алгебраических уравнений. Приводятся два результата о разрешимости дискретных и континуальных уравнений в свертках.

1. Под сверткой двух функций f и g определенных на R^m , понимается интеграл вида

$$(f * g)(x) = \int_{R^m} f(x - y)g(y)dy,$$

который существует, например если $f, g \in L_1(R^m)$. Здесь мы под оператором свертки будем понимать более общее выражение

$$u(x) \mapsto au(x) + \int_{R^m} K(x - y)u(y)dy \quad (*)$$

$a \in C$, функция $K(x)$ называется ядром оператора свертки. Если $K(x)$ -суммируемая функция, $K \in L_1(R^m)$, то уравнение в свертках в пространстве $L_2(R^m)$

$$au(x) + \int_{R^m} K(x - y)u(y)dy = v(x), \quad v \in L_2(R^m), \quad (1)$$

легко «решается» преобразованием Фурье

$$(Fu)(\xi) \equiv \tilde{u}(\xi) = \int_{R^m} e^{ix \cdot \xi} u(x)dx, \quad (2)$$

приводящим его к мультипликативному виду

$$[a + \tilde{K}(\xi)]\tilde{u}(\xi) = \tilde{v}(\xi) \quad (3)$$

Функцию $a + \tilde{K}(\xi)\tilde{u}(\xi) \equiv \sigma(\xi)$ назовем символом оператора свертки (*).

С вычислительной точки зрения все обстоит гораздо сложнее и хуже. Для численного решения вместо (1) нужно написать конечную систему линейных алгебраических уравнений, и если она окажется очень большой, возникают дополнительные проблемы с компьютерной обработкой этой системы.

Начнем с того, что вместо уравнения (1) мы рассмотрим его дискретный аналог, именно, следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$au_i + \sum_{j=0}^{\infty} k_{ij}u_j = v_i,$$

которую можно трактовать как свертку на функциях дискретного аргумента.

Обозначим Z_h^m целочисленную $(\text{mod } h)$ решетку в пространстве R^m , на которой определим функции дискретного аргумента $u_d^h(\tilde{x})$, пространство $L_2(Z_h^m)$, и вместо уравнения (1) – уравнение

$$au_d^h(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y} \in Z_h^m} K_d^h(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d^h(\tilde{y}) h^m = v_d^h(\tilde{x}), \quad x \in Z_h^m \quad (1')$$

предполагая, что ядро $K(x)$ определено во всех точках R^m .

Применение дискретного преобразования Фурье к уравнению (1') сводит его к мультиликативному уравнению в классе периодических функций

$$[a + \tilde{K}_h(\xi)] \tilde{u}_h(\xi) = \tilde{v}_h(\xi), \quad \xi \in [-h^{-1}\pi; h^{-1}\pi]^m. \quad (4)$$

Отметим, что (1') – это бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Чтобы перейти к конечномерной аппроксимации (1') теория проекционных методов предлагает следующую схему. Введем проектор P_N в пространстве $L_2(Z_h^m)$ следующей формулой

$$(P_N u_d^h)(\tilde{x}) = \begin{cases} u_d^h(\tilde{x}), & \tilde{x} \in Q_N \\ 0, & \tilde{x} \notin Q_N \end{cases},$$

и операторы, стоящие в левой части (1) и (1'), мы по-прежнему будем обозначать K и K_d^h .

Уравнение (1') в операторной форме выглядит так:

$$K_d^h u_d^h = v_d^h. \quad (5)$$

Предлагается вместо бесконечной системы (5) рассматривать её конечномерную аппроксимацию [3]

$$P_N K_d^h P_N u_d^h = P_N v_d^h, \quad (6)$$

и доказывается, что необходимым и достаточным условием разрешимости (6) при достаточно больших N является условие эллиптичности оператора K_d^h , т.е. условие $a + \tilde{K}_d^h(\xi) \neq 0, \forall \xi \in [-h^{-1}\pi; h^{-1}\pi]^m$.

Возможен другой подход к конечномерной аппроксимации (1'), связанный с понятием циклической свертки и дискретным (конечным) преобразованием Фурье [4,6]. Дадим его краткое описание. По ядру K_d^h построим циклическую свертку следующим образом. Обозначим $K_{dCN}^h(\tilde{x})$ ядро, полученное из $K_d^h(\tilde{x})$ сужением на $Q_N^h \equiv Q_N \cap Z_h^m$ и периодически продолженное на все Z_h^m . Аналогичную операцию проделаем с правой частью v_d^h , превратив ее в v_{dCN}^h . Теперь в качестве аппроксимирующего уравнения для (5) мы запишем уравнение

$$K_{dCN}^h u_{dCN}^h = v_{dCN}^h, \quad (7)$$

которое, вообще говоря, представляет собой тоже бесконечную систему линейных уравнений, однако в нем имеется лишь конечное число отличных друг от друга уравнений.

К уравнению с циклической сверткой (7) применимо дискретное (конечное) преобразование Фурье, которое приводит его к уравнению

$$\tilde{K}_{dCN}^h(\tilde{\xi}) \tilde{u}_{dCN}^h(\tilde{\xi}) = v_{dCN}^h(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \in Q_N^h \quad (8)$$

С помощью этих рассуждений нетрудно убедиться в справедливости следующего вывода.

Теорема 1. $\lim_{N \rightarrow +\infty} |\tilde{K}_d^h(\tilde{\xi}) - \tilde{K}_{dCN}^h(\tilde{\xi})| = 0, \quad \forall \tilde{\xi} \in Z_h^m,$

откуда следует, что из однозначной разрешимости (5) в пространстве $L_2(Z_h^m)$

следует однозначная разрешимость (8) в пространстве $L_2(Q_N^h)$ для достаточно больших N . Отметим, что дискретные свертки в полупространстве (на полупрямой) рассматривались в [5] с привлечением периодического аналога преобразования Гильберта. На наш взгляд, аппроксимация (8) удобнее (6) с вычислительной точки зрения, поскольку здесь с успехом может быть использован аппарат быстрого преобразования Фурье [4].

2. Другой аспект теории дискретных сверток возникает в связи с изучением дискретных аналогов сингулярных интегральных уравнений с ядрами Кальдерона-Зигмунда в полупространстве и в конусах (углах).

Рассмотрим многомерное сингулярное интегральное уравнение

$$(Au)(x) \equiv au(x) + \int_{R^m} K(x, x-y)u(y)dy = v(x), \quad x \in R^m \quad (9)$$

где $K(x, y)$ - ядро Кальдерона-Зигмунда, т.е. функция, определенная и бесконечно дифференцируемая на $\dot{R}^m \times (R^m \setminus \{0\})$ и обладающая следующими свойствами:

- 1) $K(x, ty) = t^{-m}K(x, y) \quad \forall x \in \dot{R}^m, \quad \forall t > 0;$
- 2) $\int_{S^{m-1}} K(x, \Theta)d\Theta = 0, \quad \forall x \in \dot{R}^m,$

где под \dot{R}^m понимается одноточечная компактификация R^m . Теория разрешимости таких уравнений (или, другими словами, фредгольмовости оператора K) разработана достаточно полно. Мы остановимся на простейшем дискретном варианте таких уравнений, именно, когда ядро $K(x, y)$ не зависит от полюса x и интеграл распространен по полупространству $R_+^m = \{x \in R^m : x = (x_1, \dots, x_m), x_m > 0\}$.

Полагаем $K(0) = 0$, и записываем дискретное уравнение

$$au_d^h(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y} \in Z_{h,+}^m} K(\tilde{x} - \tilde{y})u_d^h(\tilde{y})h^m = v_d^h(\tilde{x}), \quad x \in Z_{h,+}^m, \quad (10)$$

где $Z_{h,+}^m = \{\tilde{x} \in Z_h^m : \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m), \tilde{x}_m \geq 0\}$, $v_d^h \in L_2(Z_{h,+}^m)$

Под символом оператора $K_d^h : u_h(\tilde{x}) \mapsto a\tilde{u}_h(\tilde{x}) + \sum_{y \in Z_h^m} K(\tilde{x} - \tilde{y})u_h(\tilde{y})h^m$, $\tilde{x} \in Z_h^m$,

мы будем понимать функцию $\sigma_h(\xi) = a + \sigma'_h(\xi)$, определенную на $[-h^{-1}\pi, h^{-1}\pi]^m$:

$$\sigma'_h(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\tilde{y} \in Z_h^m \cap Q_N} K(\tilde{y})e^{-i\tilde{y}\xi}h^m \quad (11)$$

Если ввести проектор $P_{h,+}$ по формуле $(P_{h,+}u_d^h)(\tilde{x}) = \begin{cases} u_d^h(\tilde{x}), & \tilde{x} \in Z_{h,+}^m, \\ 0, & \tilde{x} \notin Z_{h,+}^m, \end{cases}$

то уравнение (10) можно записать в операторном виде

$$P_{h,+}K_d^h u_d^h(\tilde{y}) = v_d^h(\tilde{y}), \quad (12)$$

где $v_d^h \in L_2(Z_{h,+}^m)$, решение u_d^h разыскивается в пространстве $L_2(Z_{h,+}^m)$.

Формально в пределе при $h \rightarrow 0$ уравнению (12) соответствует сингулярное интегральное уравнение вида

$$au(x) + \int_{R_+^m} K(x-y)u(y)dy = v(x), \quad x \in R_+^m, \quad (13)$$

в пространстве $L_2(R_+^m)$, и, как выясняется, из однозначной разрешимости уравнения (13) вытекает однозначная разрешимость уравнения (12) при любом $h > 0$.

Уравнение (12) с точки зрения разрешимости эквивалентно разрешимости так называемого парного уравнения

$$(K_d^h P_{h,+} + I P_{h,-}) U_h = V_h \quad (14)$$

в пространстве $L_2(Z_h^m)$, где $P_{h,-}$ - аналогичный проектор на $Z_{h,-}^m = \{\tilde{x} \in Z_h^m : \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m), \tilde{x}_m < 0\}$, I - единичный оператор в $L_2(Z_h^m)$.

К уравнению (14) применимо дискретное преобразование Фурье, которое сведет его к одномерному сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта по переменной ξ_m при фиксированном $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$:

$$\frac{1 - \sigma_h(\xi', \xi_m)}{2} \widetilde{U}_h(\xi) + \frac{1 + \sigma_h(\xi', \xi_m)}{4\pi} \int_{-\pi h^{-1}}^{\pi h^{-1}} \text{Ctg} \frac{\xi_m - t}{2} \widetilde{U}_h(t) dt = \widetilde{V}_h(\xi) \quad (15)$$

здесь значок «~» обозначает многомерное дискретное преобразование Фурье.

Как было выяснено, такое сингулярное интегральное уравнение однозначно связано с краевой задачей Римана для полосы [5,11] и картина его разрешимости полностью определяется индексом символа $\sigma_h(\xi', \xi_m)$ по переменной ξ_m . Этот индекс не зависит от h , ξ' и совпадает с индексом символа $a + \sigma(\xi)$ по переменной ξ_m , где

$$\sigma(\xi) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{N > |x| > \varepsilon} e^{-ix\xi} K(x) dx.$$

Теорема 2. Уравнения (12) и (13) одновременно либо разрешимы, либо нет.

3. И в континуальном, и в дискретном случае при исследовании многомерных сингулярных интегральных уравнений по полупространству возникает сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта или ядром Коши. В теории обработки изображений [9] также используются преобразования с такими ядрами, но они связывают действительную и мнимую части спектра сигнала или, математическим языком, исходное уравнение редуцируется к так называемой задаче Гильберта, где граничное условие связывает действительную и мнимые части аналитической в области функции. Решения этих задач записываются с помощью интегралов с ядрами Гильберта и Коши. Отметим, что операторы типа (15) возникают также при суммировании рядов Фурье [8].

В нашем понимании многомерное сингулярное интегральное уравнение, как дискретное, так и непрерывное, с интегралом, распространенным по части пространства (полупространству или конусу), обязательно должно быть связано с краевой задачей типа классической задачи Римана. В случае полупространства - это классическая краевая задача Римана (с параметром) для верхней и нижней полуплоскости [7, 13], в случае конуса это уже многомерный вариант классической краевой задачи

Римана [14]. Если рассмотреть уравнение в дискретном полупространстве, то в образах Фурье появляется уравнение (15), которое можно также связать с краевой задачей Римана для полосы [5, 11]. Наконец, в случае дискретного квадранта Z_{++} была сделана попытка [10, 12] описать фурье-образ проектора P_{++} , которая привела к уравнению с так называемым бисингулярным интегральным оператором с ядром Гильберта и небольшой добавкой, обусловленной периодичностью.

Хотелось бы надеяться, что высказанные соображения и описанные факты будут полезны при исследовании разрешимости и приближенного решения различных типов уравнений в свертках и могут найти интересные применения, в частности, в цифровой обработке сигналов и изображений.

Литература

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир. 1974.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул . М.: Наука, 1974.
3. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
4. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1992.
5. Vasilyev V.B. Discrete convolutions and difference equations. Proceedings of Dynamic Systems and Applications. 2008.V.5.P. 474-480.
6. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
8. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Тт. 1,2. М.:Мир, 1985.
9. Новейшие методы обработки изображений. Под ред. А.А. Потапова. М.:Физматлит,2008.
10. Васильев В.Б. Двумерный периодический аналог преобразования Гильберта. Тезисы докладов VII Международной научно-технической конференции "Физика и технические приложения волновых процессов". 15-21 сентября 2008 г., Самара, 2008. С. 48-49.
11. Нечаев А.Л. Периодический аналог краевой задачи Римана. В ст. "Актуальные проблемы обучения математике". Труды Всероссийской заочной научно-практической конференции. Орел, 2007 . С. 454-458.
12. Vasilyev V.B. On certain continual and discrete convolution operators. Proc. MATHMOD Vienna-09, 6th Vienna Conference on Mathematical Modelling, 11-13 February 2009, Vienna University of Technology. Full Papers CD Volume. Editors I. Troch , F. Breitenecker. Argesim Report No 35. P. 2616-2618.
13. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдо-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
14. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдо-дифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: Едиториал УРСС, 2006.

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЛИНЗАХ

И.К. Волянская, А.А. Зайцев, А.Я. Шпилевой
 Россия, ФГОУ ВПО «Российский государственный
 университет им. И. Канта», e-mail: volyanskaya86@mail.ru

Для исследования фильтрационных течений в линзах (двуугольниках) использованы методы изображения особых точек и конформных отображений. Получены комплексные потенциалы течений, создаваемых в линзах с различными граничными условиями.

1. Для исследования плоскопараллельных фильтрационных течений, подчиняющихся закону Дарси, используется комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

с помощью которого можно определить скорость фильтрации и давление [1]. В случаях, когда границами раздела областей фильтрации являются прямые и окружности, для исследования фильтрационного течения удобно использовать метод изображения особых точек совместно с методом конформных отображений [2].

2. Ставится цель – определить комплексный потенциал фильтрационного течения, созданного двумерным источником дебита Q в линзах; область, которую они занимают, будем обозначать D .

Движением (или выбором подходящей системы координат) каждую линзу можно расположить так, что комплексными координатами точек пересечения граничных дуг будут $z=0$ и $z=a$, где $a>0$ – расстояние между этими точками (рис. 1).



Рис. 1. Положения типичных линз

Кроме a имеются еще два параметра, которые определяют форму линзы: α – угол между касательными к граничным дугам в их точках пересечения (считаем $0<\alpha<2\pi$) и радиус одной из граничных дуг (радиус второй определяется указанными параметрами).

Рассмотрим вопрос о форме линз. Функция

$$\zeta = \frac{Az}{z - a} \quad (1)$$

отображает каждую из дуг в луч, выходящий из точки $\zeta=0$. Поэтому эта функция отображает область D в сектор с углом раствора α (рис. 2).

Поскольку преобразование подобия отображает сектор в себя, то без потери общности можно (и будем) считать, что в равенстве (1)

$$A = \exp(i\varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2)$$

Отметим, что углы α, φ однозначно определяют радиусы граничных дуг, и значит, форму области D .

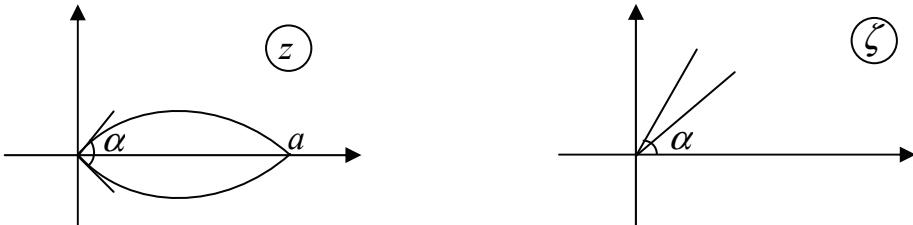


Рис. 2. Конформное отображение линзы на сектор

Допустим, что образом области D относительно отображения (1) является сектор $0 < \arg \zeta < \alpha$. Тогда уравнения дуг, ограничивающих эту область, получаются из соотношений

$$\frac{\exp(i\varphi)z}{z - c} = \frac{\exp(i\varphi)\bar{z}}{\bar{z} - c}, \frac{\exp(i(\varphi - \alpha))z}{z - c} = \frac{\exp(-i(\varphi - \alpha))\bar{z}}{\bar{z} - c}$$

и имеют вид $|z - c_n| = r_n, n = 1, 2$, где

$$c_1 = \frac{i \exp(-i\varphi)a}{2 \sin \varphi}, c_2 = \frac{i \exp(-i(\varphi - \alpha))a}{2 \sin(\varphi - \alpha)}, r_1 = \frac{a}{2|\sin \varphi|}, r_2 = \frac{a}{2|\sin(\varphi - \alpha)|} \quad (3)$$

Их параметрическая форма следующая:

$$z = \frac{at}{t - \exp(i\varphi)}, z = \frac{at}{t - \exp(i(\varphi - \alpha))}, 0 \leq t < +\infty \quad (4)$$

Представляют интерес симметричные линзы. Они определяются условиями $c_2 = \bar{c}_1, r_2 = r_1$. Из равенства (3) следует, что эти условия выполняются при $\varphi = \alpha/2$ и $\varphi = \alpha/2 + \pi$. Типично симметричные линзы изображены на рис. 3.



Рис. 3. Симметричные линзы

Отметим что на рис. 1, 2 областью D может быть как внутренность, так и внешность соответствующей фигуры.

Интересен также случай, когда одна из границ области D прямолинейная. Это будет, если $\varphi = 0, \pi, \alpha, \alpha + \pi$. Если $\varphi = 0, \pi$, то получаются области, изображенные на рис. 3. Например, при $\alpha = \pi/2, \varphi = \pi$ формулы (3),

(4) описывают границы полукруга $|z-c/2|<c/2$. В остальных двух случаях области D симметричны предыдущим.



Рис. 3. Область, одна из границ которых прямолинейна

3. Пусть область фильтрации ограничена свободной жидкостью (рис. 4). Отображение (1) позволяет преобразовать комплексный потенциал течения в секторе в комплексный потенциал течения в рассматриваемых областях.

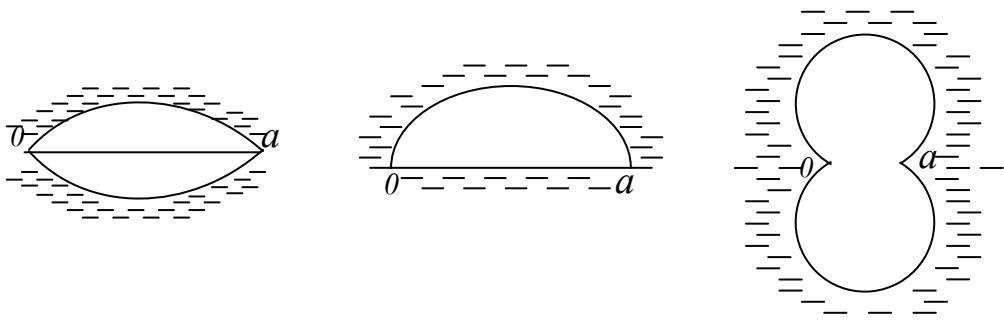


Рис. 4. Примеры областей фильтрации, ограниченной свободной жидкостью

Решение задачи для случая сектора приведено в [3] и имеет вид:

$$W(\zeta) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\zeta^p - \zeta_0^p}{\zeta^p - \bar{\zeta}_0^p}, p = \frac{\pi}{\alpha}; \quad (5)$$

здесь ζ_0 – комплексная координата источника, расположенного в секторе $0 < \arg \zeta < \alpha$. Для регулярной ветви функции ζ^p , выделенной стандартным способом с помощью разреза вдоль луча $0 \leq \operatorname{Re} \zeta < +\infty$, $\operatorname{Im} \zeta = 0$, справедливо равенство $\overline{\zeta^p} = \exp(-2\pi i p) \bar{\zeta}^p$, поэтому формулу (5) можно записать иначе:

$$W(\zeta) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\zeta^p - \zeta_0^p}{\zeta^p - \exp(-2\pi i p) \bar{\zeta}_0^p}.$$

Пусть комплексная координата источника в области D есть z_0 . Тогда $\zeta_0 = \exp(i\varphi) z_0 / (z_0 - a)$. После подстановки выражения (1) (с учетом равенства (2)) в эту формулу и необходимых упрощений получаем решение поставленной задачи:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{(z_0 - a)^p z^p - z_0^p (z - a)^p}{(\bar{z}_0 - a)^p z^p - \exp(-2p(\varphi - \pi)i) \bar{z}_0^p (z - a)^p}. \quad (6)$$

Если областью D является полукруг $|z-c/2|=c/2$, то $a=\pi/2$, $\varphi=\pi$, $p=\pi/a=2$, поэтому формула (6) принимает вид.

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{(z_0 - a)^2 z^2 - z_0^2 (z - a)^2}{(\bar{z}_0 - a)^2 z^2 - \bar{z}_0^2 (z - a)^2}.$$

4. Подобным способом можно решать аналогичные задачи с другими свойствами границ: 1) обе граничные дуги непроницаемые, 2) одна дуга непроницаема, а вторая примыкает к водной среде. В обоих случаях на первом этапе снова используется конформное отображение (1) области D на сектор. В первом случае следует учесть, что суммарный дебит источников и стоков должен равняться нулю. Для завершения решения задачи нужно отобразить сектор на верхнюю полуплоскость и воспользоваться теоремой о прямой для случая непроницаемой полуплоскости. В качестве примера приведем выражение для комплексного потенциала течения, создаваемого диполем в точке z_0 , момент которого равен m :

$$W(z) = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{\exp(-ip\varphi)(z_0 - a)^p (z - a)^p + \exp(-ip\varphi)(\bar{z}_0 - a)^p (\bar{z} - a)^p}{(z_0 - a)^p z^p - z_0^p (z - a)^p + (\bar{z}_0 - a)^p \bar{z}^p - \exp(-2pi(\varphi + \pi))\bar{z}_0^p (\bar{z} - a)^p}.$$

В случае смешанных граничных условий, задача решается несколько иначе, поскольку метод изображений для полуплоскости в этом случае перестает действовать. Пусть первая дуга, которая отображается на луч $0 \leq Re\zeta < +\infty$, $Im\zeta > 0$, непроницаемая, а вторая дуга примыкает к жидкости. Тогда после отображения области D на сектор нужно этот сектор отобразить на первую четверть плоскости, далее воспользоваться методом изображений. Этим способом получается следующее выражение для комплексного потенциала течения, создаваемого источником, расположенным в точке z_0 :

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln H(z, z_0)$$

$$H(z, z_0) = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{((z_0 - a)^2 z^2 - z_0^2 (z - a)^2)^{\frac{p}{2}} ((\bar{z}_0 - a)^2 z^2 + \exp(-ip(\varphi + \pi))\bar{z}_0^2 (z - a)^2)^{\frac{p}{2}}}{((z_0 - a)^2 z^2 + z_0^2 (z - a)^2)^{\frac{p}{2}} ((\bar{z}_0 - a)^2 z^2 - \exp(-ip(\varphi + \pi))\bar{z}_0^2 (z - a)^2)^{\frac{p}{2}}}$$

Таким образом, в работе сочетанием методов изображений и конформных отображений получено решение нескольких задач теории фильтрации в областях, имеющих форму линз. Данная методика может быть использована для решения задач электростатики и магнитостатики, а также теории теплопроводности.

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред.– М.: Наука, 1972.– 368 с.
2. Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах // Издательство КГУ.– Калининград, 2001.– 126 с.
3. Зайцев А.А., Шелудкович Е.Ю., Шпилевой А.Я. Построение фильтрационных течений в области, ограниченной сторонами угла // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», выпуск 5. Орел, 2007. С. 119-123.

**О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОЛЯ ДАВЛЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ТРЕЩИНОВАТО-
ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

Г.В. Голубев

Россия, ГОУ ВПО «Казанский государственный технический университет
им. А.Н. Туполева», e-mail: golubev@tm.kstu-kai.ru

В работе рассмотрена задача о получении точных (эталонных) решений при фильтрации в неоднородной трещиновато-пористой среде при различных комбинациях законов движения жидкостей в трещинах и блоках. Они нужны для тестирования результатов, полученных приближенными методами. Изучена также одна задача о построении индикаторных диаграмм.

Рассматривается фильтрация в неоднородной трещиновато- пористой среде в рамках модели Баренблатта-Желтова. В работах [1]-[2], а также ряде других, предложены методы решения задач фильтрации в таких средах. Обратим сейчас внимание на то, что это приближенные численно-аналитические методы и их желательно тестировать. Для этой цели подходят точные аналитические решения, которые могут быть получены в ряде случаев. В данной работе ставиться именно такая цель. В качестве исходного возьмем соотношение, которое получается из уравнения неразрывности суммарного потока и зависимостей плотностей жидкости и пористой среды от давления. В полярных координатах оно имеет следующий вид в случае фильтрации несжимаемой жидкости, толщине пласта $h=1$ и отсутствии распределенных источников (стоков)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta = 0. \quad (1)$$

При плоско-радиальном течении к центральной скважине в круговом пласте поперечная составляющая скорости фильтрации $v_\theta = 0$ и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \text{ или } r v_r = const = c. \quad (2)$$

Радиальная составляющая скорости фильтрации v_r для комбинаций законов движения жидкостей в трещинах и блоках имеет различный вид. Приведем наиболее распространенные варианты.

1) Первый вариант закона Форхгеймера в трещинах, закон ДХК в блоках

$$-v_r = \Phi(r) + \frac{k_2(1 + \exp c_1(|dp/dr| - \beta_1))}{\mu_0 + \mu_1 \exp c_1(|dp/dr| - \beta_1)} \frac{dp}{dr},$$

где для краткости обозначено

$$\Phi(r) = \frac{(\sqrt{1 + 4\beta k_1(r)|dp/dr|/\mu} - 1)dp/dr}{2\beta|dp/dr|}.$$

2) Первый вариант закона Форхгеймера в трещинах, криволинейный закон в блоках

$$\begin{aligned} -v_r &= \Phi(r) + \frac{\sqrt{k_2}}{\mu} \frac{\sqrt{k_2} |dp/dr| - \mu_0 \alpha}{|dp/dr|} \frac{dp}{dr} \quad \text{при } |dp/dr| \geq \beta_1, \\ -v_r &= \Phi(r) + \frac{k_2^{3/2}}{\nu} \frac{|dp/dr|}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + k_2 (dp/dr)^2}} \frac{dp}{dr} \quad \text{при } |dp/dr| < \beta_1. \end{aligned}$$

3) Первый вариант закона Форхгеймера в трещинах, параметрический закон в блоках

$$-v_r = \Phi(r) + \frac{k_2}{\mu} \frac{\sqrt{k_2} |dp/dr| - \lambda_1 \mu_0 \alpha}{\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + k_2 (dp/dr)^2}} \frac{dp}{dr}.$$

4) Первый вариант закона Форхгеймера в трещинах, закон Дарси в блоках

$$-v_r = \Phi(r) + \frac{k_2(r)}{\mu} \frac{dp}{dr}.$$

5) Второй вариант закона Форхгеймера в трещинах, закон Дарси в блоках

$$-v_r = \frac{(\sqrt{1 + 4\beta\rho u^3 |dp/dr|/\mu^2} - 1) dp}{2\beta\rho u |dp/dr|} + \frac{k_2(r)}{\mu} \frac{dp}{dr}, \quad \text{где } u = \sqrt{k_1}.$$

Анализ показывает, что для получения эталонных решений наиболее подходят случаи 4 и 5. Рассмотрим вариант с нагнетательной скважиной, когда $dp/dr < 0, Q < 0$, dp/dr – градиент давления, Q – дебит скважины. Случай с эксплуатационной скважиной $dp/dr > 0, Q > 0$ рассматривается аналогично. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$r[-(\sqrt{1 - 4\beta\rho u^3 \frac{dp}{dr}/\mu^2} - 1)\mu / 2\beta\rho u + k_2(r) \frac{dp}{dr}/\mu] = c. \quad (3)$$

В (3) использованы следующие обозначения: p – функция давления, k_1 – проницаемость трещин, k_2 – проницаемость блоков, μ – вязкость жидкости, ρ – ее плотность, β – некоторая постоянная.

После преобразований из (3) получается следующее квадратное уравнение для определения dp/dr

$$(\frac{dp}{dr})^2 + \frac{dp}{dr} \frac{\mu^2}{\beta\rho u k_2^2} (u^2 + 1 - \frac{2c}{r\mu} \beta\rho u) - \frac{c\mu^3}{r\beta\rho u k_2^2} + \frac{c^2\mu^2}{r^2 k_2^2} = 0. \quad (4)$$

Решаем это квадратное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} (u^2 + 1 - \frac{2c}{r\mu} \beta\rho u) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\mu^4}{4\beta^2 \rho^2 u^2 k_2^4} (u^2 + 1 - \frac{2c}{r\mu} \beta\rho u)^2 + \frac{c\mu^3}{r\beta\rho u k_2^2} - \frac{c^2\mu^2}{r^2 k_2^2}}. \end{aligned}$$

При выборе верхнего или нижнего знака перед квадратным корнем в выражении dp/dr будем исходить из требования, что $dp/dr \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow 0$, т.е. если градиент давления в пласте равен нулю, то и дебит скважины тоже равен нулю. При этом учитывается, что постоянная c пропорциональна дебиту Q . Такому условию удовлетворяет только верхний знак. Оставляем его, разделяем переменные и интегрируем левую часть этого равенства в пределах от p_k до p , а правую – от r_k до r . Тогда получаем

$$p = p_k - \frac{\mu^2}{2\beta\rho} \int_{r_k}^r \frac{u}{k_2^2} dr - \frac{\mu^2}{2\beta\rho} \int_{r_k}^r \frac{dr}{uk_2^2} + \mu c \int_{r_k}^r \frac{dr}{rk_2^2} + \\ + \frac{\mu^2}{2\beta\rho} \int_{r_k}^r \sqrt{(u^2 + 1 - \frac{2c}{r\mu} \beta\rho u)^2 + 4\beta\rho u k_2^2 (\frac{c\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2} \beta\rho u)} \frac{dr}{uk_2^2}. \quad (5)$$

Здесь p_k – давление на контуре питания, r_k – его радиус. Определим произвольную постоянную c через дебит скважины Q . Имеем равенства $Q = 2\pi(rv_r)_{r=r_c}$, $rv_r = c$, следовательно, $c = Q/2\pi$. Подставляем c в формулу (5)

$$p = p_k - \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D_1(r) - \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D_2(r) + \frac{\mu Q}{2\pi} D_3(r) + \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D(r), \quad (6)$$

где введены обозначения

$$D_1(r) = \int_{r_k}^r \frac{u}{k_2^2} dr, D_2(r) = \int_{r_k}^r \frac{dr}{uk_2^2}, D_3(r) = \int_{r_k}^r \frac{dr}{rk_2^2}, \\ D(r) = \int_{r_k}^r \sqrt{(u^2 + 1 + \frac{Q\beta\rho u}{\pi r\mu})^2 + 2\beta\rho u k_2^2 (\frac{Q\mu}{r} - \frac{Q^2\beta\rho u}{2\pi r^2}) / \pi} \frac{dr}{uk_2^2}.$$

Если функции $u(r), k_2(r)$ имеют сложный вид, то интегралы $D_1(r), D_2(r), D_3(r), D(r)$ вычисляются только численно. Можно исследовать задачу при линейном и экспоненциальном законах изменения этих функций и предложить следующие варианты для $u(r), k_2(r)$:

1. $u(r) = a_1(r + b_1), k_2(r) = a_2(r + b_2),$
2. $u(r) = a_1(r + b_1), k_2(r) = a_2 e^{b_2 r},$
3. $u(r) = a_1 e^{b_1 r}, k_2(r) = a_2(r + b_2),$
4. $u(r) = a_1 e^{b_1 r}, k_2(r) = a_2 e^{b_2 r}.$

Распределения давления для этих случаев имеют следующий вид

$$1. \quad p = p_k - \frac{\mu^2 a_1}{2\beta\rho a_2^2} \left(\ln \frac{r + b_2}{r_k + b_2} + \frac{b_1 - b_2}{r + b_2} - \frac{b_1 - b_2}{r_k + b_2} \right) - \frac{\mu^2}{2\beta\rho a_1 a_2^2 (b_1 - b_2)} \left[\frac{1}{r + b_2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_k + b_2} + \frac{1}{b_1 - b_2} \ln \frac{(r + b_1)(r_k + b_2)}{(r + b_2)(r_k + b_1)} + \frac{\mu Q}{2\pi a_2^2 b_2} \left[\frac{1}{r + b_2} - \frac{1}{r_k + b_2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{b_2^2} \ln \frac{(r + b_2)r_k}{(r_k + b_2)r} \right] + \frac{\mu^2}{2\beta\rho} D(r), \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad p = p_k - \frac{\mu^2 a_1}{8\beta\rho a_2^2 b_2^2} [(2b_2 r + 1 + 2b_1 b_2) e^{-2b_2 r} - (2b_2 r_k + 1 + 2b_1 b_2) e^{-2b_2 r_k}] - \\
-\frac{\mu^2 e^{2b_1 b_2}}{2\beta\rho a_1 a_2^2} [Ei(-2b_2(r + b_1)) - Ei(-2b_2(r_k + b_1))] + \frac{\mu Q}{2\pi a_2^2} [Ei(-2b_2 r) - \\
-Ei(-2b_2 r_k)] + \frac{\mu^2 D(r)}{2\beta\rho}, \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad p = p_k - \frac{\mu^2 a_1 e^{-b_1 b_2}}{2\beta\rho a_2^2} \left[-\frac{e^{b_1 r + b_1 b_2}}{r + b_2} + \frac{e^{b_1 r_k + b_1 b_2}}{r_k + b_2} + b_1 Ei(b_1 r + b_1 b_2) - b_1 Ei(b_1 r_k + \right. \\
\left. + b_1 b_2) \right] - \frac{\mu^2 e^{b_1 b_2}}{2\beta\rho a_1 a_2^2} \left[-\frac{e^{-b_1 r - b_1 b_2}}{r + b_2} + \frac{e^{-b_1 r_k - b_1 b_2}}{r_k + b_2} - b_1 Ei(-b_1 r - b_1 b_2) + b_1 Ei(-b_1 r_k - \right. \\
\left. - b_1 b_2) \right] + \frac{\mu Q}{2\pi a_2^2 b_2} \left[\frac{1}{r + b_2} - \frac{1}{r_k + b_2} - \frac{1}{b_2} \ln \frac{(r + b_2)r_k}{(r_k + b_2)r} \right] + \frac{\mu^2 D(r)}{2\beta\rho}, \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad p = p_k - \frac{\mu^2 a_1}{2\beta\rho a_2^2 (b_1 - 2b_2)} [e^{(b_1 - 2b_2)r} - e^{(b_1 - 2b_2)r_k}] - \frac{\mu^2}{2\beta\rho a_1 a_2^2 (b_1 + 2b_2)} * \\
*[e^{-(b_1 + 2b_2)r} - e^{-(b_1 + 2b_2)r_k}] + \frac{\mu Q}{2\pi a_2^2} [Ei(-2b_2 r) - Ei(-2b_2 r_k)] + \frac{\mu^2 D(r)}{2\beta\rho}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Из формулы (6) получается также решение для функции давления при плоско-радиальном течении в круговом трещиновато-пористом пласте в случае, когда k_1, k_2 – постоянные величины

$$\begin{aligned}
p = p_k - \frac{\mu^2 u}{2\beta\rho k_2^2} (r - r_k) - \frac{\mu^2 (r - r_k)}{2\beta\rho u k_2^2} + \frac{\mu Q}{2\pi k_2^2} \ln \frac{r}{r_k} + \\
+ \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} \int_{r_k}^r \sqrt{\left(u^2 + 1 + \frac{Q\beta\rho u}{\pi r \mu}\right)^2 + 2\beta\rho k_2^2 \left(\frac{Q\mu}{r} - \frac{Q^2 \beta\rho u}{2\pi r^2}\right)/\pi} dr. \tag{11}
\end{aligned}$$

Вычисляя входящий в p интеграл, получим

$$\begin{aligned}
p = p_k - \frac{\mu^2 (r - r_k)}{2\beta\rho u k_2^2} (1 + u^2) + \frac{\mu Q}{2\pi k_2^2} \ln \frac{r}{r_k} + \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} [\sqrt{R} - \\
-\sqrt{a} \ln \frac{2a + br + 2\sqrt{aR}}{r} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \ln (2\sqrt{cR} + 2cr + b)]_{r_k}^r, \tag{12}
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
c = (u^2 + 1)^2, b = 2\beta\rho Q[(u^2 + 1)u / \mu + k_2^2 \mu] / \pi, a = Q^2 \beta^2 \rho^2 u (u - k_2^2 \mu^2) / \pi^2 \mu^2, \\
R = cr^2 + br + a.
\end{aligned}$$

Точные решения (7) – (12) и использовались для тестирования результатов, полученных приближенными методами и показали свою работоспособность. Исследуем также вид индикаторной диаграммы $\Delta p = f(Q)$ в трещиновато-пористом пласте при постоянных u и k_2 . Полагаем в (11) $r = r_c, p = p_c$ (p_c – забойное давление, r_c -радиус скважины)

$$\Delta p = p_k - p_c = \frac{\mu Q}{2\pi k_2^2} \ln \frac{r_k}{r_c} - \frac{\mu^2(r_k - r_c)}{2\beta\rho u k_2^2} (1 + u^2) + \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} * \\ * \int_{r_c}^{r_k} \sqrt{(u^2 + 1)^2 + 2\beta\rho Q[(u^2 + 1)\frac{u}{\mu} + k_2^2\mu]} \frac{1}{\pi r} + \frac{Q^2\beta^2\rho^2 u}{\pi^2\mu^2 r^2} (u - k_2^2\mu^2) dr \quad (13)$$

или

$$\Delta p = \frac{\mu Q}{2\pi k_2^2} \ln \frac{r_k}{r_c} - \frac{\mu^2(r_k - r_c)}{2\beta\rho u k_2^2} (1 + u^2) + \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} [\sqrt{R} - \\ - \sqrt{a} \ln \frac{2a + br + 2\sqrt{aR}}{r} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cr + b)]_{r_c}^{r_k}. \quad (14)$$

Индикаторная диаграмма проходит через начало координат $\Delta p = 0, Q = 0$. Проще всего в этом убедиться, полагая в (13) $Q = 0$. Тогда получим

$$\Delta p = -\frac{\mu^2(r_k - r_c)}{2\beta\rho u k_2^2} (1 + u^2) + \frac{\mu^2}{2\beta\rho u k_2^2} \int_{r_c}^{r_k} \sqrt{(u^2 + 1)^2} dr = \frac{\mu^2(r_k - r_c)}{2\beta\rho u k_2^2} [-(1 + u^2) + (1 + \\ + u^2)] = 0.$$

Введем обозначения

$$\delta_1 = \frac{\mu}{2\pi k_2^2} \ln \frac{r_k}{r_c}, \delta_2 = \frac{\mu^2(r_k - r_c)}{2\beta\rho \sqrt{k_1 k_2^2}} (1 + k_1), \delta_3 = \frac{\mu^2}{2\beta\rho \sqrt{k_1 k_2^2}}$$

и учтем, что с учетом реальных значений параметров формула (14) несколько упрощается. Тогда получим

$$\Delta p = \delta_1 Q - \delta_2 + \delta_3 [\sqrt{R} - \sqrt{a} \ln |2a/r + b| + \frac{b}{2\sqrt{c}} \ln |2cr + b|]_{r_c}^{r_k}. \quad (15)$$

Выберем следующие значения параметров задачи: $h = 1$ м, $r_k = 100$ м, $r_c = 0,1$ м, $\ln r_k/r_c = 6,9078$, $\mu = 1$ мПа/с, $\beta = 10^3$ с/м, $\rho = 817,2$ кг/м³, $k_1 = 10^{-12}$ м².

Для k_2 рассмотрим четыре варианта: 1. $k_2 = 0,2 * 10^{-12}$ м², 2. $k_2 = 0,1 * 10^{-12}$ м², 3. $k_2 = 0,04 * 10^{-12}$ м², 4. $k_2 = 0,02 * 10^{-12}$ м².

Назовем эти случаи 2.1- 2.4. Коэффициенты для них будут такие

$$\delta_{11} = 2,75 * 10^{25}, \delta_{21} = 1,53 * 10^{27}, \delta_{31} = 1,53 * 10^{25}; \delta_{12} = 1,1 * 10^{26},$$

$$\delta_{22} = 6,12 * 10^{27}, \delta_{32} = 6,12 * 10^{25}; \delta_{13} = 6,875 * 10^{26}, \delta_{23} = 38,25 * 10^{27},$$

$$\delta_{33} = 38,25 * 10^{25}; \delta_{14} = 27,5 * 10^{26}, \delta_{24} = 153 * 10^{27}, \delta_{34} = 153 * 10^{25}$$

Например, в случае 2.4 уравнение индикаторной диаграммы имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta p * 10^{-28} = & 0,275Q - 15,3 + 0,153[\sqrt{10^4 + 52Q + 0,067Q^2} - \\ & - \sqrt{0,01 + 0,052Q + 0,067Q^2} + 1,796Q + 0,26Q \ln \left| \frac{0,134Q + 0,052}{0,134Q + 52} \right| + \\ & + 0,26Q \ln |(200 + 0,52Q) / (0,2 + 0,52Q)|]. \end{aligned} \quad (16)$$

Построение индикаторных диаграмм проводилось в четырех случаях (2.1-2.4) в интервале изменения дебита нагнетательной скважины $Q \in [-6 * 10^{-4}, 0]$ с шагом $h=2 * 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ (тридцать точек). Можно было бы брать и большее число точек, но в этом не было необходимости. Вычисления велись в среде Mathcad 2001. Professional. На печать выводились значения аргумента и искомой функции в соответствующих точках и строился ее график. В качестве образца на рис.1 приведен полученный график в случае 2.4. Индикаторная диаграмма близка к прямой, небольшая выпуклость имеется к оси расходов. Полученный график, а также более тщательный анализ формулы (16), показывают, что хотя зависимость $\Delta p = f(Q)$ нелинейная, но эта нелинейность «слабая» и на индикаторной диаграмме при выбранных значениях параметров мало заметна. А вот при первом варианте закона Форхгеймера, как видно из графика, приведенного в работе [3], нелинейность видна очень отчетливо, особенно при приближении к началу координат. Полученные результаты могут быть использованы для выбора наиболее целесообразного режима эксплуатации скважины.

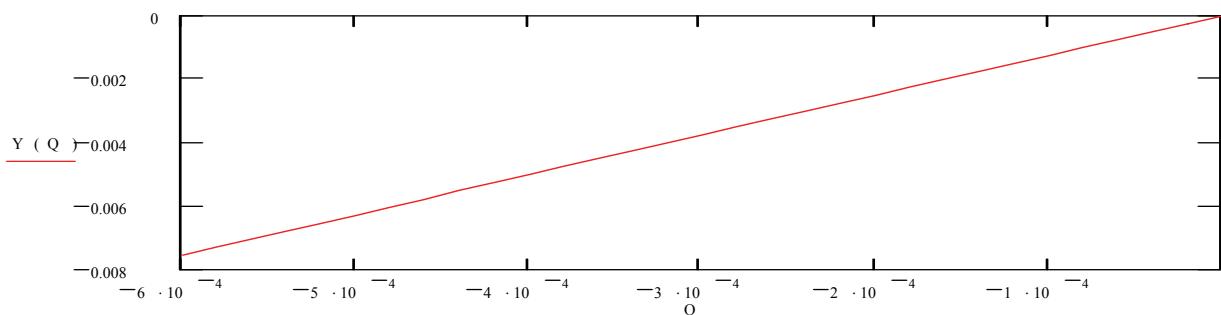


Рис. 1. Индикаторная диаграмма в случае 2.4

Литература

1. Голубев Г.В. Применение дискретных особенностей в задаче определения фильтрационных параметров // Вестник Харьковского национального университета, 2007, № 775, Харьков, с. 99-104.
2. Голубев Г.В. Решение задач фильтрации с использованием дискретных логарифмических особенностей // Труды XIII междунар. симп. МДОЗМФ, Харьков-Херсон, 2007, с. 121-125.
3. Голубев Г.В. Построение индикаторных диаграмм при фильтрации в трещиновато-пористых средах // Труды межд. школ-семинаров МДОЗМФ, вып. 6, Орел, 2008, с. 32-37.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ВОДОЗАБОРА
ВБЛИЗИ ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ,
РАСПОЛОЖЕННОГО НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ОКРУЖНОСТИ¹**

Ю.В. Деткова, Д.Н. Никольский

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,
e-mail: nikolskydn@mail.ru

Исследуется плоская фильтрационная задача о работе водозабора, питающегося естественным потоком грунтовых вод вблизи источника загрязнения, расположенного на непроницаемой окружности. Исследование проведено в рамках модели «разноцветных» жидкостей.

1. Пусть область протекания процесса D представляет собой внешность окружности C с центром в начале декартовой системы координат xOy и радиуса R . На окружности, в точке $M_1(x_1, y_1) \in C$, расположен источник загрязнения мощности q_1 . В области протекания процесса D работает водозабор, который моделируется стоком мощности q_2 . Центр стока расположен в точке $M_2(x_2, y_2)$. Водозабор питается поступательным потоком грунтовых вод, движущегося вдоль оси Ox со скоростью $\mathbf{u} = ue_x$.

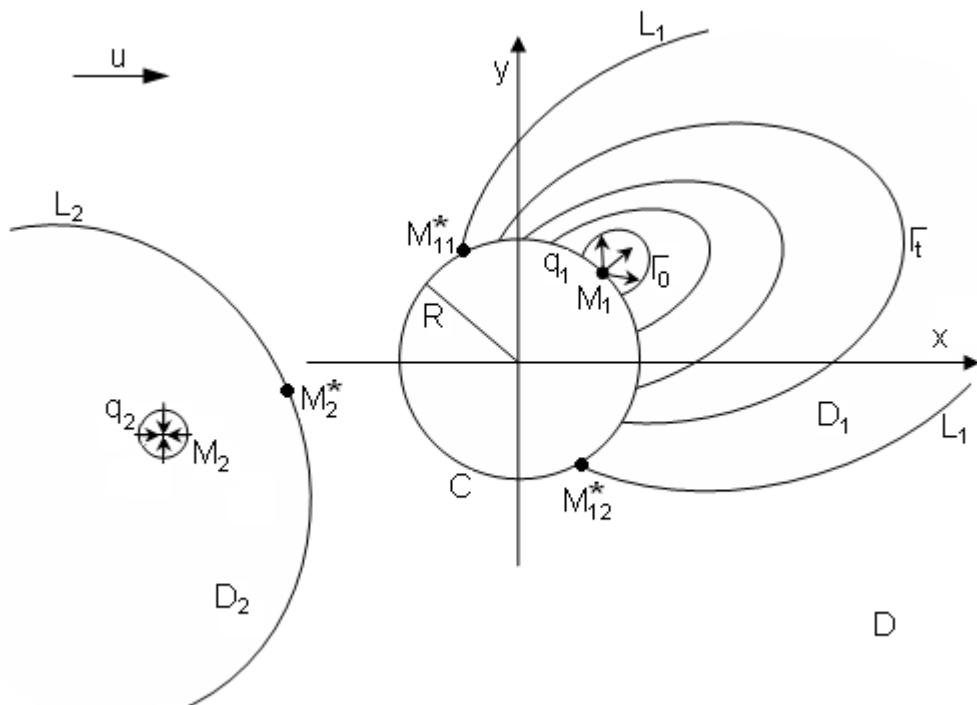


Рис. 1. Постановка задачи

Согласно [1,2] результирующее течение можно описать потенциалом и функцией тока:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МК-491-2008.1).

$$\begin{aligned}
\varphi = & -q_2 \left(\ln r_{M_2 M} + \ln r_{\tilde{M}_2 M} - \ln r_M \right) / (2\pi) + q_1 \pi^{-1} \left(\ln r_{M_1 M} - \ln r_M / 2 \right) + \\
& + ux_M + uR^2 x_M / (x_M^2 + y_M^2), \\
\psi = & -\frac{q_2}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y_M - y_2}{x_M - x_2} + \operatorname{arctg} \frac{y_M - \tilde{y}_2}{x_M - \tilde{x}_2} - \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M} \right) + \\
& + q_1 \pi^{-1} \left(\operatorname{arctg} \frac{y_M - y_1}{x_M - x_1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M} \right) + uy_M - uy_M R^2 / (x_M^2 + y_M^2)
\end{aligned} \tag{1}$$

или полем скоростей:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = & -q_2 \left(r_{M_2 M}^{-2} \mathbf{r}_{M_2 M} + r_{\tilde{M}_2 M}^{-2} \mathbf{r}_{\tilde{M}_2 M} - r_M^{-2} \mathbf{r}_M \right) / (2\pi) + \\
& + q_1 \pi^{-1} \left(r_{M_1 M}^{-2} \mathbf{r}_{M_1 M} - \mathbf{r}_M / (2r_M^2) \right) + u \mathbf{e}_x + \\
& + u \left((y_M^2 - x_M^2) \mathbf{e}_x - 2x_M y_M \mathbf{e}_y \right) / (x_M^2 + y_M^2)^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r}_{M_i M} = (x_M - x_i) \mathbf{e}_x + (y_M - y_i) \mathbf{e}_y$, $i = 1, 2$,

$\mathbf{r}_{\tilde{M}_2 M} = (x_M - \tilde{x}_2) \mathbf{e}_x + (y_M - \tilde{y}_2) \mathbf{e}_y$, $\tilde{x}_2 = x_2 R^2 / (x_2^2 + y_2^2)$, $\tilde{y}_2 = y_2 R^2 / (x_2^2 + y_2^2)$,

$\mathbf{r}_M = x_M \mathbf{e}_x + y_M \mathbf{e}_y$.

Необходимо найти: линию загрязнения L_1 , ограничивающую область загрязнения D_1 , линию захвата водозабора L_2 , ограничивающую область захвата водозабора D_2 и положение границы загрязнения Γ_t в любой момент времени. Алгоритм построения линий L_1 и L_2 путем отыскания линий тока, содержащие критические точки изложен в [3]. Исследования эволюции границы загрязнения Γ_t сводится к решению задачи Коши:

$$d\mathbf{r}_M / dt = \mathbf{v}(M, t) \text{ при } t > 0, \quad \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0(\theta) \text{ при } t = 0. \tag{3}$$

Здесь θ — параметр.

2. Выберем характерные величины. За характерное расстояние L_0 примем радиус окружности R , характерную скорость — скорость поступательного потока $V_0 = u$, характерный дебит — дебит источника загрязнения $Q_0 = q_1$ и характерное время — $T_0 = \pi L_0^2 / Q_0$.

Расположим источник загрязнения в точке $M_1 = (-1, 0)$, а водозабор в точке $M_2 = (-3, 0)$. Дебит источника загрязнения $q_1 = \pi$ остается постоянным. В ходе исследования было установлено наличие критического дебита водозабора $q_* = 0.3849\pi$. Если $q_2 \leq q_*$, загрязнение от источника не попадает в водозабор и распространяется от него по потоку. Если $q_2 > q_*$ загрязнение попадет в водозабор. На рисунке 2 построено поле скоростей для $q_2 = q_*$. Анализируя рисунок, видим, что линии L_1 и L_2 пересекаются в одной точке. При этом загрязнение от источника распространяется вдоль по потоку и не достигает водозабора.

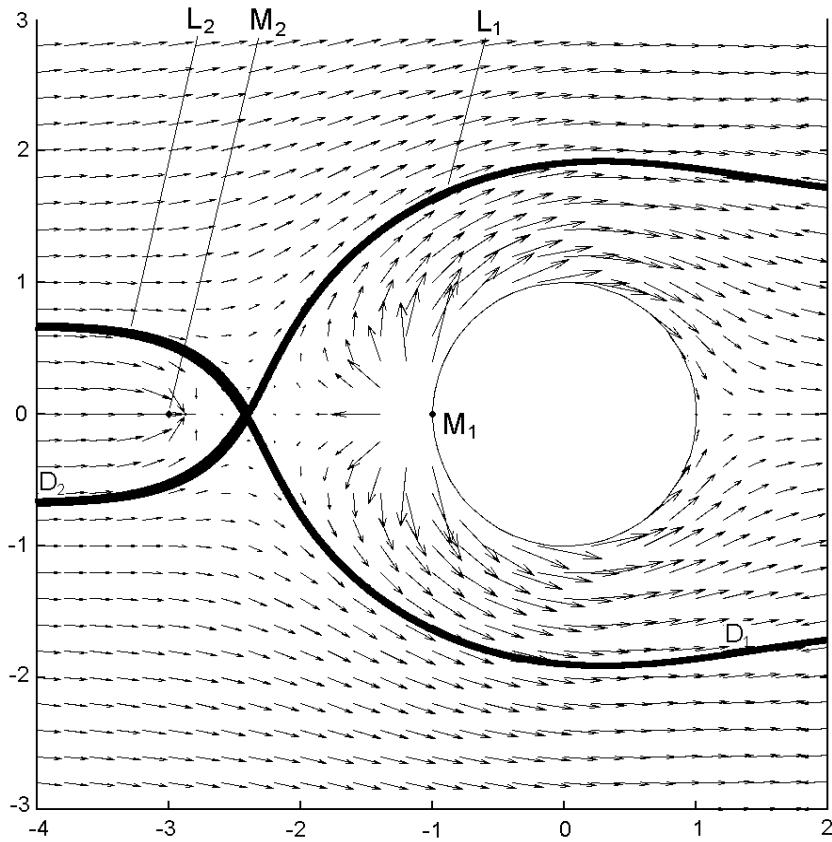


Рис. 2. Поле скоростей при $q_2 = q_*$

Положение границы загрязнения Γ_t в моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$ построены на рисунке 3.

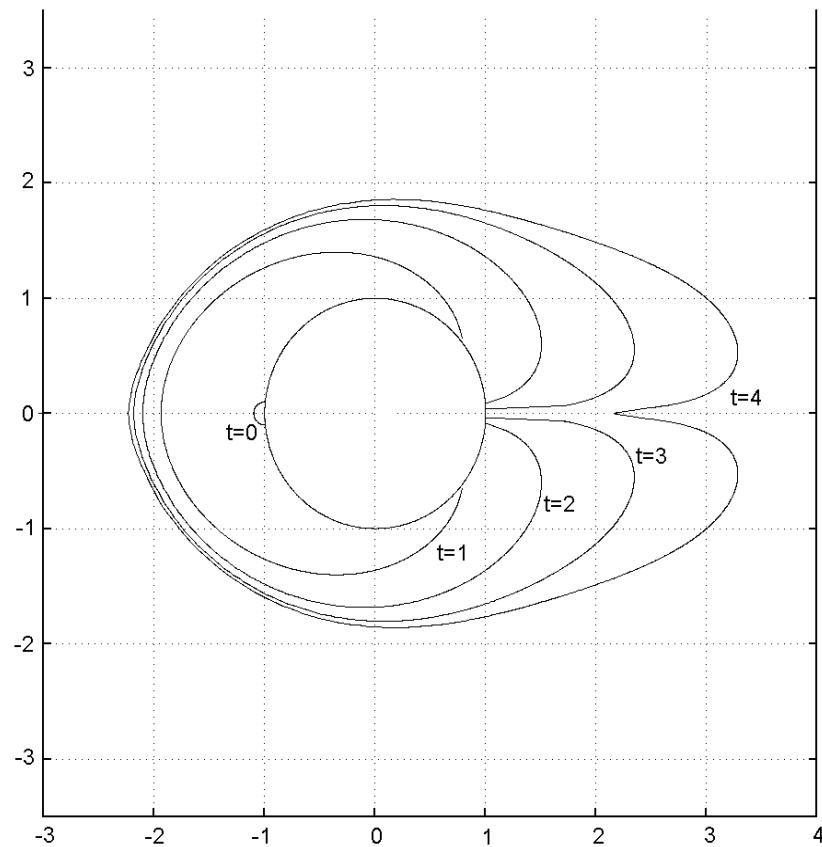


Рис. 3. Эволюция границы загрязнения Γ_t при $q_2 = q_*$

Найденное значение критического дебита позволяет спрогнозировать работу водозабора. При $q_2 < q_*$ область захвата водозабора будет уменьшаться по сравнению со случаем, когда $q_2 = q_*$ и загрязнение не будет попадать в водозабор, распространяясь по потоку. Так, например, на рисунке 4 построены линии загрязнения L_1 и линия захвата водозабора L_2 для $q_2 = q_* / 2$. Анализируя рисунок, видим, что линии L_1 и L_2 не пересекаются.

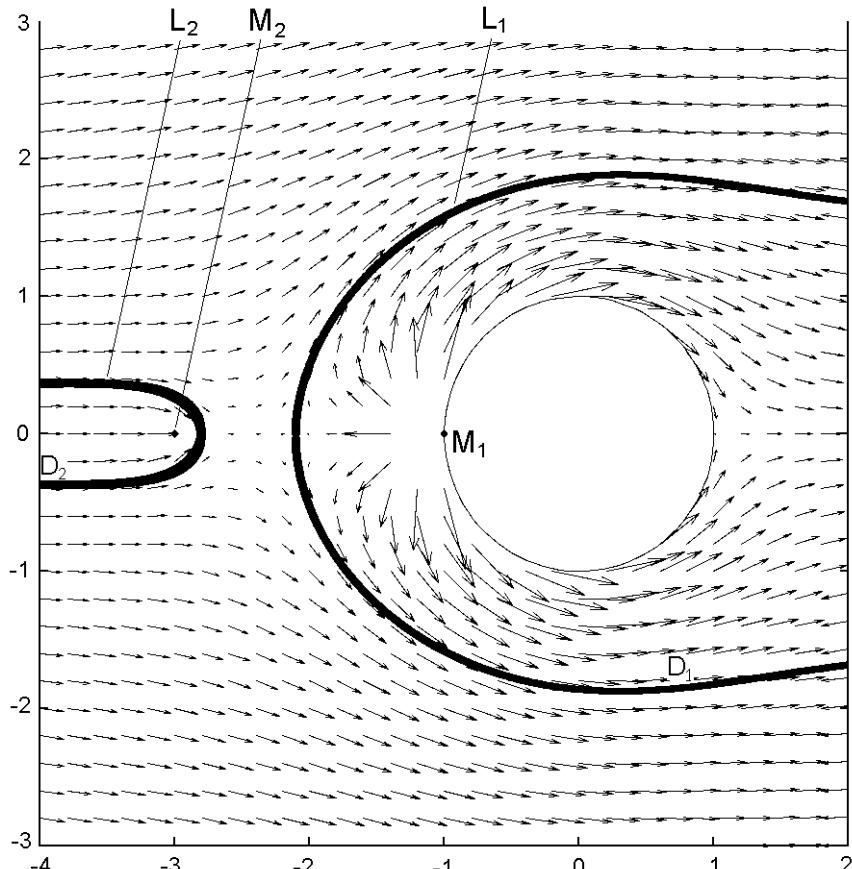


Рис. 4. Поле скоростей при $q_2 = q_* / 2$

На рисунке 5 представлены соответствующие положения границы загрязнения Γ_t в моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$.

При $q_2 > q_*$ область захвата водозабора увеличивается, что приводит к загрязнению самого водозабора. При этом важно рассчитать время T , по истечению которого загрязнение попадает в водозабор. На рисунке 6 показан прорыв загрязнения в водозабор для $q_2 = 2q_*$. Анализируя рисунок, видим, что загрязнение прорывается в водозабор вдоль линии тока M_1M_2 .

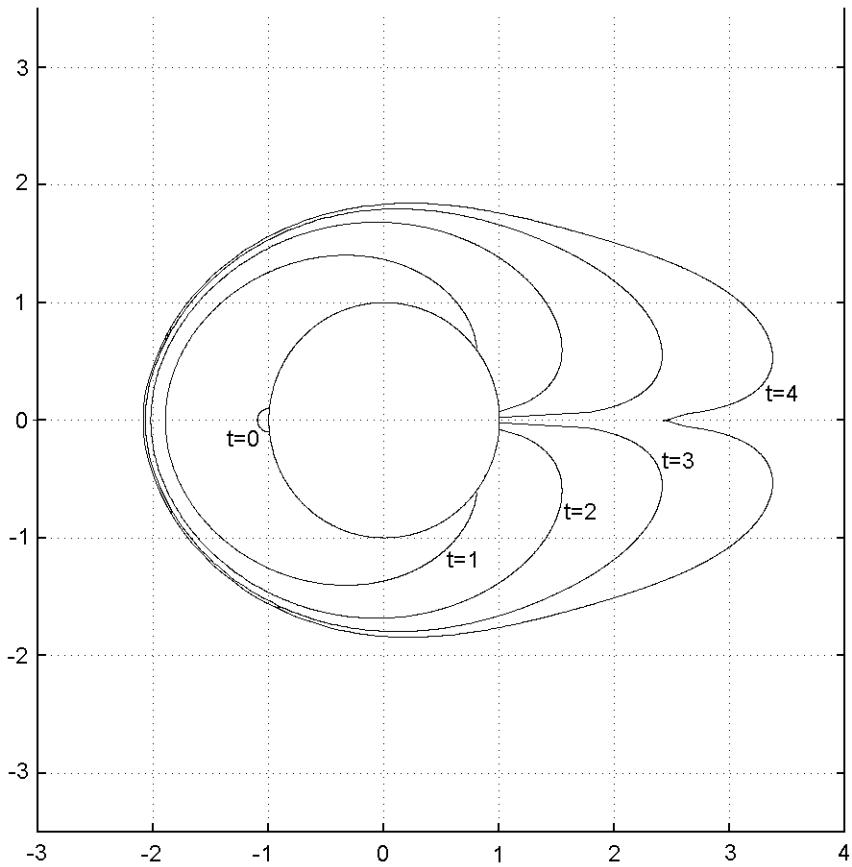


Рис. 5. Эволюция границы загрязнения Γ_t при $q_2 = q_* / 2$

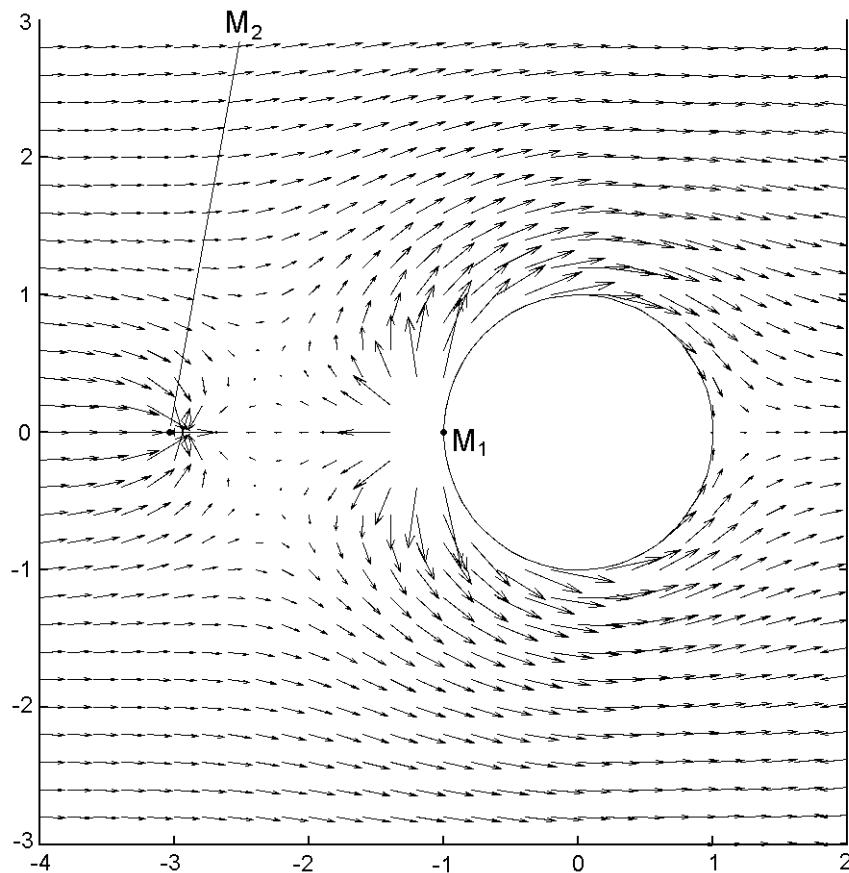


Рис. 6. Поле скоростей при $q_2 = 2q_*$

Положение границы загрязнения Γ_t в моменты времени $t = 0, 1/3T, 2/3T, T$ построены на рисунке 7. Время достижения загрязнением водозабора $T \approx 3.02$.

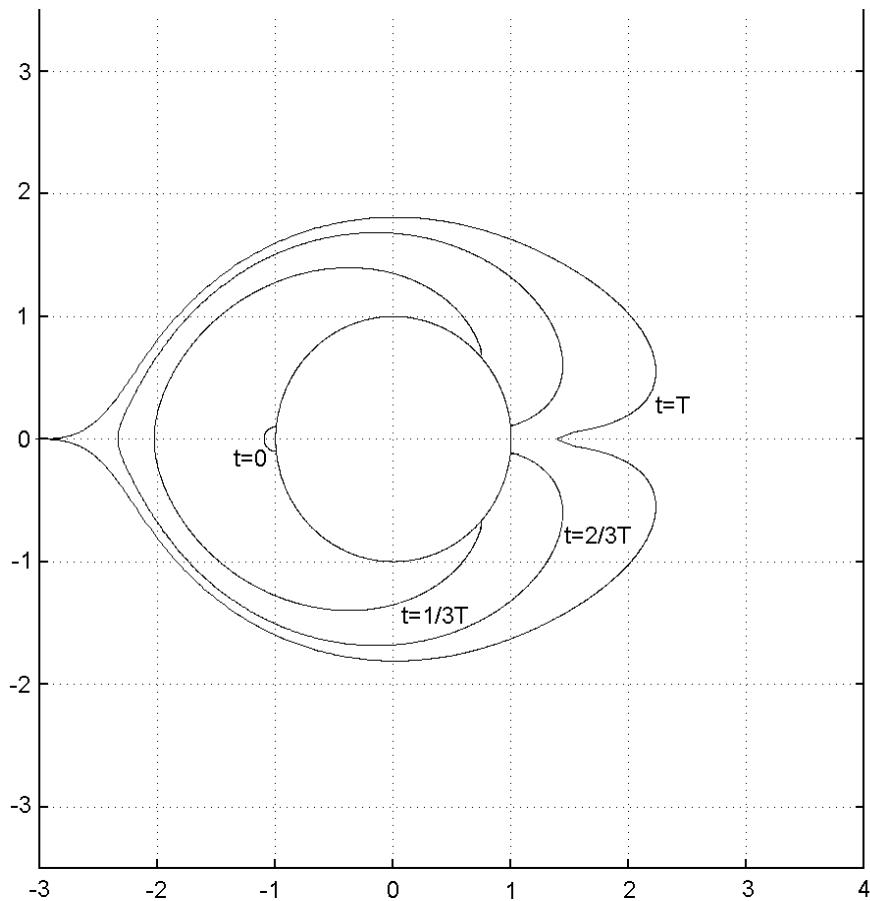


Рис. 7. Эволюция границы загрязнения Γ_t при $q_2 = 2q_*$

Литература

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. – 365 с.
2. Никольский Д.Н. Фильтрационное течение от источника на окружности или прямой // Тр. Межд. шк.-сем. «МДОЗМФ». Вып.5. Орел, 2007. С. 75-78.
3. Никольский Д.Н., Деткова Ю.В. Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на непроницаемой прямой // Тр. Межд. шк.-сем. «МДОЗМФ». Вып.6. Орел, 2008. С. 69-72.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ
О ПОНИЖЕНИИ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДРЕНАЖА¹**

В.И. Дорофеева, Д.Н. Никольский

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,
e-mail: vdorofey@mail.ru, nikolskydn@mail.ru

Исследована плоская задача о понижении уровня грунтовых вод в горизонтальном пласте конечной толщины под действием горизонтальной дренажной трубы. Рассмотрены случаи, когда пласт расположен на непроницаемом водоупоре или ограничен эквипотенциальной плоскостью.

1. Постановка задачи

Требуется определить изменение уровня грунтовых вод в безгранично простирающемся горизонтальном пласте конечной мощности d под действием горизонтальной дренажной трубы и силы тяжести \mathbf{F} . Рассмотрим случай, когда водоносный пласт расположен на непроницаемом горизонтальном водоупоре или ограничен эквипотенциальной горизонтальной плоскостью.

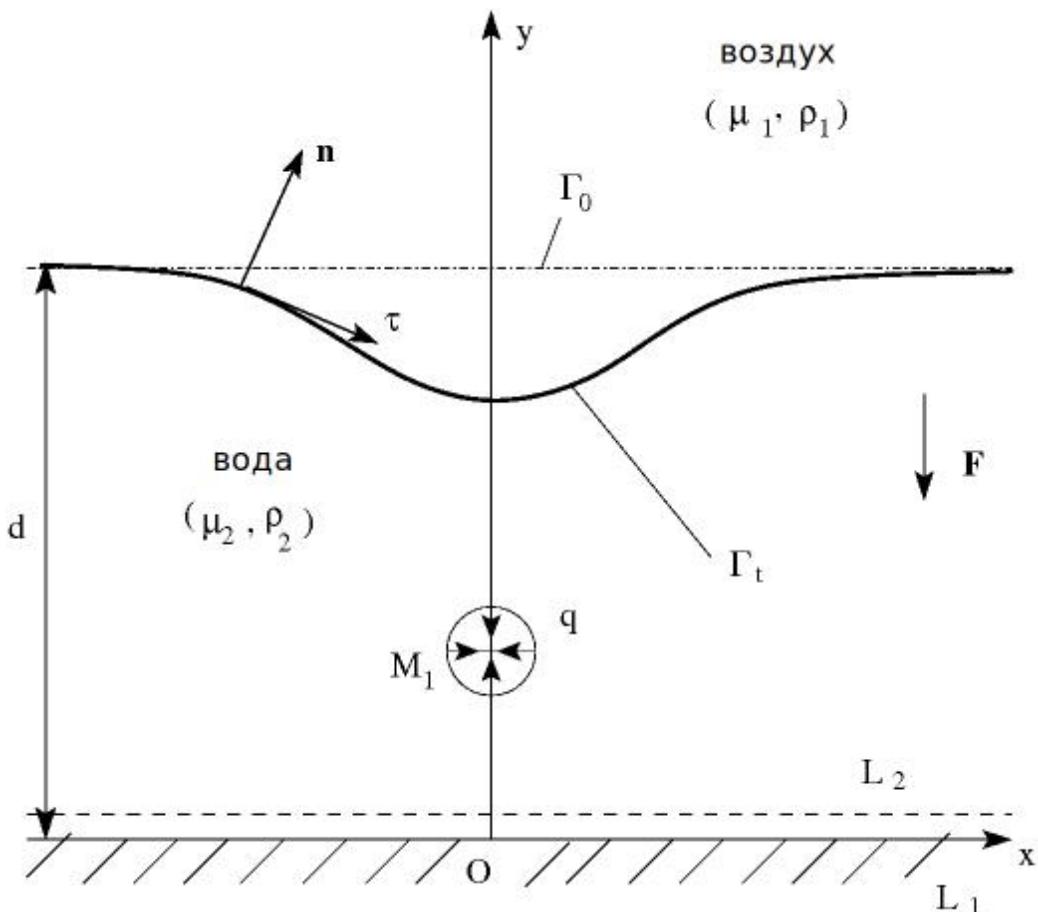


Рис. 1. Постановка задачи

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МК-491-2008.1).

Задача обладает плоскопараллельной симметрией, поэтому исследуем деформацию границы раздела воды и воздуха Γ_t в одной из вертикальной плоскостей. Выберем в этой плоскости декартовую систему координат xOy . Тогда непроницаемая стенка (водоупор) будет моделироваться прямой L_1 , а эквипотенциальная плоскость прямой L_2 . Скважину моделируем точечным стоком мощности q , расположенным в точке M_1 .

Полагаем, что вязкости и плотности воды и воздуха удовлетворяют соотношениям: $\rho_2 \gg \rho_1$ и $\mu_2 \gg \mu_1$. В этом случае эволюция границы раздела воды и воздуха Γ_t описывается системой интегрального и дифференциального уравнения [1]:

$$g - 2G_* g = f \text{ и } d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_0 + \nabla G_* g \text{ на } \Gamma_t, \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi) \text{ на } \Gamma_0, \quad (1)$$

Где $G_* g = \int_{\Gamma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N$ — потенциал двойного слоя плотности g ,

$\Omega = (\nabla_N \Phi_1(M, N), \mathbf{n}_N)$ — ядро интеграла, Φ_1 — нормированный сток с полным расходом равным -1 , \mathbf{n} — нормаль, $f = 2\varphi_0 + 2\alpha\Pi$, φ_0 — потенциал невозмущенного течения, $\alpha = \rho_2/\mu_2$ — параметр, $\Pi = -y + d$ — потенциал силы тяжести $\mathbf{F} = \nabla\Pi$, $\mathbf{v}_0 = \nabla\varphi_0$ — скорость невозмущенного течения, ξ — параметр.

Для численного решения системы (1) в каждый момент времени t_j , $j = \overline{0, J}$ границу раздела воды и воздуха Γ_t представим системой точек \mathbf{r}_m^j , $m = \overline{0, n-1}$, разбивающих ее на приблизительно равные по длине части. Порядок точек определяется направлением обхода границы Γ_t . Заменяя в (1) интегралы на суммы, а дифференциалы их разностными аналогами, получим систему линейных алгебраических уравнений и соотношения для вычисления элементарных смещений точек границы [1]:

$$\begin{aligned} g_m^{pj} &= Ag_m^{p-1,j} + \tau f_m^j, A = E - \tau B, Bg_m^{p-1,j} = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} g_k^{p-1,j} \Omega_{mk}^j \Delta l_k^j, \\ \Delta \mathbf{r}_m^j / \Delta t^j &= \mathbf{v}_{0m}^j + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} \Theta \mathbf{V}_{mk}^j \Delta g_k^j, m = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, J}, p = \overline{0, P}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь E — единичная матрица, τ — параметр, подбираемый экспериментально, $\mathbf{V} = \partial\Psi_2 / \partial y_M \mathbf{i} - \partial\Psi_2 / \partial x_M \mathbf{j}$ — скорость нормированного вихря, циркуляция которого равна -1 , $\Psi_2(M, N)$ — его функция тока, Θ — регуляризирующая функция [2].

Предполагается, что система линейных алгебраических уравнений из (2) удовлетворяет необходимому и достаточному условию разрешимости $\rho(A) < 1$. Число итераций P выбирается из условия, $\|g^P - g^{P-1}\| / \|g^P\| \leq (1 - \|A\|) / \|A\| \cdot \delta$, где δ — заданная точность.

2. Случай безграничного грунта

Рассмотрим случай, когда область протекания процесса безгранична. Тогда потенциал и скорость невозмущенного течения примут вид:

$$\varphi_0 = q(2\pi)^{-1} \ln(r_{M_1 M} / R_p), \quad \mathbf{v}_0 = q(2\pi)^{-1} \mathbf{r}_{M_1 M} / r_M^2, \quad (3)$$

а потенциал нормированного стока и функция тока нормированного вихря, входящие в подынтегральные выражения основной системы уравнений имеют вид:

$$\Phi_1 = -(2\pi)^{-1} \ln(r_{NM} / R_p), \quad \Psi_2 = (2\pi)^{-1} \ln(r_{NM} / R_p). \quad (4)$$

За характерное расстояние L_0 выберем расстояние от центра стока до границы раздела воды и воздуха Γ_0 при $t=0$, за характерное время выберем время $T_0 = \pi L_0^2 / q$.

На рисунке 2 представлены последовательные положения границы раздела воды и воздуха в моменты времени $t=0, 1/3T, 2/3T, T$ при $n=251$. Время достижения границей раздела стока при этом $T=2.02$. Вычисления проводились при $R_p = 200$ и $\tau = 0.5$.

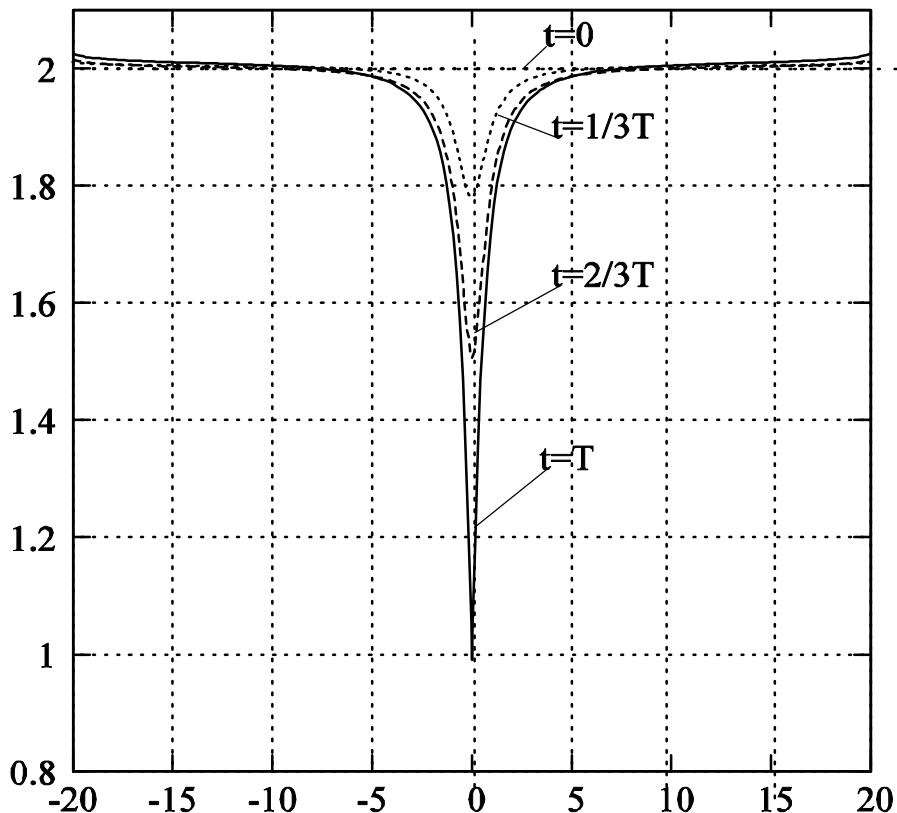


Рис. 2. Эволюция границы Γ_t в случае безграничного грунта

В таблице 1 приведена зависимость времени достижения контура скважины T и числа обусловленности $v = v(A)$ от числа n точек разбиения подвижной границы Γ_t . Для оценки практической сходимости также приведена величина $\eta = |1 - T/T_p| \cdot 100\%$, где T - время из текущего столбца, T_p - время из предыдущего столбца.

Табл. 1. Зависимость времени T и числа обусловленности v от величины n

n	51	101	151	201	251
T	2.86	2.29	2.11	2.04	2.02
η	-	19.9	7.8	3.3	0.9
v	1.41	1.85	2.26	4.007	5.23

Анализируя таблицу 1, замечаем, что при увеличении n наблюдается уменьшение погрешности η . Последнее подтверждает наличие практической сходимости. Об устойчивости численных расчетов свидетельствует стабильное поведение числа обусловленности v .

3. Случай ограниченного грунта

Пусть область протекания процесса ограничена непроницаемой прямой L_1 . Тогда потенциал и скорость невозмущенного течения примут вид

$$\varphi_0 = q(2\pi)^{-1} \left(\ln(r_{M_1 M} / Rp) + \ln(r_{\tilde{M}_1 M} / (Rp + y_1)) \right), \quad \mathbf{v}_0 = q(2\pi)^{-1} \left(\mathbf{r}_{M_1 M} / r_{M_1 M}^2 + \mathbf{r}_{\tilde{M}_1 M} / r_{\tilde{M}_1 M}^2 \right), \quad (5)$$

а потенциал стока и функция тока, входящие в ядра интегралов основной системы:

$$\Phi_1 = -(2\pi)^{-1} (\ln r_{NM} + \ln r_{\tilde{N}M}), \quad \Psi_2 = (2\pi)^{-1} (\ln r_{NM} - \ln r_{\tilde{N}M}). \quad (6)$$

Время достижения границей раздела воды и воздуха стока в данном случае обозначим T_1 . Последовательные положения границы раздела воды и воздуха построены на рисунке 3. Причем, время $T_1 = 1.8$, а расстояние $d = 2$.

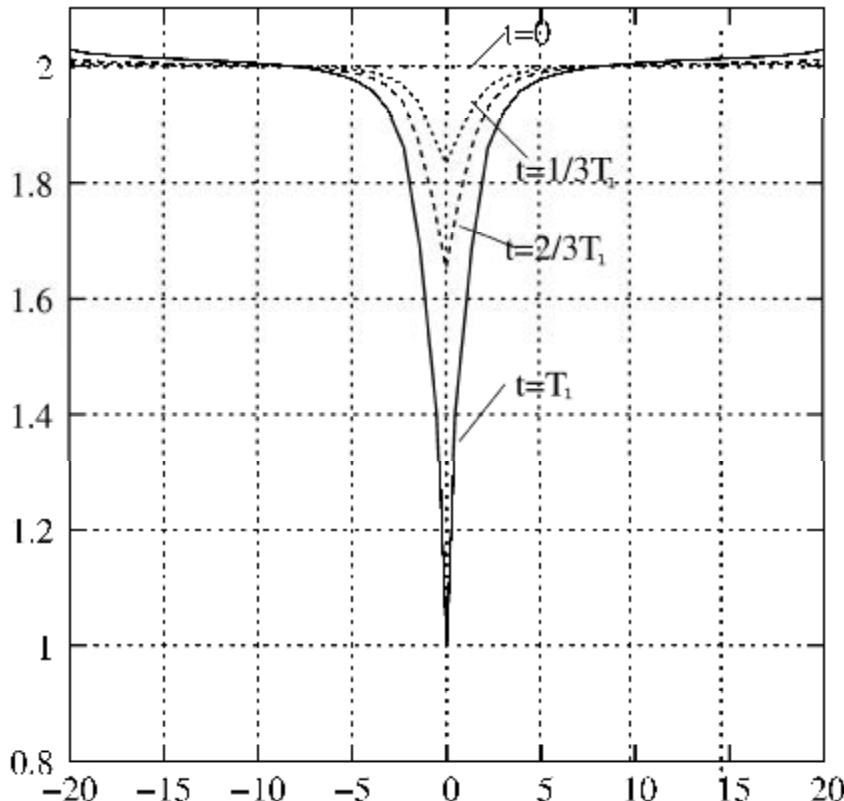


Рис. 3. Эволюция границы Γ_t при наличии непроницаемого водоупора

Далее рассмотрим случай, когда область протекания процесса ограничена эквипотенциалю L_2 . Функции φ_0 , \mathbf{v}_0 , Φ_1 и Ψ_2 , входящие в основную систему уравнений, примут вид:

$$\varphi_0 = q(2\pi)^{-1} \left(\ln(r_{M_1 M} / Rp) - \ln(r_{\tilde{M}_1 M} / (Rp + y_1)) \right), \quad \mathbf{v}_0 = q(2\pi)^{-1} \left(\mathbf{r}_{M_1 M} / r_{M_1 M}^2 - \mathbf{r}_{\tilde{M}_1 M} / r_{\tilde{M}_1 M}^2 \right), \quad (7)$$

$$\Phi_1 = -(2\pi)^{-1} (\ln r_{NM} - \ln r_{\tilde{N}M}), \quad \Psi_2 = (2\pi)^{-1} (\ln r_{NM} + \ln r_{\tilde{N}M}). \quad (8)$$

Время достижения стока границей раздела воды и воздуха в данном случае обозначим T_2 . Характер стягивания границы раздела воды и воздуха представлен на рисунке 4. На этом рисунке $T_2 = 2.54$ и $d = 2$.

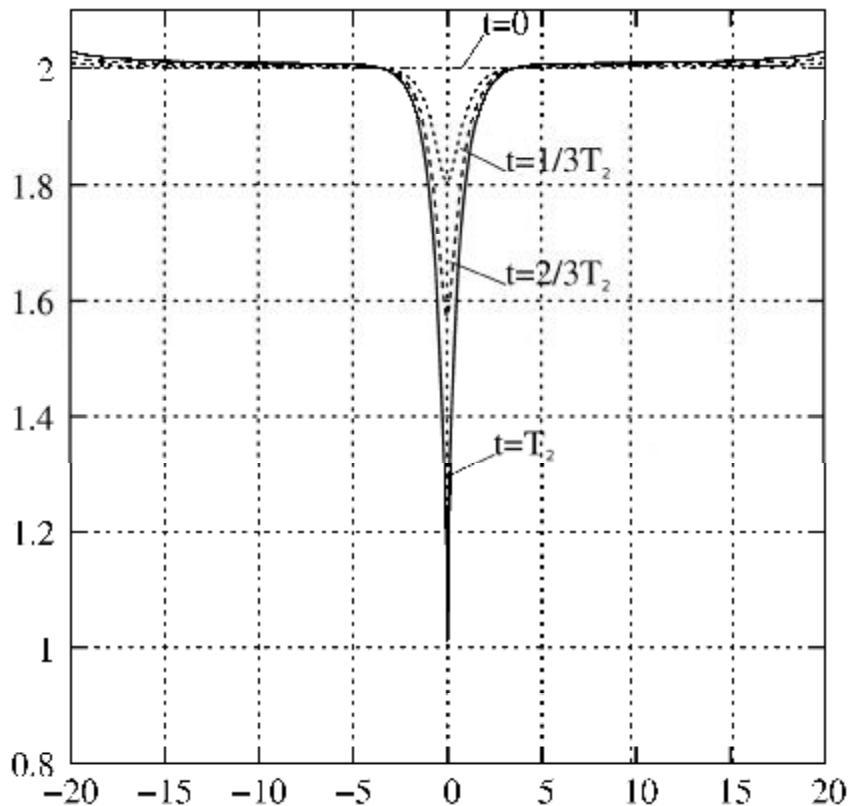


Рис. 4. Эволюция границы Γ_t при наличии эквипотенциали

Анализируя рисунки 3 и 4 видим, что ширина области осущенной в случае наличия непроницаемого водоупора шире, чем в случае наличия эквипотенциали. При этом время T_1 достижения границей раздела воды и воздуха стока в случае наличия водоупора меньше чем время T_2 в случае наличия эквипотенциали.

Проанализируем влияние расстояния d от границы раздела воды и воздуха Γ_0 до границ L_1 или L_2 на эволюцию границы раздела воды и воздуха. В таблице 2 представлена зависимость времени T_1 и времени T_2 от расстояния d . Результаты получены при $n=251$. Что соответствует времени достижения границы раздела воды и воздуха в случае безграничного грунта $T = 2.02$.

Табл. 2. Зависимость времени T_1 и T_2 от расстояния d

d	2	4	5	10	20
T_1	1.8	1.95	1.98	2.02	2.02
T_2	2.54	2.13	2.07	2.06	2.02

Видим, что с увеличением расстояния d значения T_1 и T_2 стремятся к значению T . Последнее указывает на ослабление влияния границы области фильтрации L_1 или L_2 по мере ее удаления от области протекания процесса.

Литература

1. Никольский Д.Н. К вопросу построения дискретной схемы для плоской задачи эволюции границы раздела различных жидкостей // Вычислительные технологии, 2008.– Т.13, №4.– С. 90-96.
2. Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах // Дифференциальные уравнения.– 2007.– Т. 43, № 9.– С. 1263-1276.

**РАЗРАБОТКА И СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ
ИНДИКАТОРОВ КУРСА И ГЛИССАДЫ С МАЯТНИКОВОЙ
СИСТЕМОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ ОСЕЙ В УСЛОВИЯХ
КАЧКИ КОРАБЛЯ НА РЕГУЛЯРНОМ И НЕРЕГУЛЯРНОМ
МОРСКОМ ВОЛНЕНИИ**

И.И. Икрянов

Россия, ЗАО «НТЦ Альфа-М», iignat@mail.ru

Разрабатываются и сравниваются математические модели движения индикаторов курса и глиссады с маятниковой системой стабилизации оптических осей в условиях качки корабля на регулярном и нерегулярном волнении. Приводятся результаты расчетов, выполненных для различных параметров качки корабля.

Введение

Использование вертолетов на кораблях различных типов существенно повышает эксплуатационные возможности как гражданских судов, так и кораблей ВМФ. Вместе с тем, использование вертолетов палубного базирования предъявляет существенные требования к обеспечению безопасности взлета и, особенно, посадки на палубу корабля.

Одним из важных аспектов безопасной посадки вертолета на взлетно-посадочную палубу (ВППл) корабля является обеспечение пилота вертолета курсо-глиссадной информацией. Для этих целей в разрабатываемых в настоящий момент отечественных системах визуальной посадки вертолета на ВППл используются оптические индикаторы курса (ИК) и глиссады (ИГ) с пассивной (маятниковой) системой стабилизации оптических осей относительно крена и дифферента корабля.

Конструктивно ИК/ИГ представляют собой блоки огней, которые объединены в две сборки, одна из которых используется для индикации курса/глиссады вдоль продольной оси корабля, а вторая под углом в сторону кормы. Обе сборки ИК/ИГ устанавливаются в общую раму, которая крепится к корпусу с помощью карданового подвеса, который, в свою очередь, обеспечивает свободное движение блоков по крену и дифференту. При отклонении от заданной глиссады вверх летчик наблюдает желтые, а вниз — красные огни ИК/ИГ.

Качка корабля вызывает погрешность стабилизации ИК/ИГ относительно истинной вертикали, которая выражается в колебаниях оптической оси индикаторов курса и глиссады. Колебания оптической оси индикаторов, в свою очередь, вызывают искажение сигнала, передаваемого летчику. Погрешность стабилизации индикаторов курса и глиссады относительно истинной вертикали зависит от размещения ИК/ИГ на ВППл (расстояния точки подвеса ИК/ИГ от кормы и борта корабля), от конструктивных особенностей ИК/ИГ, от амплитуды и частоты качки корабля по крену и дифференту.

Величина погрешности стабилизации ИК/ИГ относительно истинной вертикали является фактором определяющим возможность эксплуатации ИК/ИГ. Цель данной работы – разработать модель, которая позволит вычислять погрешность стабилизации ИК/ИГ относительно истинной вертикали.

Модель движения ИК/ИГ при воздействии качки корабля на регулярном и нерегулярном волнении

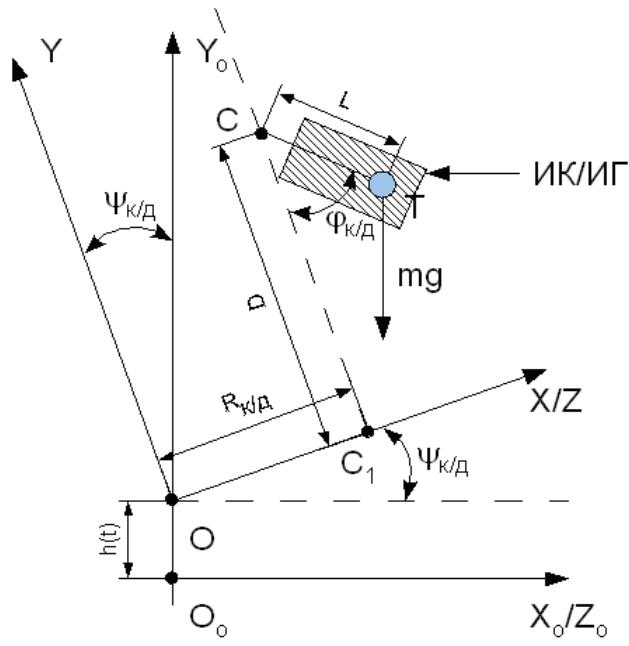


Рис. 1. Система координат для описания плоского движения ИК/ИГ

На рис.1 показана система координат для описания движения ИК/ИГ. Вертикальные перемещения $h(t)$ центра масс корабля вдоль оси O_0Y_0 обусловлены возникновением восстанавливающей силы и характеризует вертикальную качку корабля. Поворот на углы ψ_k и ψ_d характеризует качку корабля по крену и дифференту соответственно. Будем полагать, что корабль не совершает маневров по курсу и угол рысканья всегда равен нулю.

Угловое положение маятника в подвижной системе координат OXYZ определяется углом φ .

Координаты точки Т (см. рис. 3)в системе $O_0X_0Y_0Z_0$ равны:

$$\begin{cases} x_r = R_{K/D} \cos(\psi_{K/D}) - D \sin(\psi_{K/D}) + L \sin(\varphi_{K/D} + \psi_{K/D}) \\ y_r = R_{K/D} \sin(\psi_{K/D}) - D \cos(\psi_{K/D}) + L \cos(\varphi_{K/D} + \psi_{K/D}) + h(t) \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения движения ИК/ИГ в обобщенных координатах можно записать в виде уравнений Лагранжа 2-ого рода [3]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

где q_i , \dot{q}_i – обобщенные координаты и скорости;

Q_i – обобщенные силы;

n – число степеней свободы системы.

Будем полагать, что:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - B_i q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где B_i – абсолютный коэффициент демпфирования.

Дифференцируя (1) и подставляя в (2), пренебрегая членами второго и большего порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 2C\sqrt{\frac{g}{L}}\dot{\phi} + \frac{1}{L}\left(g + \ddot{h}(t) - D\psi_{\text{К/Д}}^2 + R_{\text{К/Д}}\ddot{\psi}_{\text{К/Д}}\right)\phi = \\ = \frac{1}{L}\left((D - L)\ddot{\psi}_{\text{К/Д}} - (g + \ddot{h}(t))\psi_{\text{К/Д}} + R_{\text{К/Д}}\dot{\psi}_{\text{К/Д}}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } C = \frac{B}{2gL^2\sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

Уравнение (3) описывает плоское движение ИК/ИГ. Основная интересующая нас характеристика движения ИК/ИГ – это абсолютная величина отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали. Данная величина определяется как сумма входного воздействия – угла наклона палубы корабля и выходного сигнала системы – угла наклона ИК/ИГ:

$$\delta = |\phi + \psi_{\text{К/Д}}|. \quad (4)$$

Существует несколько способов описания качки корабля на морском волнении. В способе, описания качки корабля на морском волнении разработанном Крыловым А.Н., принимается, что морское волнение периодично по времени, профиль взволнованной поверхности синусоидальный, гребни волн параллельны, волны распространяются в одном направлении. Реакция корабля на такое воздействие также может описываться синусоидой. Такая модель хорошо описывает мертвую зыбь и может быть использована для моделирования установившегося ветрового волнения при не очень больших значениях скорости ветра.

Более точные способы, рассматривают морское волнение а следовательно, и качку корабля, как случайный процесс. Одной из характеристик таких процессов является спектральная плотность случайного процесса на выходе линейной системы, которую удобно использовать для моделирования качки корабля в условиях нерегулярного волнения.

В соответствии с моделью качки корабля предложенной Крыловым А.Н, будем полагать:

$$h(t) = 0, \quad \psi_{\text{К/Д}} = \psi_{\max} \sin(\omega t) \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) в уравнение (3), получаем:

$$\ddot{\varphi} + 2C\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D}{L} \psi_{\max}^2 \eta^2 - \frac{R}{L} \psi_{\max} \eta^2 \sin(\omega t) \right) \varphi = \\ = -\omega_0^2 \psi_{\max} \left(\left(1 + \frac{D-L}{L} \eta^2 \right) \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \frac{R}{L} \psi_{\max} \eta^2 \right) \quad (6)$$

где $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Подставляя численное решение уравнения (6) и соотношения (5) в (4), получим значение отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали. В численном решении уравнения (6) период времени, на протяжении которого идет затухание собственных колебаний маятника, отбрасывается.

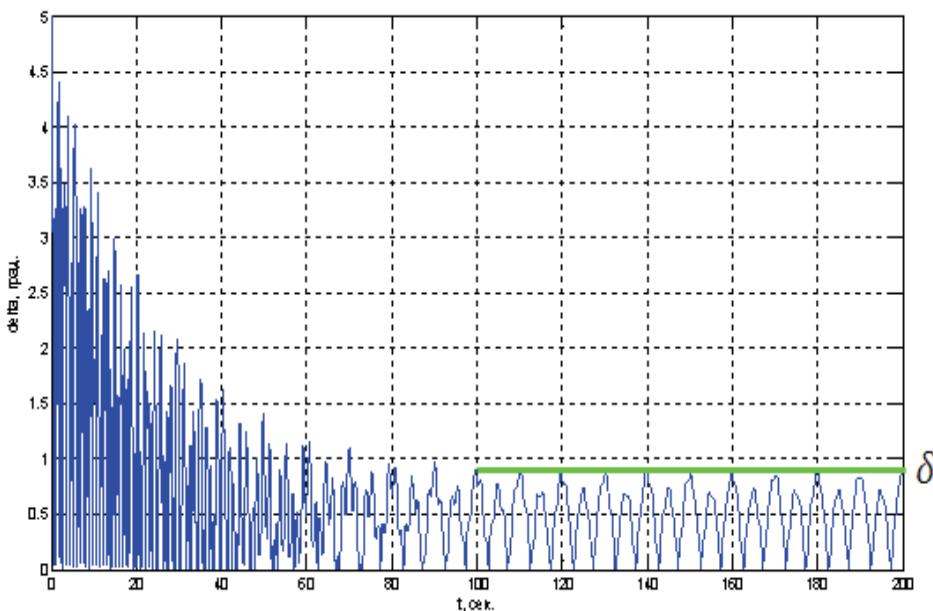


Рис. 2. Пример определения величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали с помощью модели ИК/ИГ при качке корабля на регулярном волнении

Для моделирования нерегулярного морского волнения и, соответственно, качки корабля на нем, удобно использовать методы Монте-Карло, которые базируются на спектральном описании процесса качки. Для использования данного метода плотность спектра качки, полученная экспериментальным путем, аппроксимируется выражением вида:

$$S(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(\omega-\omega_m)^2}{2D}} + \frac{A_1}{\sqrt{2\pi D_1}} e^{-\frac{(\omega-\omega_{m1})^2}{2D_1}}$$

Коэффициенты A , A_1 , D , D_1 , ω_m , ω_{m1} подбираются таким образом, чтобы наилучшим образом аппроксимировать полученные экспериментальные данные. После чего предполагается, что качка корабля на волнении задается выражением:

$$\psi_{\text{К/Д}} = \sum_i A_i \sin(\omega_i t + f_i) \quad (7)$$

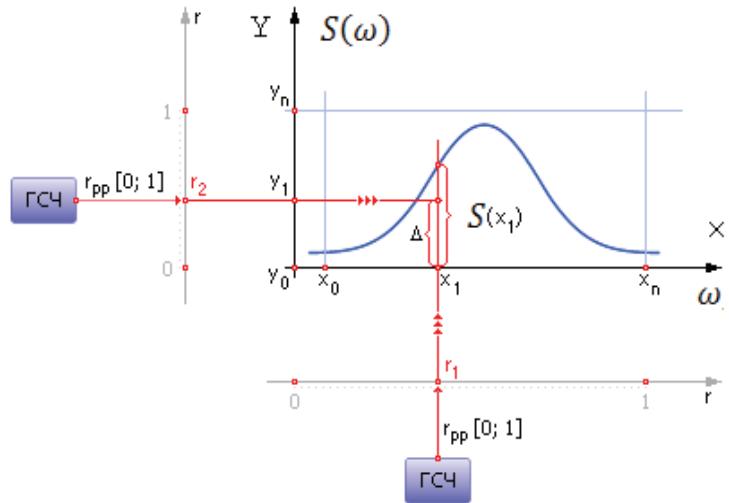


Рис. 3. Генерации выборок A_i и ω_i для выражения (7)
с помощью метода усечения

Для генерации выборок A_i и ω_i используется метод усечения, суть которого состоит в следующем.

График функции $S(\omega)$ вписывается в прямоугольник рис. 3. На ось Y подают случайное равномерно распределенное число из ГСЧ (генератор случайных чисел). На ось X подают случайное равномерно распределенное число из ГСЧ. Если точка в пересечении этих двух координат лежит ниже кривой спектральной плотности качки, то событие X произошло – гармоника с соответствующей частотой добавляется в выборку, иначе - нет. После получения, таким образом, выборки $\{\omega_i\}$, производится ее сортировка по возрастанию значений ω_i . Амплитуда каждой отдельной гармоники определяется из соотношения Винера –Хинчина:

$$A_i = \sqrt{2S(\omega_i)(\omega_{i+1} - \omega_i)}$$

Последняя гармоника в выборке отбрасывается приравниванием ее амплитуды к нулю. Фазы каждой из гармоник получаются с помощью ГСЧ как равномерно распределенное число на интервале от 0 до 2π .

Определив, таким образом, вектора $\{A_i\}$, $\{\omega_i\}$ и $\{f_i\}$, подставляя выражение (7) в выражение (3) получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} + 2C\sqrt{\frac{g}{L}}\dot{\phi} + \frac{1}{L}\left(g + D\left(\sum_i A_i \omega_i \cos(\omega_i t + f_i)\right)^2\right. \\ & \quad \left.- R_{K/D}\left(\sum_i A_i \omega_i^2 \sin(\omega_i t + f_i)\right)\right)\phi = \\ & = \frac{1}{L}\left(-(D-L)\sum_i A_i \omega_i^2 \sin(\omega_i t + f_i) - g\sum_i A_i \sin(\omega_i t + f_i) + \right. \\ & \quad \left.+ R_{K/D}\left(\sum_i A_i \omega_i \cos(\omega_i t + f_i)\right)^2\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) описывает движение ИК/ИГ при воздействии на него нерегулярной качки корабля. Решая данное уравнение численно, и подставляя решение в выражение (4), получим зависимость величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали при воздействии нерегулярной качки судна от времени $\delta(t)$.

Для получения конечного результата произведем выборку значений из полученной зависимости. Первые 100 сек., на протяжении которых происходит затухание собственных колебаний ИК/ИГ, отбрасываются. Оставшийся временной интервал разобьем на отрезки длительностью по 60 сек. На каждом отрезке определим максимальное значение величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали и будем считать его результатом испытания, произведенного на данном отрезке времени. Таким образом, после данной операции получится выборка значений величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали при воздействии нерегулярной качки судна $\{\delta_k\}$, которую можно рассматривать как результат определенного количества испытаний, при этом $\{\delta_k\} \in \delta(t)$. Для повышения точности расчетов рекомендуется получение нескольких выборок.

Далее необходимо на основании одной или нескольких выборок определить доверительный интервал $(\delta_{\min}, \delta_{\max})$ величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали по известным формулам [1].

Сравнение полученных моделей

В табл. 1 представлены результаты расчета величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали, выполненные с помощью различных моделей.

В качестве исходных данных для расчета по модели движения ИК/ИГ в условиях нерегулярной качки корабля использовались плотности спектров качки корабля, по дифференту полученные с помощью с помощью метода описанного в [2]. Период собственных колебаний корабля по дифференту предполагался равным 5 с. Плотность спектра волновых ординат бралась из ОСТ 5.1003-80 для случая развитого морского волнения. При этом предполагается, что сравнение указанных моделей адекватно лишь при $h_{3\%} \leq 2$ м. При больших значениях $h_{3\%}$, качку корабля нельзя рассматривать как регулярную и соответственно некорректно сравнивать указанные модели.

Табл. 1. Расчет величины отклонения ИК/ИГ от истинной вертикали

Амплитуда качки, $\psi_{\max} (3\%)^\circ$	Параметры качки			Модель нерегулярного волнения, δ° (95 %)	Модель регулярного волнения, δ°
	Частота максимума волнения, $\omega_m, \text{с}^{-1}$	Высота волн, $h_{3\%}, \text{м}$	Частота максимума энергии качки, $\omega, \text{с}^{-1}$		
0.01	12.5	0.25	11.4	(0.08,0.24)	0.07
0.61	1.5	1	1.36	(0.58,0.86)	0.5
0.99	1.39	1.5	1.3	(0.85,1.1)	0.75
1.74	1.06		1.03	(0.9,1.25)	0.85

Для интегрирования уравнений (6) и (8) использовался метод Рунге-Кутта 4-ого порядка с фиксированным шагом [4]. Шаг интегрирования равнялся $\Delta t = 0.01$ сек. Для подготовки выборок $\{A_i\}$, $\{\omega_i\}$ и $\{f_i\}$, в уравнении (8) использовался штатный генератор случайных чисел системы Matlab2008b. Количество элементов в каждой выборке равнялось 1000.

Из полученных результатов видно, что при волнении $h_{3\%} \leq 2$ м результаты, полученные с помощью обеих моделей, хорошо согласуются друг с другом.

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.– М: Наука, 1964 г., 576 с.
2. Маков Ю.Л. Качка судов: учеб. пособие.– Калининград: Изд-во ФГОУ ВПО “КГТУ”, 2007 – 321 с. ISBN 978-5-94826-191-1
3. Парс Л.А. «Аналитическая динамика» пер. с англ. К.А.Лаурье изд. «Наука» 1971
4. Ильина А.В., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.– 132 с. ISBN 5-93972-231-8
5. Крылов Ю.М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн.– Л.: Гидрометеоиздат, 1966.– 255 с.

ВЛИЯНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ВОДОЗАБОРА НА ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЙ ДЕБИТ В СЛОЕ С ИСТОЧНИКОМ ЗАГРЯЗНЕНИЯ¹

А.А. Квасов

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Исследована работа водозабора в слоях постоянной толщины в условиях поступательного потока грунтовых вод и источника загрязнения. Определён предельно допустимый дебит водозабора, работающего без загрязнения. Исследовано влияние на предельно допустимый дебит положения водозабора.

1. Рассмотрим плоскопараллельную линейную фильтрацию в однородном слое грунта с плоской горизонтальной подошвой. Течение обусловлено нагнетанием загрязнения в условиях поступательного потока грунтовых вод и работой водозабора. Поступательный поток характеризуем скоростью u . Водозабор и источник загрязнения моделируем точечными эксплуатационной и нагнетательной скважинами мощности q_c и q_i . Выберем начало координат в точке забоя нагнетательной скважины, ось Ox направим против вектора скорости поступательного потока. Тогда на комплексной плоскости $z = x + iy$ нагнетательная и эксплуатационная скважины имеют координаты: $z_i = 0$, $z_c = x_c + iy_c$. В результате работы нагнетательной скважины мощности q_i в области фильтрации D образуется очаг загрязнения. Он представляет собой область G , ограниченную нейтральной линией тока [1], проходящей через критическую точку течения z_i^* , обусловленную работой нагнетательной скважины (область G содержит точку z_i). Полагаем, что загрязнённая жидкость имеет те же физические свойства, что и чистая (принята простейшая модель — модель разноцветных жидкостей). При эксплуатации в подобных слоях грунта водозабора важно чтобы в него не попадало загрязнение.

Следуя [2], поставим задачу об определении условий работы водозабора без загрязнения. Полагая $q_c = 0$, и исключая из области D очаг загрязнения G , имеем область $D \setminus G$, находясь в которой, водозабор может работать без загрязнения. Для расположенного в найденной области водозабора ищем такое значение дебита q_c^* , при котором загрязнение в водозабор не попадает. Если $q_c > q_c^*$, то загрязнение частично, а возможно и полностью (см. [3]), попадает в водозабор и подобно осуществлённому в работах [3, 2], можно оценить степень загрязнения вод в водозаборе.

2. Следуя [1], рассматриваемое фильтрационное течение в безграничной области D опишем комплексным потенциалом $W = \varphi + i\psi$ (φ и ψ — потенциал и функция тока) вида

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

$$W(z) = -uz - \frac{q_c}{2\pi} \ln(z - z_c) + \frac{q_i}{2\pi} \ln z, \quad z \in D. \quad (1)$$

Укажем такие значения z_c , q_c , при которых загрязнённая жидкость не попадает в водозабор. Очевидно, что $z_c \in (D \setminus G)$ и $q_c \leq q_c^*$. Для поиска q_c^* , следуя [4], проведём численный эксперимент в ходе которого исследуется область захвата водозабора. Указанная область содержит точку z_c и ограничена линией тока, проходящей через критическую точку течения, обусловленную работой водозабора z_c^* .

В критических точках течения скорость фильтрации равна нулю. Следуя [5], поиск этих точек осуществим в ходе решения уравнения:

$$\frac{dW}{dz} = 0, \quad (2)$$

где dW/dz — комплексно сопряжённая скорость [1].

Для выяснения формы очага загрязнения G и построения области захвата водозабора необходимо через критические точки течения (z_i^* , z_c^*) провести линии тока. Выделяя из (1) мнимую часть, имеем уравнение линии тока, проходящей через точку $z' = x' + iy'$ ($z' \in D$):

$$-uy - \frac{q_c}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_c}{x - x_c} + \frac{q_i}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -uy' - \frac{q_c}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y' - y_c}{x' - x_c} + \frac{q_i}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}. \quad (3)$$

Выбирая для линии тока (3) $z' = z_i^*$, имеем линию, ограничивающую очаг загрязнения G . Полагая в (3) $z' = z_c^*$, имеем область захвата водозабора.

3. Считая в (1) $q_c = 0$, определим область $D \setminus G$, находясь в которой, водозабор может работать без загрязнения. Имея комплексный потенциал W , запишем решение уравнения (2):

$$z_i^* = q_i/(2\pi u). \quad (4)$$

Учитывая (4), полагая в (3) $z' = z_i^*$, на рис. 1 построена линия тока, ограничивающая очаг загрязнения G . Для представления графического материала выбраны следующие характерные единицы измерения: единица измерения скорости — скорость поступательного потока ($u = 1$), единица измерения длины — расстояние между точками забоя водозабора и источника загрязнения ($|z_c - z_i| \equiv l = |z_c| = 1$).

Для водозабора, расположенного в области $D \setminus G$, в ходе проведения численного эксперимента и исследования области захвата водозабора, определён максимально возможный дебит q_c^* . В качестве примера для конкретного расположения водозабора на рис. 2 представлена картина

течения и найденное значение q_c^* .

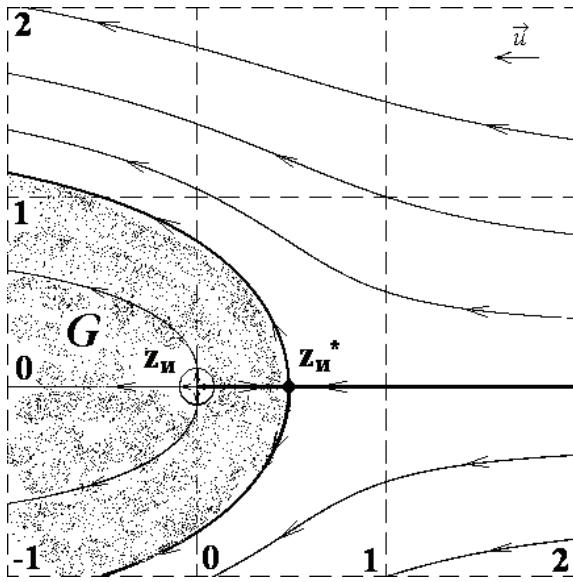


Рис. 1. Очаг загрязнения G
при $q_i = 0,98\pi$

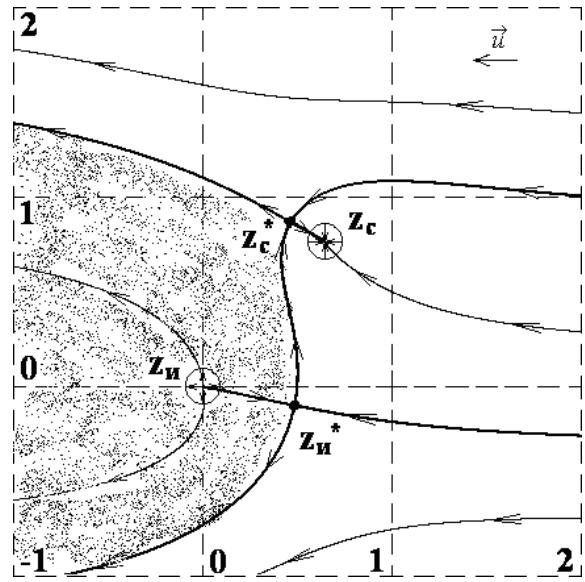


Рис. 2. Течение при $q_i = 0,98\pi$,
 $|z_c| = 1$; $\arg(z_c) = 50^\circ$; $q_c^* = 0,3534\pi$

Исследуем влияние расположения водозабора на его максимально возможный (предельно допустимый или критический) дебит, при котором загрязнение не попадает в водозабор. Очевидно, что чем дальше водозабор находится от источника загрязнения, тем больше значение q_c^* (здесь следует выбирать за единицу измерения длины величину, отличную от $|z_c - z_i|$). Зависимость q_c^* от $\arg(z_c)$ сложнее. Её особенности можно выявить в ходе проведения исследований на основе численного эксперимента, алгоритм которого описан в [4]. В силу симметрии задачи, считаем, что $\arg(z_c) \in [0, \arg_{\max}(z_c)]$, $\arg_{\max}(z_c) < \pi$, где $\arg_{\max}(z_c)$ — максимальное значение $\arg(z_c)$ при котором водозабор может работать без загрязнения. Значение $\arg_{\max}(z_c)$ может быть определено в ходе исследования области G . Для этого, в выбранных характерных единицах (единица измерения длины является расстояние $l = |z_c - z_i|$), находим точку пересечения границы очага загрязнения с окружностью единичного радиуса. Эта точка имеет полярный угол, равный $\arg_{\max}(z_c)$. Полагая в (3) $q_c = 0$, $|z| = 1$, $z' = z_i^*$, где z_i^* определяется по формуле (4), имеем уравнение для поиска $\arg_{\max}(z_c) = \zeta$:

$$\sin \zeta = \zeta \cdot q_i / (2\pi l). \quad (5)$$

Заметим, что в силу исследований, проведённых в [5], множитель при ζ в уравнении (5) не превышает 1. Анализируемое уравнение является трансцендентным и решается численными методами. В качестве отрезка локализации корня уравнения (5) можно выбрать отрезок от 0 до π . Для

поиска нетривиального корня ($\zeta \neq 0$) применим к (5) алгоритм метода половинного деления или итерационного метода Ньютона, программный код которого приведён в [6]. Таким образом находится точка пересечения зависимости q_c^* от $\arg(z_c)$ с осью абсцисс. Если $\arg(z_c) = 0$, то согласно [3],

$$q_c^* = (\sqrt{2\pi u l} - \sqrt{q_i})^2. \quad (6)$$

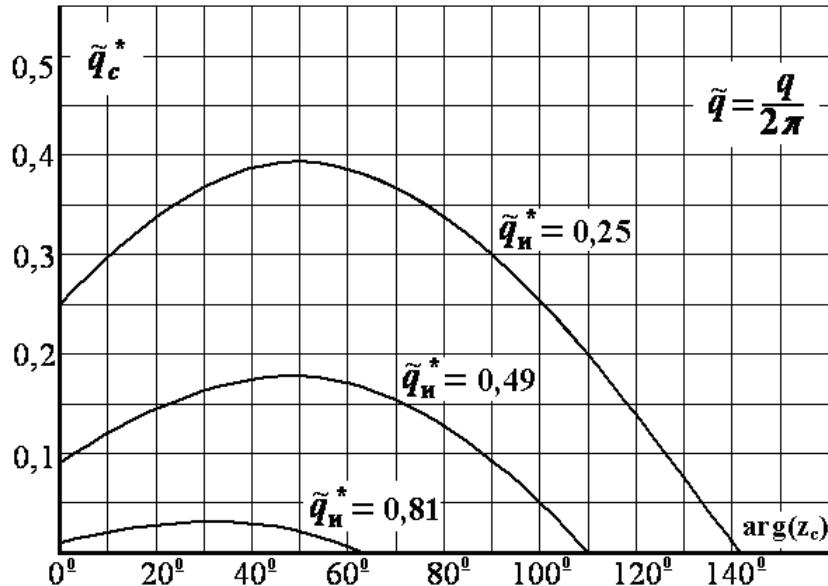


Рис. 3. Влияние положения водозабора на критический дебит

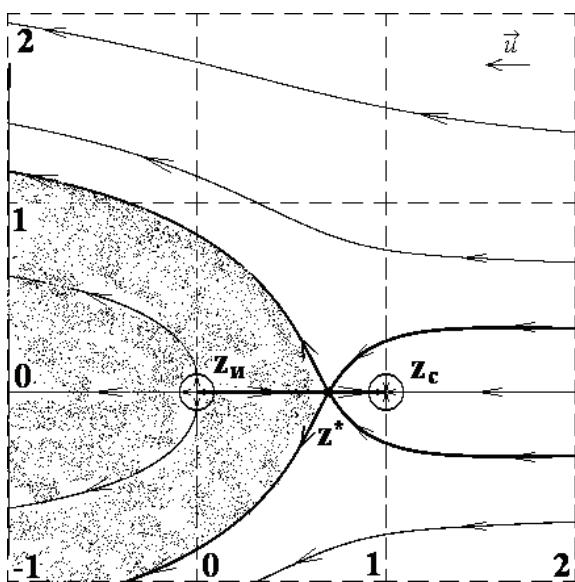


Рис. 4. Течение при $q_i = 0,98\pi$, $|z_c| = 1$; $\arg(z_c) = 0^0$; $q_c^* = 0,18\pi$

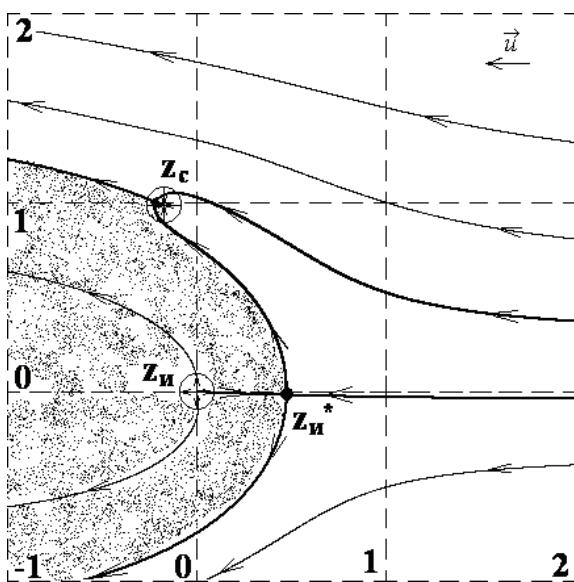


Рис. 5. Течение при $q_i = 0,98\pi$, $|z_c| = 1$; $\arg(z_c) = 100^0$; $q_c^* = 0,101\pi$

Материал проведённых в ходе численного эксперимента исследований влияния $\arg(z_c)$ на q_c^* представлен рис. 3. Видно, что зависимость $q_c^* = q_c^*(\arg(z_c))$ имеет экстремум. С увеличением $\arg(z_c)$ от 0, имеем рост

дебита q_c^* , а затем уменьшение его до нуля. В ходе численного эксперимента получены значения, подтверждаемые решением уравнения (5) и формулой (6), что свидетельствует о корректности проведения численного эксперимента по определению q_c^* . На рис. 4 представлена картина течения в случае, если $\arg(z_c) = 0$. Рис. 5 демонстрирует течения в случае близости $\arg(z_c)$ к значению $\arg_{\max}(z_c)$. Здесь, так как водозабор расположен непосредственно у очагу загрязнения, его критический дебит q_c^* достаточно мал и как следствие этого, критическая точка z_c^* достаточно близко расположена к точке z_c .

4. Рассмотренные задачи имеют место и могут представлять интерес при эксплуатации водозабора в слоях грунта, содержащих источники загрязнения. Особую актуальность подобные задачи приобретают при чрезвычайных происшествиях и экологических катастрофах, ибо в этих ситуациях возникает необходимость оперативного мониторинга на водозаборе. Кроме того, решение рассмотренной задачи представляет интерес в плане возможности с помощью конформных преобразований решать подобные задачи в слоях грунта с различной сетью главных направлений анизотропии [1].

Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. – М.: Высш. шк., 1983. – 160 с.
2. Квасов А.А. Математическое моделирование работы водозабора в кусочно-неоднородных слоях с очагом загрязнения // Труды XII международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков-Херсон. 2005. С. 161 – 164.
3. Квасов А.А. Исследование работы водозабора в слое грунта, содержащем источник загрязнения // Труды XIV международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков-Херсон. 2009. С. 325 – 328.
4. Квасов А.А., Пивень В.Ф. О работе водозабора без загрязнения // VIII Четаевская международная конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением". Тезисы докладов. Казань: Изд-во Казанского гос. текст. ун-та, 2002. С. 263.
5. Квасов А.А. Плоскопараллельная задача о работе водозабора в поступательном потоке с источником загрязнения // Труды международных школ-семинаров "МДОЗМФ". Выпуск 5. – Орёл. 2007. С. 58 – 61.
6. Квасов А.А. Численные методы решения алгебраических уравнений и систем. Учебно-методическое пособие для студентов – Орёл: ГОУ ВПО «Орловский государственный университет». 2009. – 59 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО РАСЧЕТУ
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ТЕРМОЭЛЕМЕНТА С ОДНОЙ
ПАССИВНОЙ ВЕТВЬЮ

О.И. Марков

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Проведено численное моделирование низкотемпературного термоэлемента в режиме максимального перепада температуры. Выявлены возможности термоэлектрического охлаждения с использованием в качестве активной n-ветви сплава висмут-сурьма и пассивной железной p - ветви.

Возникшая потребность в низкотемпературных охлаждаемых приемниках излучения, особенностью которых является сильная зависимость их чувствительности от уровня охлаждения, связана с развитием наземной и внеатмосферной астрономии, использованием космических аппаратов для зондирования в ИК-диапазоне поверхности Земли, Луны и Марса. В этих случаях преимущества термоэлектрических охладителей (компактность, автономность и способность работать длительное время без обслуживания) наиболее ощущимы.

Хорошо известно [1], что самой высокой термоэлектрической эффективностью обладают сплавы висмут-сурьма n-типа. Поскольку не существует достойной по уровню эффективности низкотемпературной ветви p – типа сплава висмут-сурьма, можно использовать в качестве второй термоэлектрически пассивную ветвь. Простейшим вариантом ветви является металл. Малые значения дифференциальной термоэдс и высокая теплопроводность металла дают низкие значения термоэлектрической добротности. Положительным качеством пассивной ветви может быть ее воздействие на повышение добротности активной ветви. Известно, что термоэлектрические свойства сплавов висмут-сурьма сильно зависят от индукции магнитного поля [2], поэтому для повышения эффективности преобразования рационально поместить активную ветвь в магнитное поле. Если пассивную ветвь выполнить из железа, то ее можно использовать в качестве магнитопровода или концентратора магнитного поля. Низкоуглеродистая электротехническая сталь (другое название "армкожелезо") обладает высокими значениями магнитной проницаемости и индукции насыщения, что вполне подходит в данном случае. В данной работе нами проведено численное моделирование термоэлемента в режиме максимального перепада температуры, позволяющее выявить возможности низкотемпературного термоэлектрического охлаждения с использованием монокристаллов твердых растворов $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ в качестве n-ветви и железа в пассивной ветви.

Для более точного решения задачи воспользуемся математическим моделированием тепловых процессов в ветвях термоэлемента, основанном на решении граничной задачи для стационарной теплопроводности для

ветвей термоэлемента [3]. Температурное поле одномерной адиабатически изолированной ветви термоэлемента с учетом эффектов Джоуля и Томсона в установившемся режиме описывается стационарным уравнением теплопроводности

$$\frac{d}{d\xi} \left(\chi_n(T) \frac{dT}{d\xi} \right) + Y_n^2 \rho_n - Y_n T \frac{d\alpha_n(T)}{dT} \frac{dT}{d\xi} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\chi_n(T) \frac{dT}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = [\alpha_p(T_0) + \alpha_n(T_0)] Y_n T_0 k, \quad T \Big|_{\xi=l_n} = T_{\text{гор}} \quad (2)$$

где $\rho_n(T), \chi_n(T)$ - удельное сопротивление и теплопроводность n- ветви как функции температуры, $\alpha_n(T_0), \alpha_p(T_0)$ - термоэдс n- и p- ветви при $T = T_0$, $\xi = x/l_n$ - безразмерная переменная, изменяющаяся в пределах $0 \div 1$, T_0 и $T_{\text{гор}}$ - температура холодного и горячего конца ветви соответственно, $Y_n = Jl_n/S_n$ - параметр, который может быть условно назван как «удельный» ток n-ветви, J – тока в термоэлементе, l_n - длина ветви n-типа, S_n - сечение ветви n-типа, k -коэффициент распределения [4], определяющий долю теплоты Пельтье, выделяемой на холодном спае термопары и отводимой в n-ветвь. Контактное сопротивление термоэлемента в расчетах не учитывалось. Экспериментальные зависимости от температуры термоэдс, удельного сопротивления и теплопроводности для монокристаллов $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ в направлении тригональной оси аппроксимировались степенными многочленами. В расчете использовались экспериментальные данные для термоэлектрических параметров сплавов висмут-сурыма в интервале значений индукции магнитного поля от 0 до 0.7 Тл.

В пассивной ветви из железа можно пренебречь эффектом Томсона из-за его малости и тогда, граничную задачу можно представить в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left(\chi_p(T) \frac{dT}{d\xi} \right) + Y_p^2 \rho_p = 0 \quad (3)$$

$$\chi_p(T) \frac{dT}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = [\alpha_p(T_0) + \alpha_n(T_0)] Y_p T_0 (1 - k), \quad T \Big|_{\xi=l_p} = T_{\text{гор}} \quad (4)$$

где $\rho_p(T), \chi_p(T)$ - удельное сопротивление и теплопроводность p- ветви как функции температуры, $\xi = x/l_p$ - безразмерная переменная, T_0 и $T_{\text{гор}}$ - температура холодного и горячего конца ветви соответственно, $Y_p = Jl_p/S_p$

- «удельный» ток р-ветви, l_p - длина ветви р-типа, S_p - сечение ветви р-типа. Температурная зависимость удельного сопротивления, удельной теплопроводности и дифференциальной термоэдс армко-железа были аппроксимированы степенными многочленами. Зависимость кинетических коэффициентов от величины индукции магнитного поля не учитывалась.

Границная задача (1), (2), (3), (4) в силу ее нелинейности решалась численными методами. Термоэлемент рассчитывался в режиме максимального температурного перепада. Оптимизация максимального перепада температуры термоэлемента проводилась по величинам «удельного» тока Y_n и Y_p . Для сравнения результатов проведен расчет для термоэлемента с той же п-ветвью $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ и р-ветвью на основе соединения Bi_2Te_3 (коэффициент термоэлектрической добротности $Z = 0.5 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ при 80 К).

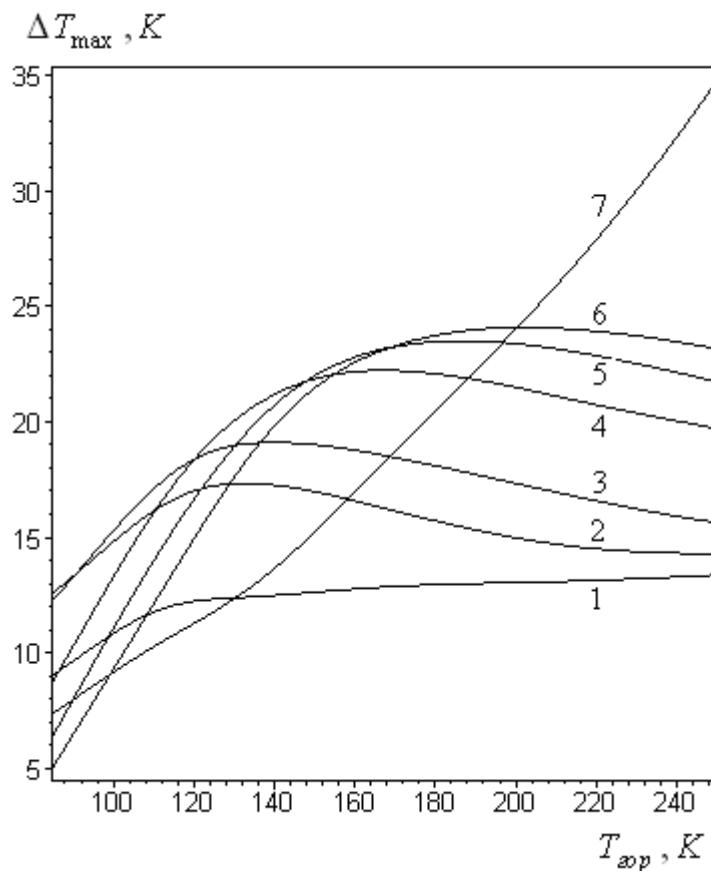


Рис.1. Зависимость максимального перепада температур в холодильнике от температуры горячего спая. Для термоэлемента с п-ветвью $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ и р-ветвью из железа для магнитных полей: кривая 1- 0 Тл, 2- 0.05 Тл, 3- 0.1 Тл, 4- 0.3 Тл, 5- 0.5 Тл, 6- 0.7 Тл. Для термоэлемента с п-ветвью $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ и р-ветвью на базе Bi_2Te_3 - кривая 7

На рис. 1. приведены расчетные кривые зависимости максимального перепада температуры от температуры горячего спая термоэлемента с п-ветвью $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ и пассивной ветвью из железа (кривые 1-6). Кривая 7

максимального перепада температуры термоэлемента с n-ветвью из сплава висмут – сурьма и p – ветвью на основе теллурида висмута. Как показали расчеты при температуре в интервале 80-120К эффективность термоэлемента с пассивной ветвью выше приближенно на 20% чем у термоэлемента с активной ветвью на основе соединения теллурида висмута. Этот неожиданный результат объясняется тем, что более низкое сопротивление металлической ветви по сравнению с ветвью на основе теллурида висмута позволяют увеличить величину оптимального тока термоэлемента и вместе с ним и величину поглощаемой теплоты Пельтье на холодном спае, в результате чего перепад температур увеличивается. Поэтому использование элементарной теории термоэлектрических преобразователей в данном случае может привести к ошибочным выводам. При 80-120К эффективность термоэлемента в магнитном поле повышается приблизительно на 65% по сравнению с термоэлементом с активной ветвью на основе соединения теллурида висмута. При этом максимальный перепад температуры в магнитном поле растет с ростом температуры, и максимум зависимости смещается в сторону более высоких температур. При более высоких температурах сплавы висмут-сурьма обладают низкой добротностью и используются более эффективные термоэлектрики.

Итак, впервые проведено численное моделирование работы низкотемпературного термоэлемента в режиме максимального температурного перепада с n-ветвью на основе сплава висмут-сурьма и железной p-ветвью. С учетом экспериментально полученных температурных зависимостей термоэдс, электро- и теплопроводности сплавов $Bi_{0.88}Sb_{0.12}$ в интервале температур 80-300 К и кинетических коэффициентов армко-железа решена граничная задача, которая позволила определить максимальное значение перепада температур в термоэлементе.

Литература

1. Smith G.E., Wolf R. Thermoelectric properties of bismuth-antimony alloys // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. No 3.Pp 841-846.
2. Wolf R., Smith G.E. Effects of magnetic field on the thermoelectric properties of bismuth-antimony alloys // Appl. Phys. Letters.1962. Vol. 1. No 1. Pp 5-7.
3. Марков О.И. Возможности термоэлектрического охлаждения с активной ветвью на основе сплава висмут-сурьма и пассивной металлической ветвью//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Физические явления в конденсированном состоянии вещества». Чита. 2009. С. 28-31.
4. Марков О.И. Введение новых информативных параметров с целью повышения контроля режимов работы термоэлектрических устройств // Ученые записки ОГУ. Орел. 2007. № 2. С. 27-29.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЖИДКОСТЕЙ НА ПРОЦЕСС КОНУСООБРАЗОВАНИЯ¹

Т.А. Никольская

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,
e-mail: NikolskyaTA@mail.ru

В работе исследовано влияние параметров фильтрующихся жидкостей и дебита скважины на процесс конусообразования. Задача решена в рамках модели Лейбензона-Маскета методом дискретных вихревых пар.

Область фильтрации содержит две жидкости с вязкостями μ_1 , μ_2 и плотностями ρ_1 , ρ_2 , соответственно. Эксплуатационная горизонтальная скважина начинает работать, граница раздела жидкостей деформируется и в зависимости от дебита скважины и параметров жидкостей может занять некоторое устойчивое положение. В этом случае месторождение может эксплуатироваться продолжительное время.

Задача поиска дебита, q^* при котором граница раздела жидкостей занимает устойчивое положение, называется задачей конусообразования. Это одна из сложнейших задач в теории фильтрации. Сложность её заключается в том, что помимо отыскания критического дебита требуется найти положение границы раздела жидкостей Γ_t в состоянии равновесия. В данной работе в положение равновесия граница Γ_t перемещается из начального положения, соответствующего выключенной скважине.

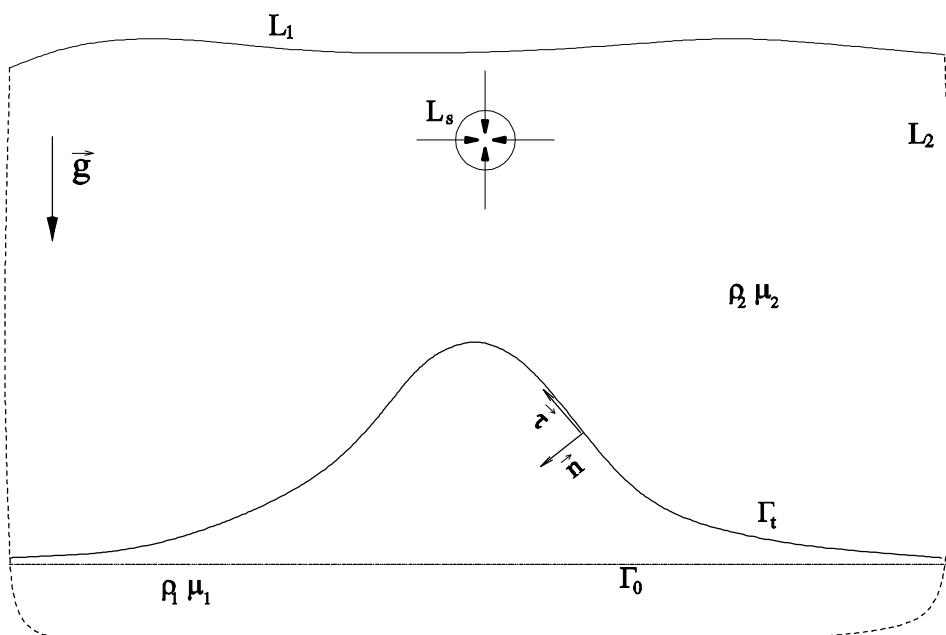


Рис. 1. Постановка задачи

Решение задачи о перемещении границы Γ_t сводится к решению

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

системы уравнений состоящей из интегрального уравнения второго рода типа Фредгольма и дифференциального уравнения [1]:

$$g(M, t) = -2\lambda_\mu \int_{\Gamma_t} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N = f(M, t), \quad M \in \Gamma_t, \quad (1)$$

$$\bar{dr}/dt = \nabla \varphi_0(M, t) + \int_{\Gamma_t} g(N, t) \partial_{l_N} V_2(M, N) dl_N, \quad M \in \Gamma_t \quad (2)$$

$$r_0 = \bar{r}(0, \zeta), \quad (3)$$

где ζ — параметр, $\Omega(M, N) = (\nabla \Phi_1(M, N), n_N)$, Φ_1 — потенциал нормированного стока, с полным расходом -1, $f(M, t) = 2\lambda_\mu \varphi_0(M, t) + 2\alpha e_g r_M$, $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_1 + \mu_2)$, $\alpha = (\rho_1 - \rho_2)/(\mu_1 + \mu_2)$, V_2 — скорость нормированного вихря с циркуляцией -1.

Влияние наличия в области фильтрации линии сброса L_1 или линии постоянного давления L_2 (Рис 1) учитывается посредством функции Грина.

Задачу решаем численно методом дискретных вихревых пар [2,3] для этого границу Γ_t в каждый момент времени t_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, заменим системой точек (x_m^j, y_m^j) , $m = \overline{0, n}$, с учетом условия (3). Выполним замену интегралов на сумму, а дифференциалов на их разностные аналоги, получим систему уравнений, имеющую вид:

$$\dots g_m^j - 2\lambda_\mu \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n g_m^j \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) \Delta l_k^j = f_m^j, \quad m = \overline{0, n}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$\Delta r_m^j / \Delta t^j = v_{0m}^j + \sum_{k=1}^n g_n^j (V_{2m, k-\frac{1}{2}} - V_{2m, k+\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

$$\bar{r}_m^0 = \bar{r}_0(\zeta_m) \quad (6)$$

$$\Delta \bar{r}_m^j = \bar{r}_m^{j+1} - \bar{r}_m^j, \quad \Delta t^j = t^{j+1} - t^j, \quad m = \overline{0, n}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

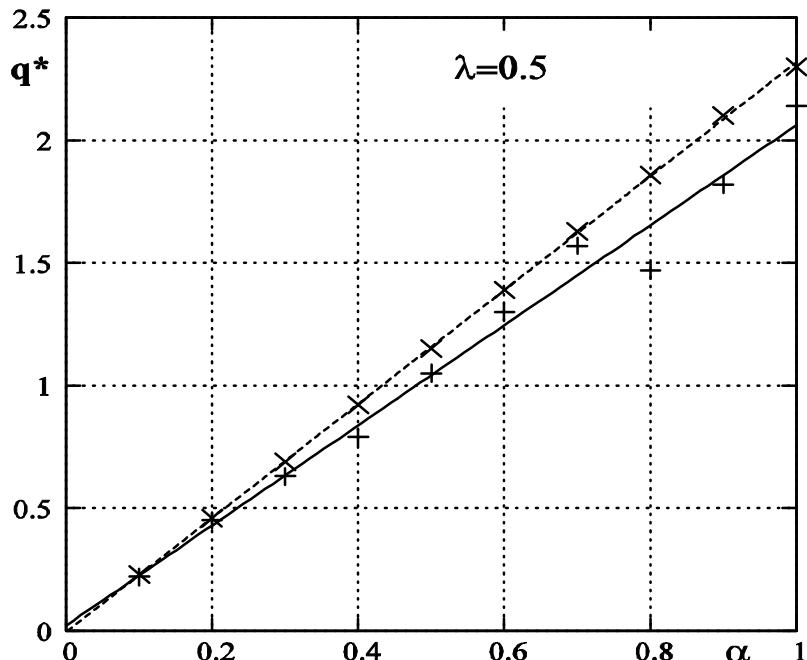


Рис. 2. Влияние плотностей жидкостей на дебит q^*

Влияние параметра α на критический дебит скважины в безграничном грунте (сплошная кривая) и в случае наличия в области фильтрации линии постоянного давления (пунктир) представлено на Рис.2.

Влияние параметра λ_μ на критический дебит q^* в безграничном грунте (сплошная кривая) и в случае наличия в области фильтрации линии постоянного давления (пунктир) представлено на Рис.3. Видим, что с ростом параметра λ_μ дебит q^* уменьшается

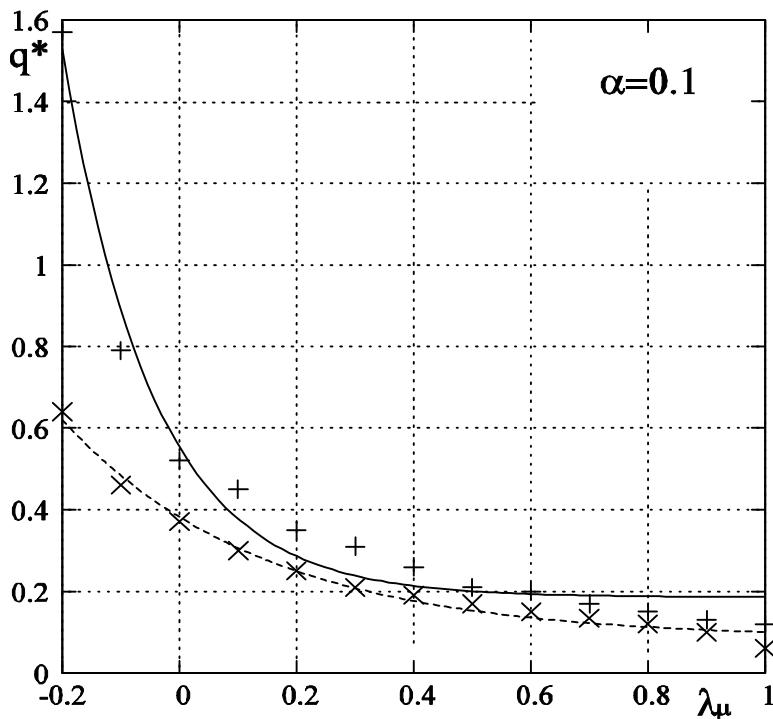


Рис. 3. Влияние вязкостей жидкостей на дебит q^*

Кривые на Рис.2, 3 построены методом наименьших квадратов и аппроксимирующие функции имеют вид $q^* = ae^{b\lambda_\mu} + c$, $q^* = a\alpha + f$. Крестиками на рисунках изображены экспериментальные точки. Вес всех экспериментальных точек одинаков и равен единице

Литература

1. Lifanov I.K., Nikolsky D.N., Piven' V.F. Mathematical modelling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface// Russian Journal Numerical Analysis and Mathematica Modelling. 2002.– Vol.17. No.4.– P.381-391
2. Никольский Д.Н. К вопросу построения дискретной схемы для плоской задачи эволюции границы раздела различных жидкостей// Вычислительные технологии, 2008.– Т. 13, N 4.– С. 89-94
3. Никольский Д.Н., Никольская Т.А. Математическое моделирование плоской задачи о конусообразовании методом дискретных вихревых пар. Известия ОрелГТУ,2008, N 4/272(550).– С. 17-22

УДК 532.546

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА**

В.С. Новиков

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,
e-mail: novikovvs@univ-orel.ru

Исследована возможность создания алгоритма решения интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода для применения на вычислительных машинах с многоядерной архитектурой центрального процессора.

Параллельное программирование позволяет более эффективно решать многие задачи, в частности задачи математического моделирования. Если задача обладает логическим параллелизмом, то есть может быть разделена на независимые подзадачи, которые вследствие своей независимости могут решаться параллельно, это позволяет существенно сократить время вычислений.

Существует ряд хорошо известных технологий параллельного программирования, например MPI, OpenMP, подробнее в [2]. Первая рассчитана на системы с распределенной памятью, вторая – с общей памятью. Методы распараллеливания, выбираемые для решения задач, делятся на распараллеливание по процессам и распараллеливание по процессам и данным. В первом случае каждый процесс работает со своей копией данных, во втором случае каждый процесс будет работать со своей частью данных задачи. Метод распараллеливания по данным также пригоден для случаев большого объема данных задачи, который не помещается в памяти вычислительной системы.

Для параллельных алгоритмов важным фактором являются операции обмена данными между процессами. Если алгоритм выбран неудачно, с большим количеством обменов, то время, затрачиваемое на пересылку, может оказаться больше выигрыша времени за счет параллельного выполнения решения задачи.

Можно считать, что технология распараллеливания с общей памятью избавлена от необходимости пересылки данных, так как все процессы работают с общими переменными. Но для реализации такого подхода необходимы вычислительные системы с общей памятью.

В настоящее время процессоры достигли пика производительности и в современных компьютерах для увеличения производительности устанавливают несколько вычислительных элементов. Например, компьютеры с многоядерными процессорами. Можно сказать, что они являются типичным примером вычислительной системы с общей памятью.

Для реализации параллельного алгоритма в таких системах можно использовать низкоуровневые потоки операционной системы или OpenMP. Эти варианты не являются взаимоисключающими. Однако использование потоков обеспечивает наибольшую гибкость, но требует очень много времени для написания, отладки и программного кода поддержки кода.

Для разработки параллельного алгоритма решения уравнения Фредгольма второго рода выберем использование потоков, так как именно этот механизм обеспечивает полный контроль над вычислительными ресурсами [3,5].

Численно решим следующее интегральное уравнение:

$$g(M) - 2\lambda \int_L g(N) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda \varphi_0 \text{ на } L, \quad (1)$$

где g - плотность потенциала двойного слоя, $\lambda \in (-1,1)$ - параметр, φ_0 - потенциал невозмущенного течения, l - длина дуги. Для определенности полагаем, что ядро имеет вид: $\Omega = (\nabla \Phi_1, \vec{n}_N) = \frac{\vec{r}_{NM} \cdot \vec{n}_N}{2\pi r_{NM}^2}$, где $r_{NM} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$ и функция φ из правой части $\varphi_{0M} = ux_M$.

Следуя методу дискретных особенностей [1], заменим в (1) интеграл на сумму. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно g_m :

$$g_m - 2\lambda \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} g_k \Omega_{mk} \Delta l_k = 2\lambda \varphi_{0m}, \quad m=0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

Рассмотрим решение системы уравнений (2) для окружности. Для решения этой системы будем применять метод LU разложения [4].

Выделим следующие этапы решения задачи и покажем способы распараллеливания вычислений на этих этапах:

1. Заполнение матриц коэффициентов и свободных членов.

На данном этапе заполняем матрицу коэффициентов $A[m,k]$, и свободных членов $B[m,k]$, где $m=1,2,\dots,n-1$, $k=1,2,\dots,n-1$. Из уравнения (2) получаем: $A[m,k] = -2\lambda \frac{(x_m - x_k)\Delta x_k - (y_m - y_k)\Delta y_k}{2\pi((x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2)}$, при $m \neq k$ и $A[m,k] = 1$, при $m = k$. Заполнение организуется параллельно путем работы каждого процессора со своим набором строк. При наличии p процессоров, каждый i -й будет работать со строками $j_k = i + pk$, $k=0, 1, \dots$

2. Решение системы линейных уравнений.

Для решения системы уравнений применим метод LU разложения. В указанном методе можно выделить следующие этапы:

– Инициализация матрицы LU, значениями матрицы A. Особенность данного метода заключается в том, что обе треугольные матрицы L и U можно хранить в одной квадратной. Распараллеливание данного этапа также выполняем путем назначения каждому процессу своего набора строк. По окончании этапа предусматриваем барьерную синхронизацию.

– Построение матрицы LU. Этот этап распараллеливается следующим образом. Каждый процесс должен выполнить в цикле количество итераций на единицу меньшее количества строк матрицы. Тело цикла имеет две фазы: выбор ведущего элемента, сокращение строк под строкой с ведущим

элементом. Выбор ведущего элемента происходит путем выбора каждым процессом локального ведущего элемента среди своего диапазона строк и помещение информации о выборе в специальный общий для всех процессов массив. После, следует барьерная синхронизация. Затем каждый из процессов устанавливает действительный ведущий элемент на основе содержимого массива и номер содержащей его строки. После этого, строка с ведущим элементом меняется местами со строкой соответствующей номеру итерации. Реальной перестановки строк не происходит, меняются местами индексы в локальной копии индексов строк каждого процесса. И, наконец, каждый процесс выполняет сокращение своего набора строк и снова происходит барьерная синхронизация и начинается следующая итерация.

– Прямой и обратный проходы. Во время выполнения проходов каждая из итераций зависит от предыдущей. Такие алгоритмы не поддаются распараллеливанию, так как переменные нужно вычислять поштучно. Однако, если развернуть внутренние циклы, можно разделить работу по вычислению сумм слагаемых уравнений для уже известных переменных. Таким образом, циклы прямого и обратного проходов содержат две фазы. На первой фазе вычисляем очередное значение переменной, выполняем барьерную синхронизацию, затем каждый процесс для своего диапазона строк вычисляет слагаемые, в которые входит данная переменная и прибавляет к суммам, накапливаемым в массиве сумм строк общем для всех процессов.

Для проведения численного эксперимента было выполнено несколько запусков программы для разного количества точек и количества одновременно работающих процессов. Запуск выполнялся на платформе Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU 3.00GHz, с объемом памяти 2Гб. Выполнялось измерение времени выполнения каждого этапа каждым процессом. В качестве итогового времени выполнения данного этапа задачи выбиралось наибольшее из времени работы отдельных процессов. Результаты численного эксперимента приведены в следующих таблицах.

Табл. 1. Зависимость времени выполнения каждой фазы задачи от количества процессов при n=1000

Число процессов	1	2	4
Заполнение	0.03	0.02	0.01
Прямой ход	2.01	1.91	0.93
Обратный ход	0.01	0.07	0.12

Табл. 2. Зависимость времени выполнения каждой фазы задачи от количества процессов при n=2000

Число процессов	1	2	4
Заполнение	0.11	0.07	0.03
Прямой ход	16.41	10.24	5.24
Обратный ход	0.04	0.16	0.24

Табл. 3. Зависимость времени выполнения каждой фазы задачи от количества процессов при n=4000

Число процессов	1	2	4
Заполнение	0.46	0.25	0.13
Прямой ход	131.76	68.88	51.74
Обратный ход	0.17	0.40	0.59

Проведенный эксперимент показал, уменьшение времени выполнения задачи с увеличением количества одновременно работающих процессов. Однако, проанализировав время выполнения каждого отдельного этапа задачи, можно сделать следующие выводы. Для первых двух этапов видно снижение времени счета с увеличением числа процессов. Причем с увеличением количества точек снижение времени приближается к обратной зависимости от числа процессов. Этап "обратный ход" наоборот выполняется дольше с увеличением числа процессов. Однако с увеличением числа точек рост времени от числа процессов становится медленнее.

Указанные эффекты связаны с соотношением вычислительной нагрузки и накладных расходов, связанных с синхронизацией выполнения процессов операционной системой. С увеличением числа точек возрастает вычислительная нагрузка, с увеличением числа процессов растет время, затрачиваемое на работу с инструментом синхронизации. Так как для этапа обратного хода характерен также рост числа обращений к синхронизации с ростом числа точек, то имеем более сложную зависимость времени выполнения данного этапа. Это заставляет поставить вопрос о необходимости распараллеливания данного этапа.

В итоге можно однозначно утверждать, что распараллеливание данного алгоритма решения уравнения эффективно.

Литература

1. Никольский Д.Н. Параллельное моделирование двумерной задачи эволюции границы раздела жидкостей // Тр. международной конференции 9-14 октября 2006 г. Орел, Т.2.– Орел, 2006. С.39-46.
2. Федотов И.Е. Некоторые приемы параллельного программирования // Учебное пособие., М.: Изд-во МГИРЭА, 2008
3. Мэтью Жилеспи. Выбор API и инструментов для распараллеливания приложений // Сборник "Прямая связь с инженерами Intel", 2009. Электронный ресурс, доступ: <http://software.intel.com/ru-ru/articles/selecting-apis-and-tools-to-simplify-your-approach-to-parallelism/>
4. Грегори Р. Эндрюс Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. Пер. с англ.– М:Вильямс, 2003.– 512 с.
5. David R. Butenhof. Programming with POSIX(R) Threads.– Addison-Wesley, 1997.– 398 с.

**ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА
ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ¹**

В.Ф. Пивень

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Ставится и исследуется двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей различных физических свойств (вязкости, плотности) в анизотропно-неоднородном слое пористой среды. В случае анизотропного однородного слоя исследование этой задачи сведено к решению системы интегрального и дифференциального уравнений.

1. Двумерную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом тонком анизотропно-неоднородном слое пористой среды с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$ и толщиной H описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ , которые как функции координат точки (x, y) плоского основания слоя и времени t (t – параметр) удовлетворяют всюду в области D (за исключением особых точек течения) системе уравнений [1, 2]

$$K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Здесь $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$ (p – давление, μ и ρ – вязкость и плотность жидкости, Π – потенциал массовой силы), компоненты тензора проницаемости K_{ij} , $i, j = 1, 2$ слоя и его толщина H моделируются непрерывно дифференцируемым (хотя бы один раз) функциями координат x, y .

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах [3]. Первое и второе уравнения определяют v_x и v_y составляющие вектора скорости фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

Система уравнений (1.1) относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости K удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0, \quad D_s = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2} \right)^2 > 0, \quad (1.2)$$

где $D_s \equiv \left| \frac{K_{ij} + K_{ji}}{2} \right|$ – определитель симметричной части $\frac{K_{ij} + K_{ji}}{2}$ тензора $K = (K_{ij})$.

Поставленную в [3] трёхмерную задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t сформулируем в двумерном случае течения в анизотропном неоднородном слое, используя комплексную плоскость $z = x + iy$, которую называем физической плоскостью. Течение жидкостей вязкости μ_1 и μ_2 ,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

плотности ρ_1 и ρ_2 , занимающих в плоскости z области D_1 и D_2 , описываем во всей области $D = D_1 \cup D_2$ обобщённым потенциалом $\varphi(z, t)$ и функцией тока $\psi(z, t)$, которые удовлетворяют системе уравнений (1.1). Полагая, что на границе раздела жидкостей Γ_t капиллярные силы пренебрежимо малы, имеем на ней, как и в случае изотропной среды, условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения). Поэтому, следуя [4], эти условия запишем

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi^+(z, t) - \mu_2 \varphi^-(z, t) &= (\rho_2 - \rho_1) \Pi(z, t), \\ \psi^+(z, t) &= \psi^-(z, t), \quad z \in \Gamma_t. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и далее «+» («-») обозначают предельные значения функций при подходе к границе Γ_t со стороны (противоположной стороны) орта \vec{n} нормали к Γ_t (орт \vec{n} направлен внутрь области D_1). Границу Γ_t моделируем простой (без самопересечений) кривой. Видно, что на этой границе обобщённый потенциал терпит разрыв, а функция тока непрерывна.

Если область $D = D_1 \cup D_2$ имеет сингулярную границу $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, то есть на ней проницаемость слоя $K = (K_{ij})$ обращается в бесконечность, а его толщина H конечна (на части σ_{01}) и проницаемость $K = (K_{ij})$ или толщина H равна нулю (на части σ_{02}), то выполняются условия (орт \vec{n} нормали к σ_0 направлен в область D):

$$\varphi^+(z, t) = 0, \quad z \in \sigma_{01}; \quad \psi^+(z, t) = 0, \quad z \in \sigma_{02}. \quad (1.4)$$

Если область D имеет бесконечно удалённую точку $z = \infty$, а обобщённый потенциал $\varphi(z, t)$ (а значит и сопряжённая ему согласно уравнений (1.1) функция тока $\psi(z, t)$) не содержит особых точек при $z = \infty$, то имеем условия регулярности $\varphi(z, t)$:

$$\varphi(z, t) = O(|z|^{-1}), \quad H(z)|K(z) \cdot \nabla \varphi(z, t)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Положение границы Γ_t в плоскости z в любой момент времени $t > 0$ описываем параметрическими уравнениями (s – параметр):

$$z = z(t, s) \quad (x = x(t, s), \quad y = y(t, s)), \quad z \in \Gamma_t. \quad (1.6)$$

Полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ её положение известно ($\Gamma_t = \Gamma_0$):

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s), \quad y_0 = y(0, s)), \quad z_0 \in \Gamma_0. \quad (1.7)$$

Так как физическая скорость $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ и скорость фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$ взаимосвязаны равенством $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \left(\frac{dx}{dt} = v_x, \frac{dy}{dt} = v_y \right)$, то следуя [4], имеем в плоскости z дифференциальные уравнения границы Γ_t :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\psi^+(z, t) + \psi^-(z, t)}{2}, \quad z \in \Gamma_t. \quad (1.8)$$

Здесь $v^\pm(z, t)$ предельные значения комплексной скорости $v(z, t) = v_x(x, y, t) + i v_y(x, y, t)$.

Скорость $v(z, t)$ согласно уравнений (1.1) (напоминаем, первое и второе из них определяют компоненты скорости v_x и v_y) запишем

$$v(z, t) = \alpha(z) \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} + \beta(z) \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial \bar{z}} = -\frac{i2}{H(z)} \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial \bar{z}}. \quad (1.9)$$

Здесь

$$\alpha(z) = K_{11} - K_{22} + i(K_{12} + K_{21}), \quad \beta(z) = K_{11} + K_{22} - i(K_{12} - K_{21}),$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача эволюции границы Γ_t ставится в плоскости z следующим образом. Задано положение границы Γ_t в момент времени $t = 0$, потенциал массовой силы $\Pi(z, t)$, вязкости μ_1, μ_2 и плотности ρ_1, ρ_2 жидкостей, проницаемость $K = (K_{ij})$ и толщина H слоя. Найти положение границы Γ_t при $t > 0$. Решение этой задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1.1), (1.8) при условиях (1.3)-(1.5) и (1.7).

2. Для решения поставленной задачи эволюции границы Γ_t наряду с физической плоскостью z используем вспомогательную комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, что позволяет упростить систему уравнений (1.1). На плоскости ζ течение происходит в области D' ($D' = D'_1 \cup D'_2$) и характеризуется обобщённым потенциалом $\varphi(\zeta, t)$ и функцией тока $\psi(z, t)$. Область D' связана с областью D гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием (J – якобиан преобразования)

$$\zeta = \zeta(z) \left(J = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right), \quad (2.1)$$

которые удовлетворяют уравнению Бельтрами [2]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D_s}} \right), \quad z \in D. \quad (2.2)$$

Непрерывная в области D функция $\mu(z)$ удовлетворяет в силу условий (1.2) неравенству

$$|\mu(z)| \leq \mu_0 < 1 \quad (\mu_0 = \text{const}), \quad z \in D. \quad (2.3)$$

В этом случае согласно [5] существует основной гомеоморфизм $\zeta(z)$ уравнения (2.2) и его нахождение сводится к решению двумерного сингулярного интегрального уравнения.

Так как имеет место неравенство (2.3), то якобиан (2.1) строго положителен

$$J = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \left(1 - |\mu(z)|^2 \right) > 0, \quad z \in D.$$

Это означает, что определяемое гомеоморфизмом $\zeta(z)$ отображение сохраняет ориентацию (направление обхода кривой; взаимное расположение областей, сопрягающихся вдоль кривой) при переходе с плоскости z на плоскость ζ и обратно. Кроме того, если гомеоморфизм $\zeta(z)$ основной, то согласно [5] определяемое им преобразование оставляет бесконечно удалённую точку неподвижной (точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = \infty$ и обратно).

Введём в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W = \varphi + i \frac{\psi}{P} \quad (P = H(\sqrt{D_s} - i\sqrt{D_a})), \quad (2.4)$$

который как функция ζ и времени t удовлетворяет всюду в области D' (за исключением его особых точек) вытекающему из системы (1.1) с учётом (2.2) уравнению [2]

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(\zeta)(W - \bar{W}) = 0 \quad \left(A(\zeta) = \frac{\bar{P}}{P + \bar{P}} \frac{\partial \ln P}{\partial \bar{\zeta}}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right). \quad (2.5)$$

Здесь $\bar{P} = H(\sqrt{D_s} + i\sqrt{D_a})$, $D_a = [(K_{12} - K_{21})/2]^2$ – определитель антисимметричной части $(K_{ij} - K_{ji})/2$ тензора $K = (K_{ij})$.

$P = H(\sqrt{D_s} - i\sqrt{D_a})$ – проводимость анизотропного неоднородного слоя – комплекснозначная функция ζ (когда слой неоднороден) либо комплексная постоянная (если слой однородный, (K_{ij}) и H – постоянные).

Уравнение (2.5) – комплексное представление системы уравнений

$$\sqrt{D_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D_a} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad -\sqrt{D_a} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (2.6)$$

которая является канонической формой записи уравнений (1.1) в плоскости ζ и относится также к эллиптической системе уравнений, если $\sqrt{D_s} > 0$, $D_s + D_a = D > 0$ ($D = |K_{ij}|$ – определитель тензора $K = (K_{ij})$). При этом $\sqrt{D_a} = (K_{12} - K_{21})/2$ может принимать как положительные (при $K_{12} > K_{21}$), так и отрицательные (при $K_{12} < K_{21}$) значения.

Первое и второе уравнение системы (2.6) определяют v_ξ и v_η составляющие вектора скорости фильтрации $\vec{v} = (v_\xi, v_\eta)$ в плоскости ζ .

Полагая, что преобразование (2.1) – полный гомеоморфизм, запишем условия (1.3)-(1.5) в плоскости ζ (Γ'_t и $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$ – образы границ Γ_t и $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$):

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi^+(\zeta, t) - \mu_2 \varphi^-(\zeta, t) &= (\rho_2 - \rho_1) \Pi(\zeta, t), \\ \psi^+(\zeta, t) &= \psi^-(\zeta, t), \quad \zeta \in \Gamma'_t, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\varphi^+(\zeta, t) = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}; \quad \psi^+(\zeta, t) = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}, \quad (2.8)$$

$$\varphi(\zeta, t) = O(|\zeta|^{-1}), \quad |P(\zeta)| \|\nabla \varphi(\zeta, t)\| = O(|\zeta|^{-2}) \quad |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Условия (2.7)-(2.9) запишем для комплексного потенциала. Пусть

$$W_0(\zeta, t) = \varphi_0(\zeta, t) + i \frac{\psi_0(\zeta, t)}{P(\zeta)}, \quad (2.10)$$

— комплексный потенциал ($\varphi_0(\zeta, t)$ и $\psi_0(\zeta, t)$ — обобщённый потенциал и функция тока), описывающий на всей плоскости ζ течение жидкости вязкости $\mu=1$ и плотности $\rho=1$ в слое проводимости $P(\zeta)$ (граница Γ'_t отсутствует). Если слой ограничен сингулярной линией $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$, то полагаем, что на ней функции $\varphi_0(\zeta, t)$ и $\psi_0(\zeta, t)$ удовлетворяют условиям (2.8). Источники (стоки) течения моделируем изолированными особыми точками функций $\varphi_0(\zeta, t)$, $\psi_0(\zeta, t)$ (следовательно, комплексного потенциала $W_0(\zeta, t)$), которые располагаются произвольно в плоскости ζ и могут включать бесконечно удалённую точку этой плоскости.

Учтём источники (стоки) и представим комплексный потенциал (2.4) (функции $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$) в виде

$$\begin{aligned} W(\zeta, t) &= W_0(\zeta, t) + W_*(\zeta, t) \\ (\varphi(\zeta, t) &= \varphi_0(\zeta, t) + \varphi_*(\zeta, t), \quad \psi(\zeta, t) = \psi_0(\zeta, t) + \psi_*(\zeta, t)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь

$$W_*(\zeta, t) = \varphi_*(\zeta, t) + i \frac{\psi_*(\zeta, t)}{P(\zeta)}, \quad (2.12)$$

— комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta, t)$ и $\psi_*(\zeta, t)$ — обобщённый потенциал и функция тока) возмущений, возмущений, обусловленных различием физических свойств (вязкости, плотности) жидкостей.

Комплексные потенциалы $W_0(\zeta, t)$ $W_*(\zeta, t)$ и, следовательно, $W(\zeta, t)$ удовлетворяют уравнению (2.5) в области $D' = D'_1 \cup D'_2$.

Из комплексного потенциала (2.4) и комплексно сопряжённого ему равенства $\bar{W} = \varphi - i\psi/\bar{P}$ имеем

$$\varphi = \frac{\operatorname{Re}(PW)}{\operatorname{Re} P} = \frac{PW + \bar{P}\bar{W}}{P + \bar{P}}, \quad \psi = \frac{|P|^2 \operatorname{Im} W}{\operatorname{Re} P} = \frac{P\bar{P}(W - \bar{W})}{i(P + \bar{P})}. \quad (2.13)$$

Эти же формулы позволяют выразить φ_0 , ψ_0 и φ_* , ψ_* через комплексные потенциалы W_0 и W_* .

Тогда на основании формул (2.11)-(2.13) условия (2.7) запишем для комплексного потенциала $W_*(\zeta, t)$ (функций $\varphi_*(\zeta, t)$, $\psi_*(\zeta, t)$) возмущений

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{P(\zeta)\left[\mu_1 W_*^+(\zeta, t) - \mu_2 W_*^-(\zeta, t)\right]\right\} &= (\mu_2 - \mu_1) \operatorname{Re}[P(\zeta)W_0(\zeta, t)] + \\ &+ (\rho_2 - \rho_1)\Pi(\zeta, t)\operatorname{Re} P(\zeta), \\ \operatorname{Im}\left[W_*^+(\zeta, t) - W_*^-(\zeta, t)\right] &= 0, \quad \zeta \in \Gamma'_t \\ \begin{cases} \mu_1 \varphi_*^+(\zeta, t) - \mu_2 \varphi_*^-(\zeta, t) = (\mu_2 - \mu_1)\varphi_0(\zeta, t) + (\rho_2 - \rho_1)\Pi(\zeta, t), \\ \psi_*^+(\zeta, t) = \psi_*^-(\zeta, t), \quad \zeta \in \Gamma'_t \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Видно, что для возмущений обобщённый потенциал терпит разрыв, а функция тока непрерывна на Γ'_t .

Условия (2.8) принимают следующий вид

$$\frac{\operatorname{Re}[P^+(\zeta)W_*^+(\zeta,t)]}{\operatorname{Re} P^+(\zeta)}=0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}; \quad \frac{|P^+(\zeta)|^2 \operatorname{Im} W_*^+(\zeta,t)}{i \operatorname{Re} P^+(\zeta)}=0, \quad \zeta \in \sigma'_{02} \quad (2.15)$$

$$(\varphi_*^+(\zeta,t)=0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}; \quad \psi_*^+(\zeta,t)=0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}).$$

Если область D' имеет бесконечно удалённую точку, то комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta,t)$ не содержит там особых точек (заданные особые точки течения входят в комплексный потенциал $W_0(\zeta,t)$). Поэтому для $W_*(\zeta,t)$ (обобщённого потенциала $\varphi_*(\zeta,t)$) потребуем выполнение условий регулярности (аналогичных условиям (2.9))

$$\frac{\operatorname{Re}[P(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re} P(\zeta)}=O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \quad |P(z)|\nabla \frac{\operatorname{Re}[P(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re} P(\zeta)}=O\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right) \quad (2.16)$$

$$\left(\varphi_*(\zeta,t)=O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \quad |P(\zeta)|\nabla \varphi_*(\zeta,t)=O\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)\right) \text{ при } |\zeta| \rightarrow \infty.$$

Используя гомеоморфизм (2.1), уравнения границы Γ_t (1.6) и её первоначального положения (1.7) запишем в плоскости ζ в виде

$$\zeta=\zeta(t,s) \quad (\xi=\xi(t,s), \quad \eta=\eta(t,s)), \quad \zeta \in \Gamma'_t, \quad (2.17)$$

$$\zeta_0=\zeta(0,s) \quad (\xi_0=\xi(0,s), \quad \eta_0=\eta(0,s)), \quad \zeta_0 \in \Gamma'_0. \quad (2.18)$$

Запишем теперь дифференциальное уравнение (1.8) границы Γ_t в плоскости ζ . Учитывая гомеоморфизм (2.1), находим $\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{dz}{dt}+\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dt}$ или, принимая во внимание (1.8), имеем

$$\frac{d\zeta}{dt}=\nu'(z,t) \frac{\partial \zeta}{\partial z}+\bar{\nu}'(z,t) \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad \zeta=\zeta(z), \quad z \in \Gamma_t, \quad (2.19)$$

$$\text{где } \nu'(z,t)=\frac{\nu^+(z,t)+\nu^-(z,t)}{2}, \quad \bar{\nu}'(z,t)=\frac{\bar{\nu}^+(z,t)+\bar{\nu}^-(z,t)}{2}.$$

Согласно (1.9) комплексная скорость $v(z,t)=-\frac{i2}{H(z)} \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial \bar{z}}$ или, так как

$$H(\zeta)=H[\zeta(z)]=H(z), \quad \psi(\zeta,t)=\psi[\zeta(z),t]=\psi(z,t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}},$$

то

$$\nu'(z,t)=\nu'(\zeta,t) \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}-\bar{\nu}'(\zeta,t) \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad \zeta=\zeta(z), \quad z \in \Gamma_t, \quad (2.20)$$

$$\text{где } \nu'(\zeta,t)=\frac{\nu^+(\zeta,t)+\nu^-(\zeta,t)}{2}, \quad \bar{\nu}'(\zeta,t)=\frac{\bar{\nu}^+(\zeta,t)+\bar{\nu}^-(\zeta,t)}{2}.$$

Причём $v^\pm(\zeta, t)$ – предельные значения комплексной скорости $v(\zeta, t) = v_\xi(\zeta, \eta, t) + i v_\eta(\zeta, \eta, t)$, которую согласно уравнениям (2.6) запишем

$$v(\zeta, t) = 2[\sqrt{D_s(\zeta)} - i\sqrt{D_a(\zeta)}] \frac{\partial \varphi(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{i2}{H(\zeta)} \frac{\partial \psi(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}}. \quad (2.21)$$

Подставляя (2.20) в уравнение (2.19), имеем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left[v'(\zeta, t) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} - \bar{v}'(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \left[\bar{v}'(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - v'(\zeta, t) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \right] \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}$$

$$\zeta = \zeta(z), \quad z \in \Gamma_t$$

или

$$\frac{d\zeta}{dt} = J v'(\zeta, t), \quad \zeta = \zeta(z), \quad z \in \Gamma_t, \quad (2.22)$$

где $J = J(\zeta)$ – якобиан гомеоморфизма (2.1).

Так как якобиан обратного (гомеоморфного) преобразования $z = z(\zeta)$:

$$J_1 = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2, \quad J_1 = J_1(\zeta), \quad (2.23)$$

связан с якобианом J равенством $J J_1 = 1$, то уравнение (2.22) принимает вид

$$J_1(\zeta) \frac{d\zeta}{dt} = \frac{v^+(\zeta, t) + v^-(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t. \quad (2.24)$$

Это есть дифференциальное уравнение границы раздела жидкостей в плоскости ζ .

Представляя скорость $v(\zeta, t)$ согласно (2.11) в виде

$$v(\zeta, t) = v_0(\zeta, t) + v_*(\zeta, t),$$

где $v_0(\zeta, t)$ и $v_*(\zeta, t)$ выражаются через функции $\varphi_0(\zeta, t)$, $\psi_0(\zeta, t)$ и $\varphi_*(\zeta, t)$, $\psi_*(\zeta, t)$ по формуле (2.21). Тогда учитывая, что предельные значения $v_0^\pm(\zeta, t) \equiv v_0(\zeta, t)$, $\zeta \in \Gamma'_t$, уравнение (2.24) запишем

$$J_1(\zeta) \frac{d\zeta}{dt} = v_0(\zeta, t) + \frac{v_*^+(\zeta, t) + v_*^-(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t. \quad (2.25)$$

$$\text{Здесь } v_0(\zeta, t) = 2[\sqrt{D_s(\zeta)} - i\sqrt{D_a(\zeta)}] \frac{\partial \varphi_0(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{i2}{H(\zeta)} \frac{\partial \psi_0(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$v_*^\pm(\zeta, t) = 2[\sqrt{D_s(\zeta)} - i\sqrt{D_a(\zeta)}] \left[\frac{\partial \varphi_*(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}} \right]^\pm = -\frac{i2}{H(\zeta)} \left(\frac{\partial \psi_*(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}} \right)^\pm.$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сводится в плоскости ζ к нахождению комплексного потенциала возмущений $W_*(\zeta, t)$ (функций $\varphi_*(\zeta, t)$, $\psi_*(\zeta, t)$) и её уравнения движения (2.16). Чтобы решить эту задачу, необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.5), (2.24) при условиях (2.14)-(2.16) и (2.18). По найденному уравнению границы (2.17) в плоскости ζ определяем её положение при $t > 0$ в физической плоскости z , используя преобразование $z = z(\zeta)$, обратное

гомеоморфизму (2.1). Получаем уравнение границы Γ_t в плоскости z : $z = z[\zeta(t, s)] = z(t, s)$, $t > 0$.

3. Решение поставленной задачи эволюции границы Γ_t значительно упрощается в случае анизотропно-однородного слоя, когда компоненты тензора проницаемости K_{ij} , $i, j = 1, 2$ – постоянные и его толщина $H = 1$. В этом случае коэффициенты μ и P – комплексные постоянные и коэффициент $A(\zeta)$ уравнения (2.5) равен нулю. Вследствие этого уравнение (2.2) имеет гомеоморфизм (и обратный ему гомеоморфизм) [2]

$$\zeta = z + \mu \bar{z} \quad \left(z = \frac{\zeta - \mu \bar{\zeta}}{1 - |\mu|^2} \right), \quad (3.1)$$

а из (2.5) вытекает уравнение $\partial W / \partial \bar{\zeta} = 0$, означающее, что комплексный потенциал $W(\zeta, t)$ – аналитическая функция всюду в области D' плоскости ζ за исключением его особых точек.

Преобразование (3.1) аффинное. Оно характеризуется постоянным положительно-определенным якобианом $J = 1 - |\mu|^2 > 0$ и преобразует взаимно однозначно и непрерывно плоскости z и ζ , оставляя бесконечно удаленную точку неподвижной.

Пусть в каждый момент времени $t \geq 0$ граница раздела жидкостей моделируется в плоскости z гладкой кривой Γ_t ($\Gamma_t = \Gamma_0$ при $t = 0$). На плоскости ζ комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta, t)$ как аналитическую функцию в области D' представим интегралом типа Коши по гладкой кривой Γ'_t , являющейся согласно преобразованию (3.1), образом кривой Γ_t :

$$W_*(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{f(\tau, t) + ig(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau, \quad \zeta \notin \Gamma'_t, \quad (3.2)$$

где $f(t, \tau)$ и $g(t, \tau)$ – вещественные непрерывные на Γ'_t функции.

Следуя [6], находим что функция (3.2) удовлетворяет условию (2.16). Удовлетворим её условиям (2.14).

Пусть $f(t, \tau) + ig(t, \tau)$ – комплексная функция класса Гёльдера при $t > 0$. Продолжим непрерывно комплексный потенциал (3.2) на кривую Γ'_t и получим его предельные значения (аналогичные формулам Сохоцкого-Племеля):

$$W_*^\pm(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{f(\tau, t) + ig(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau \pm \frac{f(\zeta, t) + ig(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t, \quad (3.3)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Из формул (3.3) находим разность

$$W_*^+(\zeta, t) - W_*^-(\zeta, t) = f(\zeta, t) + ig(\zeta, t), \quad \zeta \in \Gamma'_t.$$

Отсюда, с учётом (2.13) выделив действительные и мнимые части, получим равенства

$$\varphi_*^+(\zeta, t) - \varphi_*^-(\zeta, t) = f(\zeta, t) + \sqrt{\frac{D_a}{D_s}} g(\zeta, t), \quad (3.4)$$

$$\psi_*^+(\zeta, t) - \psi_*^-(\zeta, t) = g(\zeta, t), \quad \zeta \in \Gamma'_t.$$

Очевидно, что предельные значения обобщённого потенциала $\varphi_*(\zeta, t)$ и функции тока $\psi_*(\zeta, t)$ возмущений на кривой Γ'_t терпят разрывы, которые определяются значениями функций $f(\zeta, t)$ и $g(\zeta, t)$ на этой кривой.

Воспользуемся представлениями (3.2), (3.3) комплексного потенциала $W_*(\zeta, t)$. Согласно условиям (2.14) функция тока $\psi_*(\zeta, t)$ непрерывна (непрерывен поток жидкости) на границе Γ'_t : $\psi_*^+(\zeta, t) = \psi_*^-(\zeta, t)$, $\zeta \in \Gamma'$. Поэтому из равенств (3.4) имеем $g(\zeta, t) = 0$, $\varphi_*^+(\zeta, t) - \varphi_*^-(\zeta, t) = f(\zeta, t)$, $\zeta \in \Gamma'$. Тогда согласно (3.2) и (3.3) комплексный потенциал $W_*(\zeta, t)$ и его предельные значения примут вид

$$W_*(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{f(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau, \quad \zeta \in D', \quad (3.5)$$

$$W_*^\pm(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{f(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau \pm \frac{f(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t. \quad (3.6)$$

Комплексный потенциал (3.5) удовлетворяет второму из условий (2.14). Удовлетворим его первому из этих условий. Подставим его предельные значения (3.6) в эти условия. Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[PW_*^\pm(\zeta, t)] &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'_t} f(\tau, t) \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{D_a} + i\sqrt{D_s}}{\tau - \zeta} d\tau \right] \pm \frac{\sqrt{D_s} f(\zeta, t)}{2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'_t} f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial \ell_\tau} \left[\sqrt{D_s} \arg(\tau - \zeta) - \sqrt{D_a} \ln|\tau - \zeta| \right] \pm \frac{\sqrt{D_s} f(\zeta, t)}{2}, \\ \operatorname{Re}[PW_0(\zeta, t)] &= \sqrt{D_s} \varphi_0(\zeta, t) \end{aligned}$$

для функции $f(\zeta, t)$ получаем интегральное уравнение

$$f(\zeta, t) - \frac{\lambda_\mu}{\pi} \int_{\Gamma'_t} f(\tau, t) \Omega(\tau, \zeta) d\ell_\tau = 2[\lambda_\mu \varphi_0(\zeta, t) + \alpha \Pi(\zeta, t)], \quad \zeta \in \Gamma'_t, \quad (3.7)$$

где

$$\Omega(t, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \ell_\tau} \left[\arg(\tau - \zeta) - \frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}} \ln|\tau - \zeta| \right], \quad \alpha = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{\rho_1 \lambda_\rho (1 - \lambda_\mu)}{\mu_1 (1 - \lambda_\rho)},$$

$$\lambda_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad \lambda_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (\lambda_\mu, \lambda_\rho \in (-1, 1)).$$

На основании формул (2.13) и (2.21) выразим для возмущений комплексную скорость $v_*(\zeta, t)$ через комплексный потенциал $W_*(\zeta, t)$, учитывая, что $W_*(\zeta, t)$ – аналитическая функция ($\partial W_*(\zeta, t)/\partial \bar{\zeta} = 0$). Имеем

$$v_*(\zeta, t) = \frac{D}{\sqrt{D_s}} \frac{\partial \bar{W}_*(\zeta, t)}{\partial \bar{\zeta}} \quad \text{или} \quad \bar{v}_*(\zeta, t) = \frac{D}{\sqrt{D_s}} \frac{\partial \bar{W}_*(\zeta, t)}{\partial \zeta}. \quad (3.8)$$

Найдём предельные значения скорости (3.8) на границе Γ'_t . Продифференцируем (3.5) по ζ :

$$\frac{\partial W_*(\zeta, t)}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\tau - \zeta} \right) d\tau = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} f(\tau, t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\tau - \zeta} \right) d\tau.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\frac{\partial W_*(\zeta, t)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \left. \frac{f(\tau, t)}{\tau - \zeta} \right|_{\tau \in \Gamma'_t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}, \quad \zeta \in D'$$

или учитывая, что контур Γ'_t замкнут (первое слагаемое равно нулю), имеем

$$\frac{\partial W_*(\zeta, t)}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}, \quad \zeta \in D'.$$

Полагая, что $\partial f(\tau, t)/\partial \tau$, $\tau \in \Gamma'_t$ – функция класса Гёльдера при $t > 0$, непрерывно продолжим последнее равенство на границу Γ'_t и получим предельные значения

$$\left(\frac{\partial W_*(\zeta, t)}{\partial \zeta} \right)^{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \pm \frac{\partial f(\zeta, t)}{\partial \zeta}, \quad \zeta \in \Gamma'_t,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Тогда предельные значения сопряжённой скорости возмущений (3.8) имеют вид

$$\bar{v}_*^{\pm}(\zeta, t) = \frac{D}{\sqrt{D_s}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \pm \frac{\partial f(\zeta, t)}{\partial \zeta} \right], \quad \zeta \in \Gamma'_t.$$

Учитывая последнее равенство и вытекающее из (2.23), (3.1) выражение якобиана $J_1 = (1 - |\mu|^2)^{-1}$, дифференциальное уравнение движения границы Γ'_t , сопряжённое уравнению (2.25), запишем

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = (1 - |\mu|^2) \left[\bar{v}_0(\zeta, t) + \frac{D}{\sqrt{D_s} 2\pi i} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right], \quad \zeta \in \Gamma'_t, \quad (3.9)$$

Это есть комплексное представление дифференциального уравнения границы Γ'_t . Учитывая $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, $\bar{v}_0(\zeta, t) = v_{0\xi}(\xi, \eta, t) - i v_{0\eta}(\xi, \eta, t)$,

$$\frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \tau} = \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \ell_\tau} e^{-i\alpha} \quad (\alpha - \text{угол между ортом касательной к } \Gamma'_t \text{ и осью } O\xi),$$

имеем из (3.9) два дифференциальных вещественных уравнения границы Γ'_t :

$$\frac{d\xi}{dt} =$$

$$= (1 - |\mu|^2) \left\{ v_{0\xi}(\xi, \eta, t) + \frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \ell_\tau} \left[\frac{\partial \arg(\tau - \zeta)}{\partial \ell_\tau} \cos \alpha - \frac{\partial \ln|\tau - \zeta|}{\partial \ell_\tau} \sin \alpha \right] d\ell_\tau \right\},$$

$$\frac{d\eta}{dt} =$$

$$= (1 - |\mu|^2) \left\{ v_{0\eta}(\xi, \eta, t) + \frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}} \int_{\Gamma'_t} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial \ell_\tau} \left[\frac{\partial \arg(\tau - \zeta)}{\partial \ell_\tau} \sin \alpha + \frac{\partial \ln|\tau - \zeta|}{\partial \ell_\tau} \cos \alpha \right] d\ell_\tau \right\},$$

$$\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma'_t \quad (3.10)$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей в случае анизотропно-однородного слоя пористой среды сводится к решению системы уравнений (3.7), (3.10) при начальных условиях (2.18). Эту систему уравнений можно решить численно на основе метода дискретных особенностей [7].

Литература

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. школа, 1983. 160 с.
2. Пивень В.Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физ.-мат. факультета ГОУ ВПО «ОГУ». Вып. 6. Орёл, 2007. С. 120-125.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007). Харьков; Херсон, 2007. С. 239-243.
4. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл.: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет», 2006. 508 с.
5. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 366 с.
7. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ИСТОЧНИКАМИ НА НЕПРОНИЦАЕМЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ГРАНИЦАХ¹

В.Ф. Пивень, О.В. Костин

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Исследуются фильтрационные течения с источниками (стоками) на непроницаемых границах канонического вида (прямая, окружность). Некоторые результаты в этом направлении получены в статье [1].

1. Стационарную плоскопараллельную фильтрацию несжимаемой жидкости в однородной недеформируемой пористой среде описываем потенциалом скорости φ и функцией тока ψ , которые как функции декартовых координат x, y всюду в области D (за исключением особых точек течения) удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Первое и второе уравнение определяют v_x и v_y составляющие вектора скорости фильтрации.

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах [2].

Течение описываем на комплексной плоскости $z = x + iy$ комплексным потенциалом $W = \varphi + i\psi$, который в силу уравнений (1.1) –аналитическая функция z в области D .

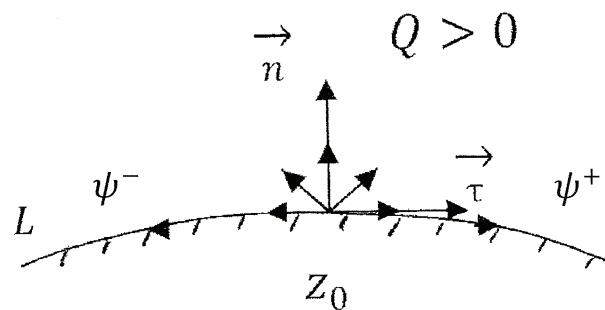


Рис. 1. Границные условия

Пусть на непроницаемой для жидкости границе области фильтрации, моделируемой гладкой кривой L , располагается в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ источник (или сток) мощности $Q > 0$ (или $Q < 0$) (рис. 1). Во всех точках кривой L (за исключением точки z_0) выполняется условие непротекания: нормальная составляющая скорости равна нулю

$$v_n^+(z) = 0 \quad (z \neq z_0), \quad z \in L, \quad (1.2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-97509).

где знак “+” означает предельное значение $v_n(z)$ при подходе к кривой L со стороны орта \bar{n} нормали к ней.

Условие (1.2) для функции тока $\psi(z)$ запишем в виде

$$\psi^+(z) = C^+, \quad \psi^-(z) = C^- \quad (z \neq z_0), \quad z \in L, \quad (1.3)$$

Здесь знаки “+” (“-”) означают предельные значения функции тока со стороны (противоположной стороны) орта τ касательной кривой L , C^+ и C^- - произвольные постоянные. Причём в силу закона сохранения объёма жидкости (уравнения неразрывности)

$$|\psi^+(z) - \psi^-(z)| = |C^+ - C^-| = |Q| \quad (z \neq z_0), \quad z \in L.$$

Рассмотрим случаи, когда кривые L канонического вида: прямая и окружность.

2. Пусть источник расположен в точке $z_0 = x_0$ прямой $x \in (-\infty, \infty), y = 0$. Течение в полуплоскости $y \geq 0$ описывает комплексный потенциал (потенциал скорости, функция тока)

$$W_Q = \frac{Q}{\pi} \ln(z - x_0) \quad (2.1)$$

$$(\varphi_Q = \frac{Q}{\pi} \ln R, \psi_Q = \frac{Q}{\pi} \vartheta),$$

где R, ϑ - полярные координаты точки z с полюсом в точке $z_0 = x_0$,

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y}{x - x_0} \quad (\vartheta \in [0, \pi]).$$

Линии тока ($\psi = const$) – лучи ($\vartheta = const$), исходящие при $Q > 0$ из точки $z_0 = x_0$, удовлетворяют согласно (1.3) условиям:

$$\psi^+(z) = Q, \quad \psi^-(z) = 0 \quad (z \neq x_0), \quad z \in L : x \in (-\infty, \infty), y = 0.$$

3. Пусть источник мощности Q расположен в точке $z_0 = a$ окружности радиуса a (рис. 2). Источнику мощности Q в силу уравнения неразрывности

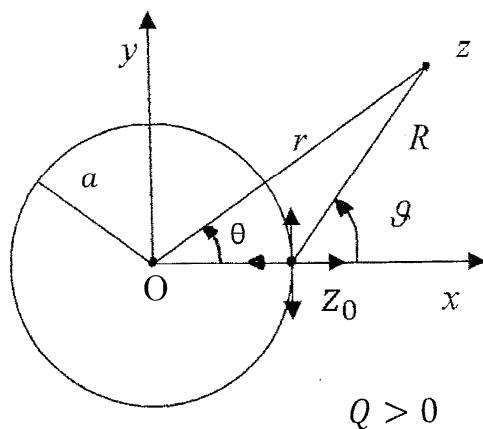


Рис. 2. Источник на окружности

отвечает сток некоторой мощности Q_0 ($Q_0 < 0$), расположенный в бесконечности. Согласно преобразованию инверсии относительно окружности в центре окружности будет располагаться сток той же мощности Q_0 . Поэтому искомый комплексный потенциал (функции φ и ψ) ищем в виде:

$$W_Q = \frac{Q}{\pi} \ln(z - x_0) + \frac{Q_0}{\pi} \ln z + C \quad (3.1)$$

$$(\varphi_Q = \frac{Q}{\pi} \ln R + \frac{Q_0}{\pi} \ln r + C_1, \psi_Q = \frac{Q}{\pi} \vartheta + \frac{Q_0}{\pi} \theta + C_2).$$

Здесь $C = C_1 + iC_2$ - комплексная постоянная, r, θ и R, ϑ - полярные координаты точки z с полюсами в точке $z = 0$ и $z_0 = a$,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (\theta \in (0, 2\pi)),$$

$$R = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}, \vartheta = \arctg \frac{y}{x - a} \quad (\vartheta \in [0, 2\pi]).$$

Формулы (3.1) описывают течение как вне, так и внутри окружности.

Используя (3.1), находим радиальную $v_r = \frac{\partial \varphi_Q}{\partial r}$ и касательную $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_Q}{\partial \theta}$ составляющие скорости

$$v_r = \frac{Q(r - a \cos \theta)}{\pi R^2}, \quad v_\theta = \frac{Q \sin \theta}{\pi R^2}. \quad (3.2)$$

Во всех точках окружности за исключением точки $z_0 = a$ ($r = a, \theta \in (0, 2\pi)$) поле скоростей (3.2) принимает вид

$$v_r = \frac{Q}{2\pi a} + \frac{Q_0}{\pi a}, \quad v_\theta = \frac{Q \sin \theta}{2\pi a(1 - \cos \theta)} = \frac{Q}{2\pi a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (3.3)$$

Так как согласно (1.2) $v_r = 0$ на окружности ($r = a, \theta \in (0, 2\pi)$), то имеем

$Q_0 = -\frac{Q}{2}$. Следовательно, в начале координат ($z = 0$) располагается сток, мощность которого по величине равна половине мощности источника, находящегося в точке $z_0 = a$. Из (3.3) при $Q_0 = -\frac{Q}{2}$ следует, что течение имеет критическую ($v_r = 0, v_\theta = 0$) точку (a, π) .

Выберем в решении (3.1) постоянные $C_1 = 0, C_2 = -\frac{Q}{2}$ и, учитывая $Q_0 = -\frac{Q}{2}$, запишем

$$W_Q = \frac{Q}{\pi} \ln(z-a) - \frac{Q}{2\pi} \ln z - \frac{iQ}{2} \quad (3.4)$$

$$(\varphi_Q = \frac{Q}{\pi} \ln R - \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi_Q = \frac{Q}{\pi} (2\vartheta - \theta) - \frac{Q}{2}).$$

Из (3.4) имеем уравнения линий тока вне и внутри окружности

$$\psi_Q = \frac{Q}{\pi} (2\vartheta - \theta) - \frac{Q}{2} = C.$$

Здесь C - постоянная. Нулевая линия тока ($\psi_Q = C = 0$) представляет собой окружность $r = a, \theta \in (0, 2\pi)$, на которой $2\vartheta - \theta = \pi$, а также лучи вне

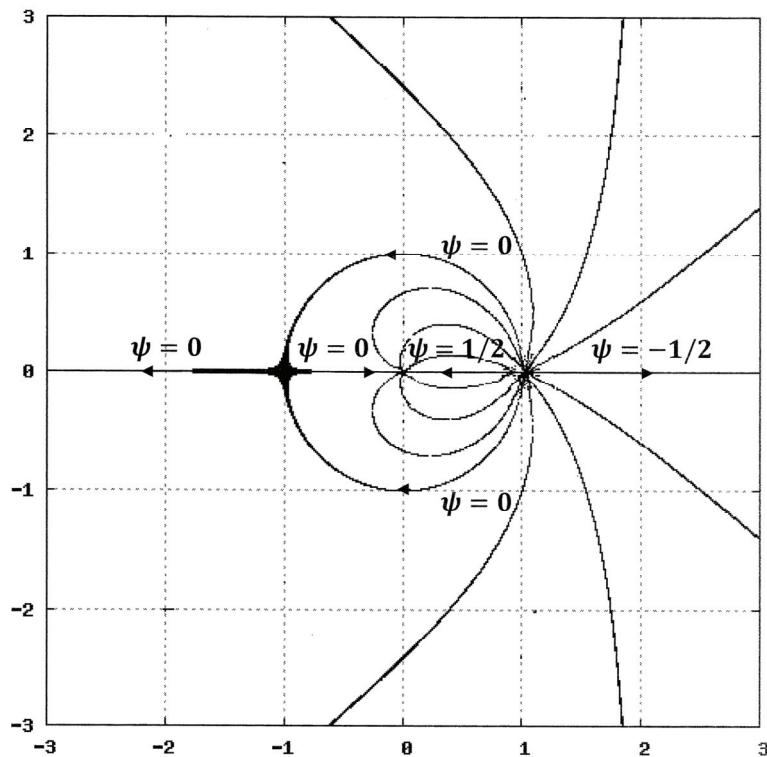


Рис. 3. Линии тока течения

$(x \in [-a, -\infty), y = 0)$ и внутри $(x \in (0, -a], y = 0)$ этой окружности. На отрезке $x \in (a, \infty), y = 0$ $\psi_Q = -\frac{Q}{2}$ и на отрезке $x \in (0, a), y = 0$ $\psi_Q = \frac{Q}{2}$. (см. рис. 3 при $a = 1$ и $Q = 1$, $\Delta C = \frac{1}{8}$).

4. Пусть кроме источника (стока) на кривой L течение имеет источники (стоки) вне этой кривой. Полагаем, что течение, вызванное источниками (стоками), расположенными только вне кривой L (на L нет источников (стоков)), описывает комплексный потенциал $W_* = \varphi_* + i\psi_*$ (φ_* и ψ_* - потенциал скорости и функция тока). Причём на L выполняется условие $\psi_*(z) = 0, z \in L$.

Если L - прямая или окружность, то W_* (φ_* и ψ_*) можно найти на основе теорем о непроницаемой прямой и окружности [2]. Пусть комплексный потенциал $W_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ (φ_0 и ψ_0 - потенциал скорости и функция тока) описывает течение на всей плоскости z (граница L отсутствует) за исключением особых точек течения. Согласно теореме о прямой имеем для течения в полуплоскости $y \geq 0$:

$$W_* = W_0(z) + \overline{W_0(\bar{z})} \quad (4.1)$$

$$(\varphi_* = \varphi_0(x, y) + \varphi_0(x, -y), \psi_* = \psi_0(x, y) - \psi_0(x, -y)).$$

На основании теоремы об окружности, когда особые точки лежат вне окружности радиуса a и $W_0(z) = O(|z|)$ при $|z| \rightarrow 0$ и имеет для течения вне окружности

$$W_* = W_0(z) + \overline{W_0\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \quad (4.2)$$

$$(\varphi_* = \varphi_0(r, \theta) + \varphi_0\left(\frac{a^2}{r^2}, \theta\right), \psi_* = \psi_0(r, \theta) - \psi_0\left(\frac{a^2}{r^2}, \theta\right)).$$

Применяя к решениям (2.1), (4.1) и (3.4), (4.2) принцип наложения ($W = W_Q + W_*$) находим комплексные потенциалы в случае обтекания прямой

$$W = \frac{Q}{\pi} \ln(z - x_0) - W_0(z) + \overline{W_0(\bar{z})} \quad (4.3)$$

и внешнего обтекания окружности

$$W = \frac{Q}{\pi} \ln(z - a) - \frac{Q}{2\pi} \ln z - \frac{iQ}{2} + W_0(z) + \overline{W_0\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) нетрудно найти функции φ и ψ течений.

5. В качестве конкретных примеров решений (4.3) (4.4) рассмотрим обтекание прямой и окружности поступательным потоком со скоростью v_0 (ось Ох направлена против скорости v_0), комплексный потенциал которого $W_0(z) = -v_0 z$. В этом случае в решении (4.3) полагаем $x_0 = 0, \overline{W_0(\bar{z})} = 0$ и находим комплексный потенциал течения

$$W = \frac{Q}{\pi} \ln z - v_0 z.$$

Отсюда имеем функцию тока и уравнение линий тока

$$\psi = \frac{Q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - v_0 y = C.$$

Здесь C - постоянная. Течение имеет критическую ($v_x = 0, v_y = 0$) точку $(\frac{Q}{\pi v_0}, 0)$. "Нулевая" ($C = 0$) линия тока проходит через эту точку и

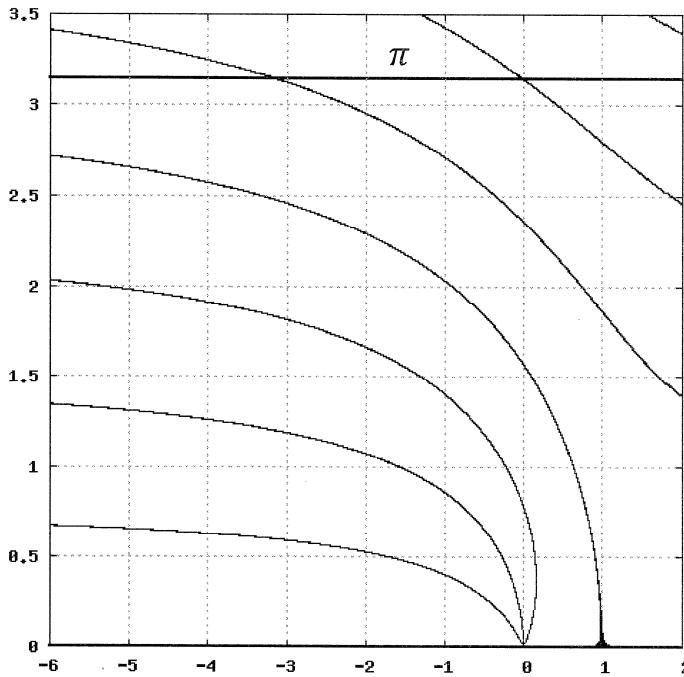


Рис. 4. Источник на прямой в поступательном потоке

имеет асимптоту $y = \frac{Q}{v_0}$.

На рис. 4 построены линии тока при $v_0 = 1, Q = \pi, \Delta C = \frac{\pi}{4}$ (за характерную длину принято расстояние от источника до критической точки).

Полагая в решении (4.4) $\overline{W_0(\bar{z})} = -\frac{v_0 a^2}{z}$, имеем комплексный потенциал внешнего обтекания окружности

$$W = \frac{Q}{\pi} \ln(z-a) - \frac{Q}{2\pi} \ln z - \frac{iQ}{2} - v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right).$$

Отсюда находим функцию тока и уравнение линий тока

$$\psi = \frac{Q}{\pi} \vartheta - \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{Q}{2} - v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = C.$$

Здесь C - постоянная. Течение имеет критическую точку $(a + \frac{\sqrt{Q^2 + 8\pi a Q v_0} + Q}{4\pi v_0}, 0)$. Линия тока, проходящая через эту точку, описывается уравнением

$$\psi = \frac{Q}{\pi} \vartheta - \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{Q}{2} - v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = -\frac{Q}{2}$$

и имеет асимптоты $y = \pm \frac{Q}{2v_0}$.

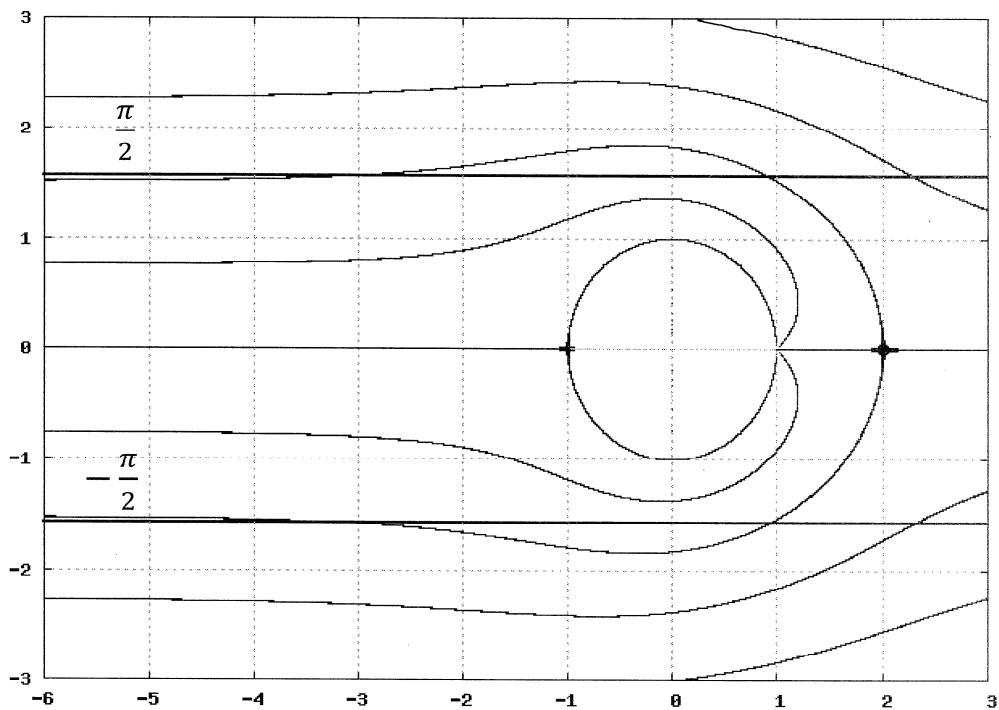


Рис. 5. Источник на окружности в поступательном потоке

На рис. 5 построены линии тока при $a = 1, v_0 = 1, Q = \pi, \Delta C = \frac{\pi}{4}$.

Литература

1. Никольский Д.Н. Фильтрационные течения от источника на окружности или прямой // Труды Межд. школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 5. Орёл. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет». 2007. С. 75-78.
2. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет». 2006. 508 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОМ СТЕПЕННОМ СЛОЕ ГРУНТА¹

Ю.С. Федяев

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,
e-mail: fedyaevys@gmail.com

Ставится для поля скоростей двумерная задача о движении границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в кусочно-неоднородном степенном слое грунта. Исследование задачи сводится к решению системы интегральных и дифференциальных уравнений. Разработан численный алгоритм решения полученных уравнений на основе метода дискретных особенностей. Исследованы конкретные задачи эволюции границы раздела жидкостей в слое переменной толщины.

1. Постановка задачи

Исследуем двумерное движение границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в тонком слое проводимости $P = KH$ (K – коэффициент проницаемости слоя, H – его толщина). Движение жидкости обусловлено источниками (стоками) течения. На горизонтальной плоскости основания слоя выберем декартовы оси координат Oxy . Пусть неподвижная граница Γ делит неограниченную область фильтрации D на области D_1 и D_2 , в которых слои характеризуются проводимостями P_1 и P_2 . Полагаем, что $P_\nu = k_\nu P(M)$, где k_ν – постоянные, $\nu = 1, 2$, $M = M(x, y)$ – точка в плоскости основания слоя. Здесь $P(M)$ – степенная функция координат вида

$$P(M) = y^s, \quad s > 0. \quad (1)$$

Скачок проводимости на границе Γ обусловлен изменением коэффициента проницаемости грунта.

В начальный момент времени в области D_1 имеется изменяющаяся с течением времени область D_t , ограниченная кривой Γ_t , в которой движется жидкость постоянной вязкости μ_2 и плотности ρ_2 . Вне области D_t находится жидкость постоянной вязкости μ_1 и плотности ρ_1 . На единицу массы жидкости действует потенциальная массовая сила $\vec{F}(M, t) = -\nabla \Pi(M, t)$, где ∇ – двумерный оператор Гамильтона, Π – потенциал массовой силы, t – время. Полагаем, что конфигурация области D_t и её границы Γ_t в начальный момент времени $t = 0$ известна и обозначим их D_0 и Γ_0 соответственно. Положение границы Γ_0 определяется параметрическим уравнением (σ – параметр):

$$\text{при } t = 0 \quad \vec{r}_M = \vec{r}_0(\sigma), \quad M \in \Gamma_0. \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

Из закона изменения проводимости слоя (1) следует, что в области течения D присутствует сингулярная линия $L_0 : y = 0$, на которой проводимость слоя обращается в ноль. Она служит границей области фильтрации D , для которой координата $y > 0$.

2. Сведение задачи к системе уравнений

Полагаем, что кривые Γ и Γ_t в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. Будем искать скорость возмущения $\vec{V}(M, t)$, обусловленного наличием границ Γ и Γ_t , в виде потенциала вихревого слоя [1], распределенного с плотностью $g(N, t)$ на Γ и $f(N, t)$ на Γ_t :

$$\vec{V}(M, t) = \int_{\Gamma} g(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N + \int_{\Gamma_t} f(N, t) \vec{V}_B^*(M, N) d\ell_N, \quad M \in D \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t). \quad (3)$$

Здесь $\vec{V}_B^*(M, N) = \vec{V}_B(M, N)/K(N)$, $\vec{V}_B(M, N)$ – скорость в точке M от нормированного вихря, расположенного в точке N .

Решение задачи о движении границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в кусочно-неоднородном слое сводится к эволюционной задаче для системы интегрального и интегро-дифференциальных уравнений с начальными условиями (2) [2]:

$$g(M, t) - 2\lambda_k V_\tau(M, t) = 2\lambda_k v_{0\tau}(M, t), \quad M \in \Gamma, \quad (4)$$

$$f(M, t) - 2\lambda_\mu V_\tau(M, t) = 2[\lambda_\mu v_{0\tau}(M, t) + \alpha K(M) \nabla \Pi(M, t) \cdot \vec{\tau}_M], \quad M \in \Gamma_t, \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M, t) + \vec{V}(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \quad (6)$$

Здесь обозначено $V_\tau(M, t) = \vec{V}(M, t) \cdot \vec{\tau}_M$, $v_{0\tau}(M, t) = \vec{v}_0(M, t) \cdot \vec{\tau}_M$. Вектор $\vec{\tau}_M$ – орт касательной к соответствующей границе в точке M , \vec{v}_0 – заданное невозмущённое поле скоростей в отсутствии границ Γ и Γ_t ($k_1 = k_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = 1$), \vec{V} – прямое значение скорости возмущения (3) на соответствующей границе. Параметр $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\alpha = (\rho_2 - \rho_1)/(\mu_2 + \mu_1)$.

3. Решение задачи

Система уравнений (4)-(6) при начальных условиях (2) решается численно на основе метода дискретных особенностей [3]. Полагаем, что положение границы Γ задается множеством точек $E_\Gamma = \{\xi_k, \eta_k, k = 1, 2, \dots, m\}$. Подвижная граница Γ_t в каждый момент времени t_p , $p = 0, 1, \dots$, задается множеством точек $E_{\Gamma_t}^p = \{x_i^p, y_i^p, i = 1, 2, \dots, n\}$. Тогда начальное условие (2) примет вид:

$$\text{при } t = 0 \quad \Gamma_0 : \{x_i^0, y_i^0, i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (7)$$

Запишем конечно-разностный аналог уравнений (4), (5). Для этого заменим производные по координатам центральными разностями, а

интегралы по формуле прямоугольников. Так как в (4) интеграл по границе Γ , а в (5) по границе Γ_t понимаются в смысле главного значения по Коши, то в сумме, аппроксимирующей эти интегралы, следует выбросить точку в которой записывается соответствующее уравнение. В результате получаем систему $n+m$ линейных алгебраических уравнений для нахождения плотности вихревого слоя в момент времени t_p для точек E_Γ и $E_{\Gamma_t}^p$:

$$g_k^p - 2\lambda_k \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m g_l^p V_{B\bar{a}l}^* \Delta\ell_l + \sum_{j=1}^n f_j^p V_{B\bar{a}j}^* \Delta\ell_j^p \right] = 2\lambda_k v_{0\bar{a}k}^p, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

$$f_i^p - 2\lambda_\mu \left[\sum_{l=1}^m g_l^p V_{B\bar{a}l}^* \Delta\ell_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j^p V_{B\bar{a}j}^* \Delta\ell_j^p \right] = 2[\lambda_\mu v_{0\bar{a}}^p + \alpha K_i \nabla \Pi_i^p \cdot \vec{\tau}_i^p], \quad (9)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Здесь $g_k^p = g(\xi_k, \eta_k, t_p)$, $f_i^p = f(x_i^p, y_i^p, t_p)$, $K_i = K(x_i^p, y_i^p)$, $\Pi_i^p = \Pi(x_i^p, y_i^p, t_p)$, $v_{0\bar{a}k}^p = \vec{v}_0(\xi_k, \eta_k, t_p) \cdot \vec{\tau}_k$, $v_{0\bar{a}}^p = \vec{v}_0(x_i^p, y_i^p, t_p) \cdot \vec{\tau}_i^p$, $V_{B\bar{a}l}^* = \vec{V}_B^*(\xi_k, \eta_k, \xi_l, \eta_l) \cdot \vec{\tau}_k$, $V_{B\bar{a}j}^* = \vec{V}_B^*(\xi_k, \eta_k, x_j^p, y_j^p) \cdot \vec{\tau}_k$, $V_{B\bar{a}l}^* = \vec{V}_B^*(x_i^p, y_i^p, \xi_l, \eta_l) \cdot \vec{\tau}_i^p$, $V_{B\bar{a}j}^* = \vec{V}_B^*(x_i^p, y_i^p, x_j^p, y_j^p) \cdot \vec{\tau}_i^p$, $\tau_{xk} = \frac{\Delta\ell_{k+1}}{\Delta\ell_k + \Delta\ell_{k+1}} \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\Delta\ell_k} + \frac{\Delta\ell_k}{\Delta\ell_k + \Delta\ell_{k+1}} \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\Delta\ell_{k+1}}$, $\tau_{yk} = \frac{\Delta\ell_{k+1}}{\Delta\ell_k + \Delta\ell_{k+1}} \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\Delta\ell_k} + \frac{\Delta\ell_k}{\Delta\ell_k + \Delta\ell_{k+1}} \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\Delta\ell_{k+1}}$, $\Delta\ell_k = \sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2}$, $\tau_{xi}^p = \frac{\Delta\ell_{i+1}^p}{\Delta\ell_i^p + \Delta\ell_{i+1}^p} \frac{x_i^p - x_{i-1}^p}{\Delta\ell_i^p} + \frac{\Delta\ell_i^p}{\Delta\ell_i^p + \Delta\ell_{i+1}^p} \frac{x_{i+1}^p - x_i^p}{\Delta\ell_{i+1}^p}$, $\tau_{yi}^p = \frac{\Delta\ell_{i+1}^p}{\Delta\ell_i^p + \Delta\ell_{i+1}^p} \frac{y_i^p - y_{i-1}^p}{\Delta\ell_i^p} + \frac{\Delta\ell_i^p}{\Delta\ell_i^p + \Delta\ell_{i+1}^p} \frac{y_{i+1}^p - y_i^p}{\Delta\ell_{i+1}^p}$, $\Delta\ell_i^p = \sqrt{(x_i^p - x_{i-1}^p)^2 + (y_i^p - y_{i-1}^p)^2}$.

Для замкнутых границ Γ и Γ_t следует положить $\xi_0 = \xi_m$, $\eta_0 = \eta_m$, $\xi_1 = \xi_{m+1}$, $\eta_1 = \eta_{m+1}$, $x_0^p = x_n^p$, $y_0^p = y_n^p$, $x_1^p = x_{n+1}^p$, $y_1^p = y_{n+1}^p$. Решив систему уравнений (8) и (9), находим плотности вихревого слоя g_k^p , $k = 1, 2, \dots, m$ и f_i^p $i = 1, 2, \dots, n$ в момент времени t_p .

Для нахождения положения границы Γ_t в следующий момент времени t_{p+1} заменим в (6) производные по времени правыми разностями, а интегралы аналогично тому как это было сделано в (9):

$$\vec{r}_i^{p+1} = \vec{r}_i^p + \left[\vec{v}_{0i}^p + \sum_{l=1}^m g_l^p V_{Bil}^* \Delta \ell_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j^p V_{Bij}^* \Delta \ell_j^p \right] \Delta t_{p+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Здесь $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$, $\vec{r}_i^p = (x_i^p, y_i^p)$, $\vec{v}_{0i}^p = \vec{v}_0(x_i^p, y_i^p, t_p)$, $V_{Bil}^* = V_B^*(x_i^p, y_i^p, \xi_l, \eta_l)$, $V_{Bij}^* = V_B^*(x_i^p, y_i^p, x_j^p, y_j^p)$. Совместно решая уравнения (8)-(10) при начальном условии (7) последовательно находим положение границы Γ_t в моменты времени t_p , $p = 1, 2, \dots$

4. Исследование конкретных задач

Исследуем работу системы нагнетательной и эксплуатационной скважин в слое переменной толщины ($K = 1$, $H = y^s$, $s > 0$). Нагнетательную скважину моделируем источником полной мощности Π_i , а эксплуатационную – стоком полной мощности Π_c . Эта задача соответствует так называемому направляемому или пробному заводнению [4]. Считаем, что нагнетательная скважина находится в точке с координатами (x_i, y_i) , а эксплуатационная – в точке (x_c, y_c) . Для потенциала невозмущённой скорости в рассматриваемом случае имеем [5]

$$\varphi_0 = -\frac{\Pi_i}{2\pi} (yy_i)^{-\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_i) - \frac{\Pi_c}{2\pi} (yy_c)^{-\frac{s}{2}} Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega_c).$$

Здесь $\omega_{i(c)} = \frac{(x - x_{i(c)})^2 + y^2 + y_{i(c)}^2}{2yy_{i(c)}}$, Q_v – функция Лежандра второго рода.

Невозмущённое поле скоростей вычисляется по формуле

$$\vec{v}_0 = K \nabla \varphi_0.$$

Считаем, что скважины работают с постоянными равными по модулю дебитами. То есть $q_i = \Pi_i/H(x_i, y_i) = q$, $q_c = \Pi_c/H(x_c, y_c) = -q$. Скважины находятся на расстоянии c от сингулярной линии L_0 . Расстояние между источником и стоком обозначим d . Ось Oy проведём посередине между скважинами. Тогда для их координат получим $(x_i, y_i) = (-d/2, c)$, $(x_c, y_c) = (d/2, c)$. Границу Γ будем моделировать окружностью радиуса R , центр которой находится посередине между источником и стоком в точке $(0, c)$. Первоначальное положение границы Γ_t совпадает с контуром нагнетательной скважины и представляет собой окружность радиуса R_0 с центром в точке расположения источника.

В качестве характерного размера выберем расстояние d . За характерное время T возьмём время T_z загрязнения эксплуатационной скважины нагнетаемой жидкостью при отсутствии границы Γ ($\lambda_k = 0$) и

сингулярной линии L_0 (однородный слой) для модели «разноцветных» жидкостей ($\lambda_\mu = 0$, $\alpha = 0$). Это время определяется по формуле

$$T = \frac{\pi d^2}{3q} \quad (R_0 \ll d).$$

В этом случае безразмерный дебит $q = \pi/3$. Также положим $c = d/2$, $R_0 = R_c = 0,01d$, $R = 0,125d$.

На рис. 1 показана эволюция границы Γ_t в слое $H = y^2$ при $\lambda_k = 0,5$, а на рис. 2 при $\lambda_k = -0,5$ ($\lambda_\mu = 0,5$, $\alpha = 0$). Видим, что нагнетаемая жидкость растекается вдоль сингулярной линии L_0 . В менее проницаемой области D_2 ($\lambda_k > 0$) движение нагнетаемой жидкости замедляется. В более проницаемой области D_2 ($\lambda_k < 0$) жидкость вязкости μ_2 движется быстрее, чем в области D_1 . Аналогично движется граница Γ_t в слое $H = y^4$.

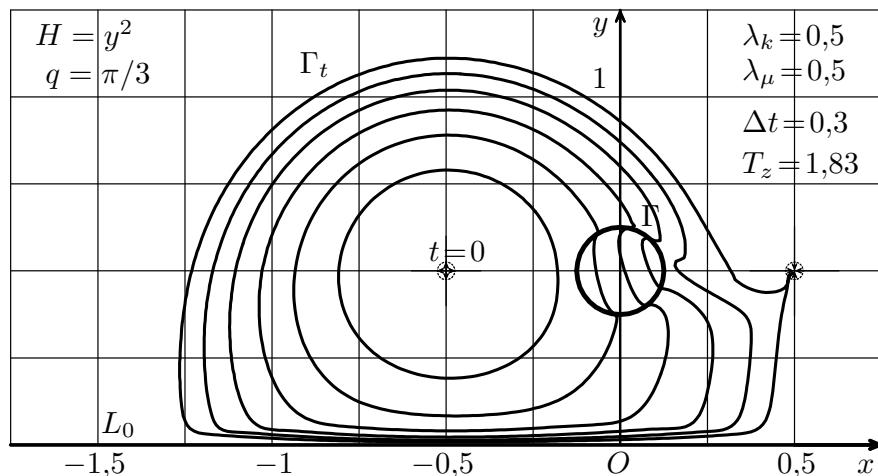


Рис. 1. Эволюция границы Γ_t в слое при $s = 2$, $\lambda_k = 0,5$ ($\lambda_\mu = 0,5, \alpha = 0$)

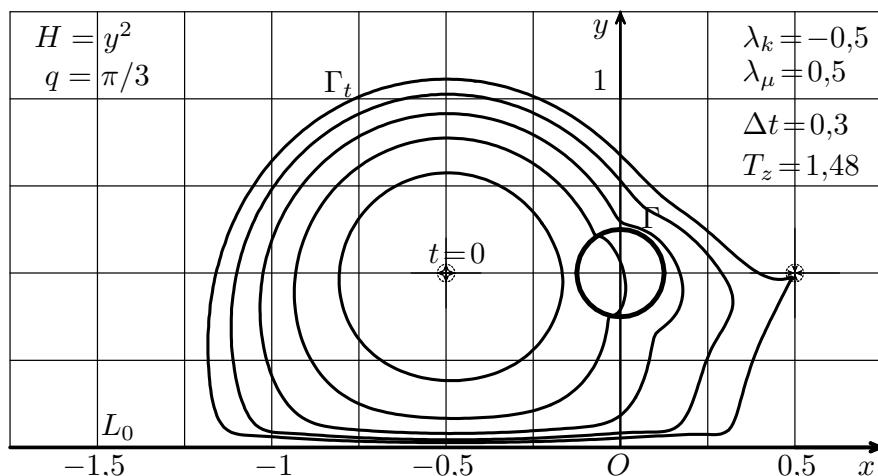


Рис. 2. Эволюция границы Γ_t в слое при $s = 2$, $\lambda_k = -0,5$ ($\lambda_\mu = 0,5, \alpha = 0$)

Исследование влияния различия вязкостей жидкостей и сингулярной линии на время загрязнения эксплуатационной скважины в рассматриваемом случае было проведено в работе [6].

Литература

1. Пивень В.Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 12. С. 1705-1710.
2. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном слое грунта // В сб.: «Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию». Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. С. 321-330.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
4. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: «Мир», 1964. 351 с.
5. Пивень В.Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей //ПММ. 1997. Т.61, вып.4. С. 595-605.
6. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование двумерной эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородных слоях грунта // Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Выпуск 3. Орёл. ОГУ. 2004. С. 54-63.

ВЛИЯНИЕ НА ДЕБИТ СКВАЖИНЫ ОРИЕНТАЦИИ ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ТРЕЩИНЫ (ЗАВЕСЫ) В ПЛАСТЕ ГРУНТА¹

М.А. Фролов

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный институт
экономики и торговли», mark.75@list.ru

Ставится плоскопараллельная задача о дебите скважины при наличии произвольно ориентированных полупроницаемых трещин (завес) в пласте. Исследуется влияние на дебит скважины ориентации трещины. В отличие от известных исследований [1-5], где накладываются ограничения на геометрические размеры трещины, а её ориентация связана с выбором разностной сетки, задача решается численно методом дискретных особенностей, что позволяет моделировать трещины (завесы) произвольными гладкими и кусочно-гладкими границами и располагать их произвольно.

Стационарное течение несжимаемой жидкости в недеформируемой изотропной однородной пористой среде описывается законом Дарси и уравнением неразрывности, записанными в безразмерных величинах [6]:

$$\vec{v} = k \nabla \varphi, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, \vec{v} — скорость фильтрации, φ — потенциал скорости фильтрации, k — коэффициент проницаемости среды, который является постоянной (кусочно-постоянной) величиной в случае однородной (кусочно-однородной) среды.

Пусть в некоторой точке $M_0 = (x_0, y_0)$ области фильтрации D_0 расположена совершенная эксплуатационная скважина дебита q (см. рис.1). Контур скважины L_c — окружность радиуса R_c . Работу скважины будем моделировать точечным стоком мощности q . (см. [7]). Контур питания L_n скважины ограничивает область фильтрации D_0 . Пусть в этой области имеется число p трещин (завес) произвольной формы, ограниченных замкнутыми контурами L_i ($i = 1, \dots, p$) (см. рис.1). Пусть вне трещин (завес) — область D_0 , заполнена средой с коэффициентом проницаемости k_0 , а сами трещины (завесы) — области D_i ($i = 1, \dots, p$) — средой с коэффициентом проницаемости k_i ($i = 1, \dots, p$) (для трещины $k_i > k_0$ и завесы $k_i < k_0$, $i = 1, \dots, p$). Потенциалы скоростей течения в областях D_i ($i = 0, 1, \dots, p$) обозначим соответственно φ_i ($i = 0, 1, \dots, p$). Контуры L_n и L_i ($i = 1, \dots, p$) моделируем гладкими кривыми.

Из (1) и (2) следует, что функции φ_i ($i = 0, 1, \dots, p$) координат точки $M = (x, y)$, всюду за исключением особых точек этих функций в области

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

$D = \bigcup_{i=0}^p D_i$, ограниченной $\Gamma = L_c \bigcup_{i=1}^p L_i \bigcup L_n$, являются гармоническими, так

как удовлетворяет уравнению Лапласа ($\Delta\varphi = 0$). Их представим в виде:

$$\varphi_i(M) = \frac{\Phi(M) + \varphi_*(M)}{k_i}, M \in D_i, i = 0, 1, \dots, p. \quad (3)$$

Функция $\Phi(M)$ — потенциал, описывающий течение жидкости к скважине в безграничной (при отсутствии контуров $\Gamma = L_c \bigcup_{i=1}^p L_i \bigcup L_n$) однородной среде проницаемости $k = 1$, вида:

$$\Phi(M) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (4)$$

Функция $\varphi_*(M)$ — потенциал возмущения, вызванный наличием трещин (завес), контуров питания и скважины (контуров $\Gamma = L_c \bigcup_{i=1}^p L_i \bigcup L_n$).

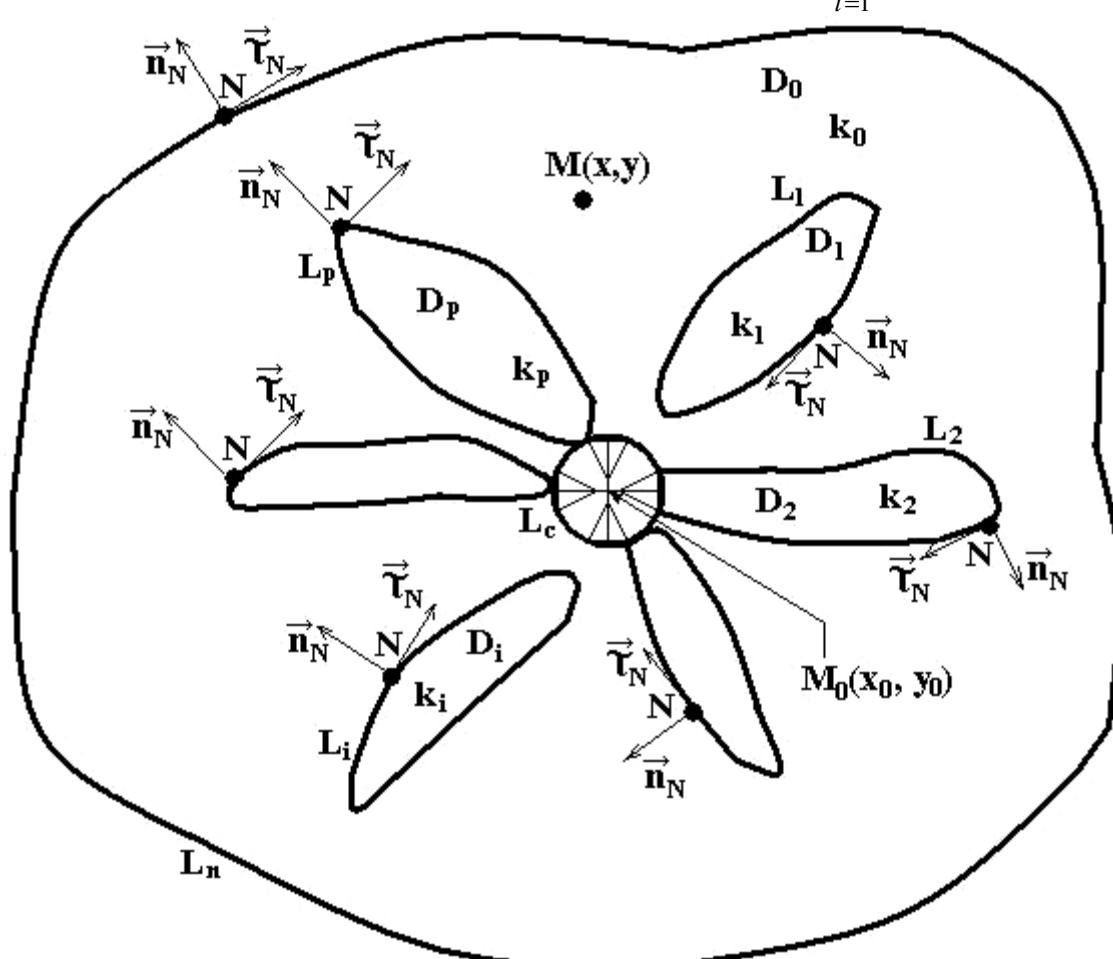


Рис. 1. Постановка задачи

На контурах L_i ($i = 1, \dots, p$) должны выполняться условия непрерывности давления и расхода жидкости [6-8], которые для потенциала $\varphi_*(M)$ примут вид:

$$(1 - \lambda_i) \varphi_*^+(M) - (1 + \lambda_i) \varphi_*^-(M) = 2\lambda_i \Phi(M),$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n_M} \right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n_M} \right)^-, M \in L_i, i = 1, \dots, p, \quad (5)$$

где знаками «+» и «-» отмечены предельные значения соответствующих функций при подходе к контурам L_i ($i = 1, \dots, p$) из областей D_0 и D_i ($i = 1, \dots, p$) (выбор ортов нормали \vec{n} и касательной $\vec{\tau}$ см. на рис.1). В условиях (5) $\lambda_i = \frac{k_0 - k_i}{k_0 + k_i}$, $\lambda_i \in (-1, 1)$ ($i = 1, \dots, p$). В случае трещины $\lambda_i < 0$ и завесы $\lambda_i > 0$.

На контуре питания L_n задано постоянное давление [7]. Условие для потенциала $\varphi_*(M)$ имеет вид:

$$\varphi_*^-(M) = \alpha(M) - \Phi(M), M \in L_n, \quad (6)$$

где $\alpha(M)$ — в общем случае непрерывная периодическая функция координат.

Пусть на контуре скважины L_c задано среднее давление C (см. [9]):

$$\varphi_*(M) = C - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{R_c}, M = M_0. \quad (7)$$

Таким образом, чтобы найти дебит q скважины, необходимо определить потенциал $\varphi_*(M)$, удовлетворяющий условиям (5) – (7).

В случае границ L_n и L_i ($i = 1, \dots, p$), моделируемых гладкими кривыми класса Ляпунова, задача о дебите сводится к системе интегральных уравнений и интегральных соотношений.

Согласно [9], система интегральных уравнений (на контурах L_n и L_i , $i = 1, \dots, p$) и интегрального соотношения (на контуре скважины) будет иметь вид:

$$-2\lambda_i \left(\sum_{v=1}^p \int_{L_v} g_v(N) \nabla_N G(N, M) \vec{n}_N dS_N + \int_{L_n} f(N) \nabla_N G(N, M) \vec{n}_N dS_N \right) + g_i(M) = 2\lambda_i \Phi(M), M \in L_i, i = 1, \dots, p. \quad (8)$$

$$2 \left(\sum_{v=1}^p \int_{L_v} g_v(N) \nabla_N G(N, M) \vec{n}_N dS_N + \int_{L_n} f(N) \nabla_N G(N, M) \vec{n}_N dS_N \right) - f(M) = 2[\alpha(M) - \Phi(M)], M \in L_n. \quad (9)$$

$$\sum_{v=1}^p \int_{L_v} g_v(N) \nabla_N G(N, M) \vec{n}_N dS_N + \int_{L_n} f(N) \nabla_N G(N, M) \vec{n}_N dS_N = C - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{R_c}, M = M_0. \quad (10)$$

Здесь $g_v(N)$ ($v = 1, \dots, p$) и $f(N)$ — плотности распределения особенностей на контурах L_i ($i = 1, \dots, p$) и L_n соответственно; ∇_N — оператор Гамильтона по координатам точки N ; $G(N, M)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа или, в общем случае, функция Грина, учитывающая канонический контур питания (прямая, окружность).

Используя развитый в [6, 7, 10] подход, задача решается численно. Задавая контуры L_n и L_i ($i = 1, \dots, p$) параметрически и производя их дискретизацию, перейдём от системы (8) – (10) к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений.

Исследовано влияние на дебит q ориентации трещины.

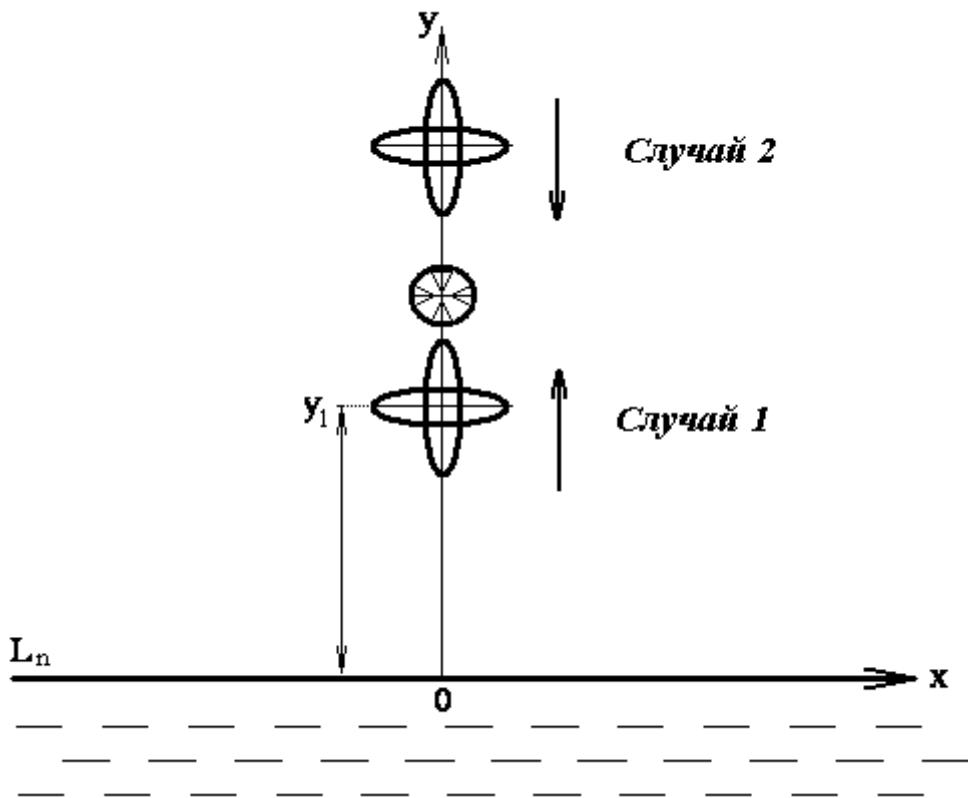


Рис. 2. Схема приближения эллиптической трещины к скважине

Будем моделировать трещину эллипсом с полуосами a (малая) и b (большая). Рассмотрим, как влияет ориентация эллиптической трещины на дебит скважины при различных расстояниях до скважины. Пусть контур питания — прямая $y = 0$ (см. рис. 2). Расположим эллипс сначала радиально по отношению к скважине. При этом её дебит будет равен q_1 . Затем повернём эллипс на угол 90° относительно его центра, точки (x_1, y_1) . Дебит скважины станет равным q_2 . Будем приближать трещину к скважине сначала со стороны контура питания (случай 1), а затем с противоположной стороны (случай 2). При этом будем находить относительное изменение дебита — величину $\eta = \frac{q_1}{q_2} - 1$. Выберем в качестве единицы длины

ординату скважины: $y_0 = 1$. Зададим числовые значения: $n=800$ (число точек разбиения эллипса), $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $R_c = 0.01y_0$, $a = 0.01y_0$, $b = 0.08y_0$, $C = 1$, $\lambda = -0.9$.

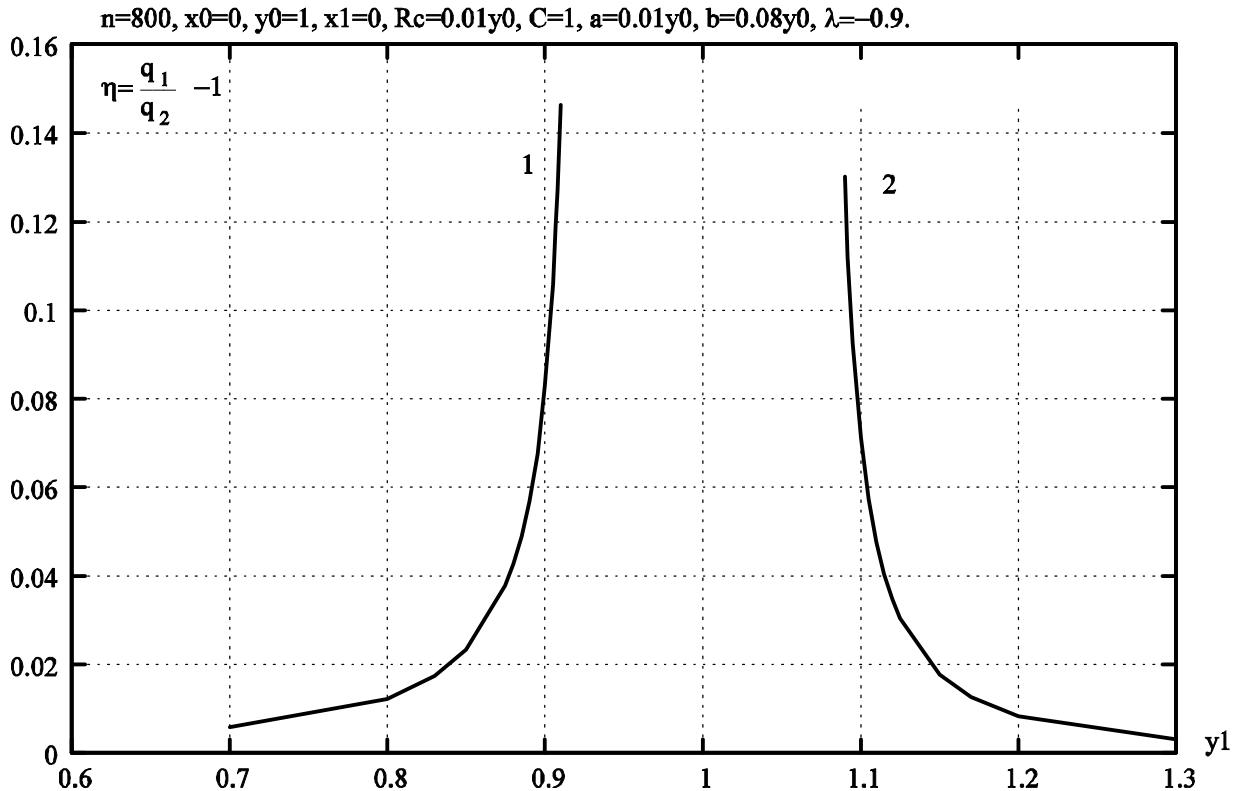


Рис. 3. Влияние ориентации трещины на дебит в зависимости от расстояния до скважины

На рис. 3 показаны графики для случаев приближения трещины 1 и 2 (см. рис. 2). Как видим, графики почти симметричны, следовательно, влиянием контура питания в данном случае можно пренебречь. Максимальное влияние на дебит наблюдается непосредственно у скважины (радиальный эллипс касается скважины). При этом в случае 1 изменение дебита составляет $\eta = 14,63\%$, а в случае 2 $\eta = 13,02\%$. При удалении центра эллипса (x_1, y_1) от скважины эта зависимость резко ослабевает в обоих случаях. Зависимостью $\eta(y_1)$ можно пренебречь (величина $\eta < 5\%$) уже при удалении эллиптической трещины от скважины на расстояние $2.5R_c$ в случае 1, и на расстояние $2R_c$ в случае 2.

Рассмотрим подробно случай, когда радиальная эллиптическая трещина касается скважины (рис. 4). Повернём эллипс сначала на 45° (положение 2), а затем на 90° (положение 3) относительно центра скважины $M_0 = (x_0, y_0)$. В таблице 1 показано относительное изменение дебита — величины $\left(\eta = \frac{q_i}{q_1} - 1 \right) \times 100\%$, ($i = 2, 3$) при повороте скважины. Как видим, относительное изменение дебита составляет менее 1%.

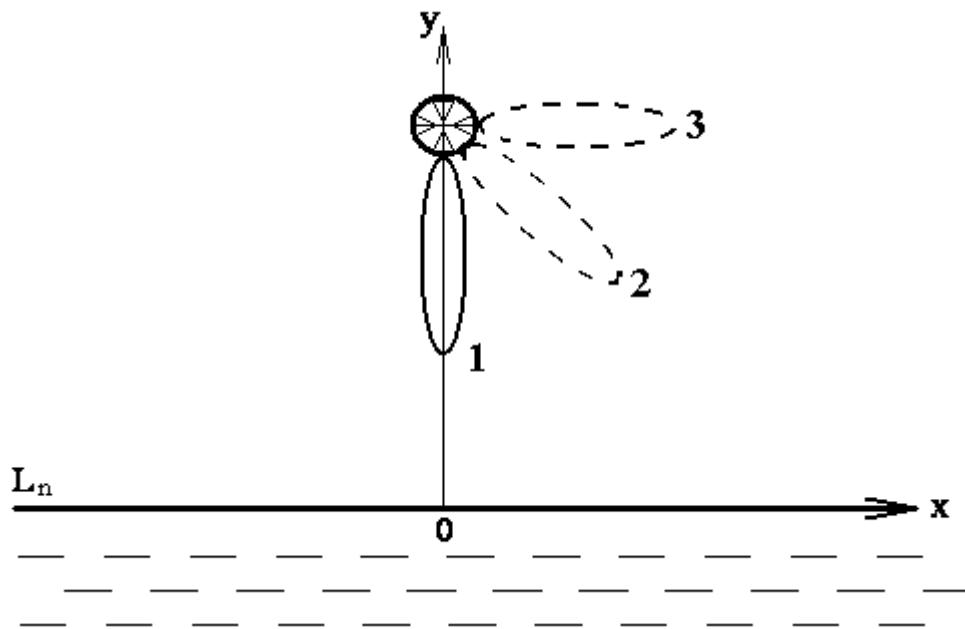


Рис. 4. Поворот эллиптической трещины относительно центра скважины

Табл. 1. Относительное изменение дебита при повороте эллиптической трещины

№	1	2	3
Ориентация трещины	положение 1	положение 2	положение 3
q	1.378167	1.375158	1.366146
$\eta, \%$		0.22	0.88

Будем теперь поворачивать эллипс относительно точки его касания со скважиной (см. рис. 5, табл. 2).

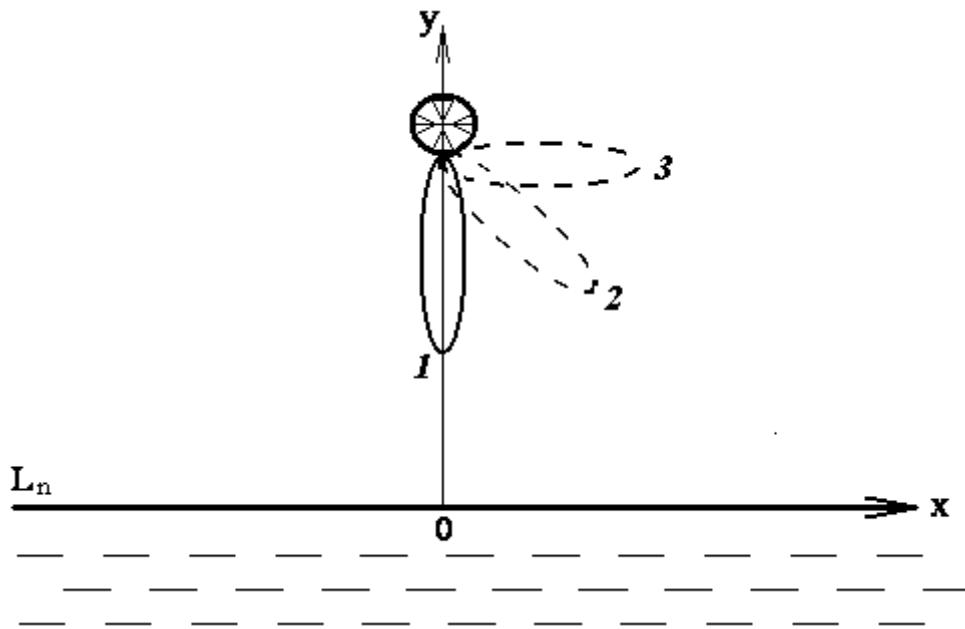


Рис. 5. Поворот эллиптической трещины относительно точки касания со скважиной

Табл. 2. Относительное изменение дебита при повороте эллиптической трещины

№	1	2	3
Ориентация трещины	положение 1	положение 2	положение 3
q	1.378167	1.377721	1.360446
$\eta, \%$		0.03	1.3

На рис. 6 (табл. 3) рассмотрен случай, когда контуром питания L_n является окружность радиуса $R = y_0 = 1$ при прочих равных условиях.

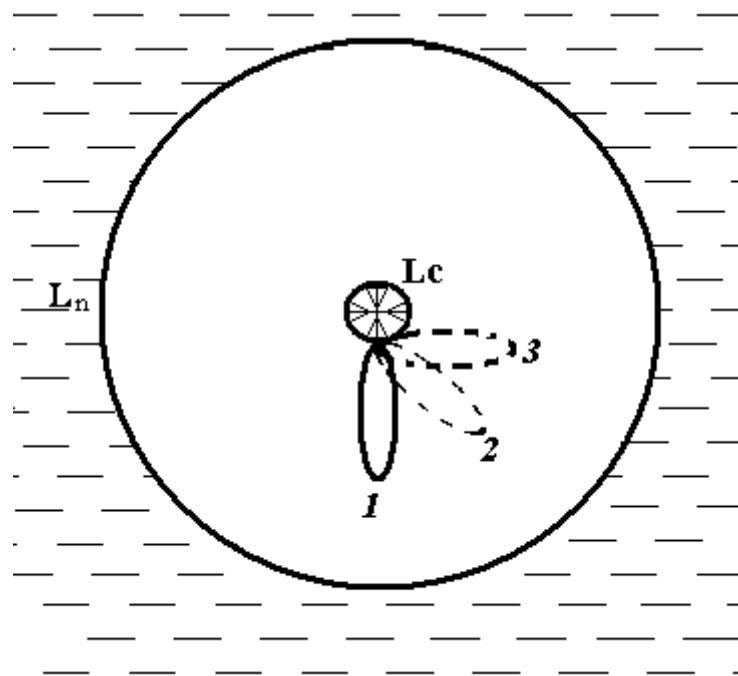


Рис. 6. Поворот эллиптической трещины относительно точки касания со скважиной для кругового контура питания

Табл. 3. Относительное изменение дебита при повороте эллиптической трещины

№	1	2	3
Ориентация трещины	положение 1	положение 2	положение 3
q	1.612363	1.611810	1.600769
$\eta, \%$		0.034	0.72

Как видим, при выбранных числовых значениях, относительное изменение дебита η во всех трёх случаях (табл. 1, табл. 2, табл. 3) ничтожно мало и практически не зависит от выбора формы контура питания. Поэтому в дальнейшем, при исследовании дебита скважины в таких задачах, можно ограничиться случаем радиальных трещин, что существенно упрощает расчёты.

Литература

1. Казанцев П.Ю. Исследование технологий воздействия гидроразрывом пласта на поздней стадии разработки месторождений // Автореф. на соиск. уч. степ. канд. тех. наук, Тюмень, 2004. – 25с.
2. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: Недра. 1999. –213 с.
3. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 128 с.
4. Кац Р.М., Андриасов А.Р. Математическая модель трёхфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде // Сб. науч. тр. ВНИИ. –М., 1986.– Вып. 95. – С. 61–66.
5. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // SPE Journal. –1978. –V. 18, №3. – P. 183–194.
6. Пивень В.Ф. Математическое моделирование двумерных задач гидродинамики в неоднородных слоях. Докт. дисс. – Орёл: ОГУ, 1998. – 266с.
7. Фролов М.А. Исследование двумерных граничных задач о дебитах системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Канд. дисс. – Орёл: ОГУ, 2001. – 148с.
8. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. – М.: Наука., 1971. – 368с.
9. Пивень В.Ф. Фролов М.А. Исследование дебита скважины в пласте грунта с трещинами (завесами). Труды XIV международного симпозиума «МДОЗМФ–2009». Ч.1. Харьков-Херсон, 2009. с.137–140.
- 10.Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОВЕРХНОСТИ МОНОКРИСТАЛЛА ВИСМУТА.

Ю.В. Хрипунов

Россия, ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,

e-mail: Phyrexia@yandex.ru

Рассматривается метод построения Фурье-образа поверхности монокристаллов висмута по данным СТМ- и АСМ-изображений. Приводится Фурье-анализ поверхности монокристалла висмута.

В связи с бурным развитием наноэлектроники все большее внимание уделяется изучению явлений, происходящих на поверхности твердых тел. Это приводит к возникновению множества проблем. Применявшиеся ранее экспериментальное оборудование и методы исследований оказываются непригодными для изучения поверхности в нанометровом диапазоне. С появлением сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) стало возможным получать необходимую информацию о поверхности. Основными методами исследования СЗМ являются сканирующая тунNELьная микроскопия (СТМ) и атомно-силовая микроскопия (АСМ), позволяющие получать снимки поверхности с нанометровым разрешением. [1, 2] Обработка результатов СТМ и АСМ исследований требует соответствующего подхода. Помехи и шумы, вносимые из-за конструкционных особенностей микроскопов, в процессе работы, могут искажать данные. Эти обстоятельства делают необходимыми создание и применение специальных методов обработки данных.

К началу 21 века сформировалась теория, связанная с преобразованием Фурье. Пространственная или временная функция разбивается на синусоидальные составляющие, каждая из которых имеет свою частоту, амплитуду и фазу. Преобразование Фурье — это функция, представляющая амплитуду и фазу, соответствующие каждой частоте. Преобразование можно получить двумя различными математическими методами, один из которых применяется, когда исходная функция непрерывна, а другой — когда она состоит из множества отдельных дискретных измерений. Функцию, полученную из значений с определёнными дискретными интервалами, можно разбить на ряд синусоидальных функций с дискретными частотами — от самой низкой, главной частоты и далее с частотами, вдвое, втрое и т.д. выше главной. Сумма таких функций представляет собой ряд Фурье. В случае дискретной функции преобразование Фурье не является ни рядом, ни интегралом Фурье — это зависящий от частоты список амплитуд и фаз, соответствующих компонентам ряда Фурье. Изучение преобразования Фурье главным образом сводится к поиску эффективных способов перехода от функций к их преобразованному виду и обратно.[3]

Для функций, форма которых основана на экспериментальных данных, применяют численные методы, позволяющие рассчитывать преобразования Фурье. Один из таких методов был разработан в 1965 году Джеймсом У. Кули из Исследовательского центра им. Томаса Уотсона корпорации IBM и Джоном У. Тьюки из Bell Telephone Laboratories в Муррей-Хилле (шт. Нью-Йорк), и получил название - быстрое преобразование Фурье (БПФ). В методе БПФ кривая делится на большое число равномерно распределённых выборочных значений. Количество умножений, необходимое для анализа кривой, уменьшается наполовину при таком же уменьшении количества точек. [3] Например, кривая с 16 выборочными значениями обычно требует 16^2 , или 256 умножений. Если эту кривую поделить на два интервала, по 8 точек в каждом, тогда количество умножений, требующихся для анализа каждого интервала, равно 8^2 , или 64, что в сумме для обоих интервалов дает 128, или половину от исходного количества.

Результаты применения к данным участка поверхности кадра, полученного с помощью СММ-2000, Фурье-преобразования хранятся в окне в виде пары массивов вещественных чисел - вещественной и мнимой частей Фурье-амплитуд. Размерность массивов определяется выбранной для БПФ частью поверхности 2D изображения, и равна $N \times N$, где N является степенью двойки, $N=2^m$. Фурье-образ отображается в окне, для чего строится симметризованный массив модулей амплитуд относительно центральной точки Фурье-образа. Размерность такого массива равна $(N+1) \times (N+1)$. Из массива исключается центральная точка (амплитуда в ней полагается равной нулю), затем все элементы массива логарифмируются (точнее, вычисляется $\log_{10}(A_{ij}+1)$, где A_{ij} - модуль амплитуды в i -й точке по X и j -й точке по Y массива). Прологарифмированный массив отображается в палитре окна обычным образом. Принятый способ отображения обусловлен большим разбросом Фурье-амплитуд по порядку величины. Все операции с Фурье-образом выполняются над массивами вещественных и мнимых частей Фурье-амплитуд, каждый раз после операции массив модулей амплитуд и изображение в окне формируются заново.

Полученный в результате БПФ части поверхности размером $N \times N$ точек Фурье-образ содержит также $N \times N$ точек и отображается в 2D-окне. Точки расположены в плоскости пространственных частот (fx, fy) на прямоугольной сетке. Сначала рассчитывается величина R_{rms} , связанная со среднеквадратичным разбросом высот точек исходной поверхности, как корень квадратный из суммы квадратов амплитуд всех точек фурье-образа, за исключением нулевой (где $fx=fy=0$), и в плоскости (fx, fy) вводится полярная система координат (f, a) , где f - радиальная частота, a - полярный угол. Затем в полярной системе строится равномерная по углам и радиальной частоте сетка, накрывающая диапазон углов 0-360 градусов и радиальных частот 0-f_{max}. Выбирается шаг по углу и количество ячеек по радиальной частоте. На графиках в силу центральной симметрии Фурье-образа достаточно отображать диапазон углов 0-180 градусов. В качестве

f_{max} принимается минимальная из двух максимальных по точкам Фурье-образа частот $f_{x_{max}}$, $f_{y_{max}}$.

В построенной сетке для каждой ячейки, с соответствующим номером по радиусу (f) и по углу (a), вычисляется величина $S(f,a)$ в виде суммы квадратов модулей Фурье-амплитуд точек, попавших в данную ячейку. Точка, соответствующая началу координат (где $f_x=f_y=0$), из подсчетов исключается. По вычисленной $S(f,a)$ рассчитываются зависимости **Rms(f)**, **Rms(f,a_0)**, **Rms(a)**, **Rms(a,f_0)** и величины **Rms(a_0)**, **Rms(f_0)**. **Rms(f)** - зависимость от радиальной частоты f корня квадратного из суммы $S(f,a)$ по углам a (зависимость корня из суммы квадратов амплитуд точек попавших в кольцо сетки с радиальной частотой f). **Rms(a)** - зависимость от полярного угла a корня квадратного из суммы $S(f,a)$ по частотам f (зависимость корня из суммы квадратов амплитуд точек попавших в ячейки сетки с полярным углом a (т.е. в сектор плоскости с углом a)). **Rms(f,a_0)** - зависимость от радиальной частоты f корня квадратного из $S(f,a)$ при фиксированном угле $a=a_0$ (зависимость Rms от частоты f на луче с углом a_0). Угол a_0 задается. **Rms(a,f_0)** - зависимость от полярного угла a корня квадратного из $S(f,a)$ при фиксированной частоте $f=f_0$ (зависимость Rms от угла a_0 на кольце радиуса f_0). Частота f_0 задается. **Rms(a_0)** - значение Rms(a) при угле $a=a_0$. Rms(a_0) равен корню квадратному из суммы квадратов ординат всех точек кривой Rms(f,a_0). **Rms(f_0)** - значение Rms(f) при частоте $f=f_0$. Rms(f_0) равен корню квадратному из суммы квадратов ординат всех точек кривой Rms(a,f_0).

На рисунке 1 приведен первичный ACM-кадр поверхности среза монокристалла висмута, полученного при электроискровой резке. Видна волнообразная гладкая структура поверхности среза.

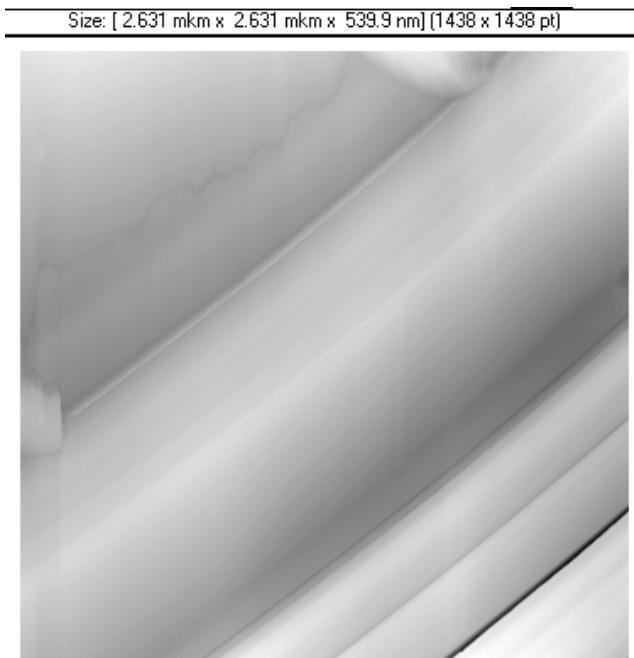


Рис. 1. Первичный ACM-кадр

После преобразования Фурье строится Фурье-образ первичного ACM-кадра. (Рис. 2)

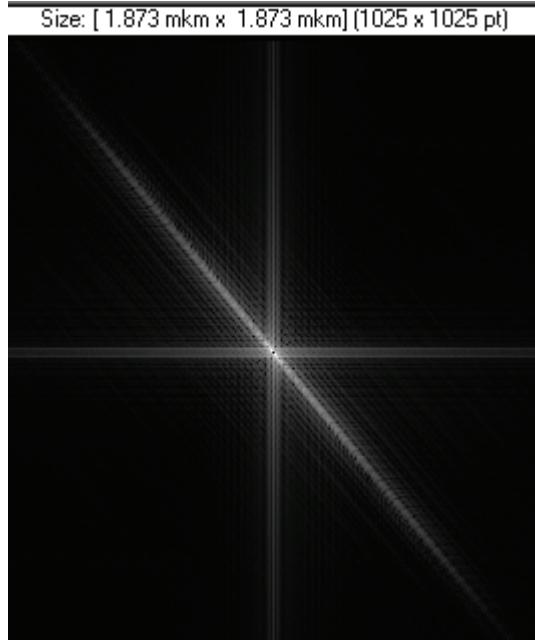


Рис. 2 Фурье-образ первичного ACM-кадра

Анализ Фурье-образа кадра (рис. 2) показывает отсутствие каких-либо выделенных максимумов характерных для регулярных помех типа вибраций или засветки от ламп переменного тока. Такие помехи возможны в силу конструкционных особенностей СММ-2000 [4]. Так же Анализ Фурье-образа ACM-кадра показал присутствие выделенного направления шероховатости поверхности, что выявляет особенности технологии электроискровой резки монокристаллов висмута и показывает свойства монокристаллов висмута. (Рис. 3)

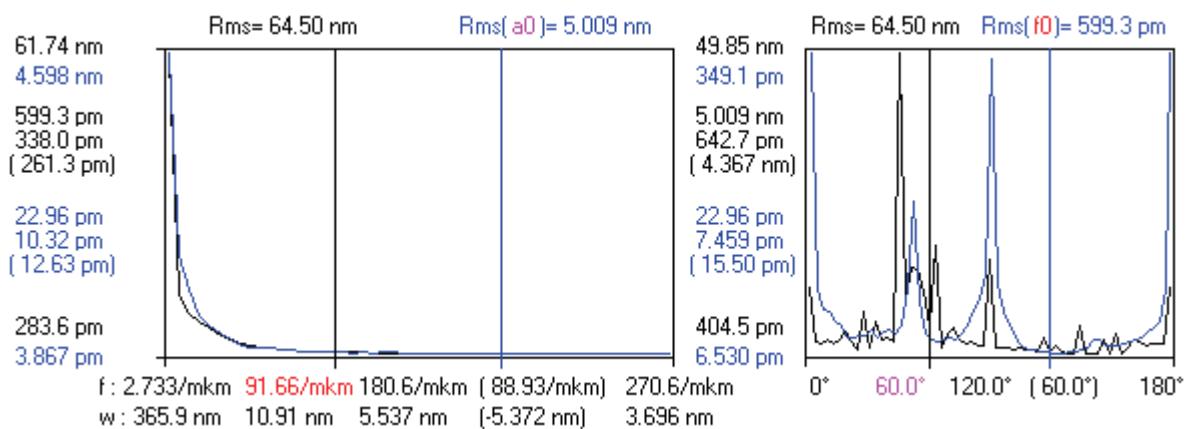


Рис. 3. Графики функций Rms(f), Rms(f,a0), Rms(a), Rms(a,f0) в линейном масштабе

Построение и анализ Фурье-образа изображения участка поверхности дает дополнительные сведения о составе и структуре поверхности, позволяет установить определенные порядки расположения объектов на поверхности и отсеять помехи, на получаемых ACM- и СТМ- кадрах, внесенные различными внешними источниками, связанные с

конструкционными особенностями микроскопа СММ-2000 и факторами окружающей среды, что имеет огромное значение при обработке полученных результатов.

Данные анализа Фурье-образа АСМ-кадра позволили установить присутствие выделенного направления шероховатости поверхности. Полученная информация дает представления о характере и особенностях получения среза монокристаллов висмута, указывает на недостатки метода электроискровой резки кристаллов и показывает необходимость дополнительной обработки поверхности для применения в высокотехнологичном производстве.

Литература

1. Киселев В.Ф., Козлов С.Н., Зотеев А.В. Основы физики поверхности твердого тела. М. МГУ. 1999. 287 с.
2. Брандон Д., Каплан У. Микроструктура материалов. Методы исследования и контроля. М. Техносфера. 2004. 377с.
3. Брейсуэлл Р.Н. Преобразование Фурье. Scientific American № 8. 1989. С. 48–56.
4. Логинов Б.А. Сканирующая тунNELьная и атомно-силовая микроскопия: пособие по работе на микроскопе СММ-2000. М. ГОУ МИФИ (ГУ). 2007. 92 с.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анпилогов Д.И.	5	Федяев Ю.С.	99
Апаринов А.А.	12	Фролов М.А.	105
Бомба А.Я.	17	Хрипунов Ю.В.	113
Булыгин В.С.	24	Шпилевой А.Я.	36
Васильев А.В.	31		
Васильев В.Б.	31		
Волянская И.К.	36		
Гаврилюк В.И.	17		
Гандель Ю.В.	24		
Голубев Г.В.	40		
Деткова Ю.В.	46		
Дорофеева В.И.	52		
Зайцев А.А.	36		
Икрянов И.И	58		
Квасов А.А.	65		
Костин О.В.	92		
Марков О.И	70		
Никольская Т.А.	74		
Никольский Д.Н.	46, 52		
Новиков В.С.	77		
Пивень В.Ф.	81, 92		
Сетуха А.В.	12		

**VII МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР
МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ РОССИИ И УКРАИНЫ**
«Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»
 г. Орёл, 9-14 ноября 2009 г.

ПРОГРАММА

9 ноября <i>понедельник</i>	9⁰⁰ – 18⁰⁰	Заезд и регистрация участников (ауд. 405)
10 ноября <i>вторник</i>	9⁰⁰ – 10⁰⁰	Регистрация участников (ауд. 405)
	10⁰⁰	Открытие школы-семинара (ауд. 423)
	10⁰⁰ – 10¹⁰	Профессор Пузанкова Е.Н. Вступительное слово проректора по НИР Орловского госуниверситета
	10¹⁰ – 11⁴⁰	Профессор Гандель Ю.В. «Дискретные математические модели открытых волноводов и металлических линз»
	11⁴⁰ – 12⁰⁰	Перерыв
	12⁰⁰ – 13³⁰	Профессор Желанников А.И. «Современные математические модели аэро-гидродинамики»
	13³⁰ – 14³⁰	Обед
	14³⁰ – 16⁰⁰	Профессор Пивень В.Ф. «Границные задачи двумерной фильтрации в анизотропном и неоднородном слое пористой среды»
	16⁰⁰ – 16¹⁰	Перерыв
	16¹⁰ – 17⁴⁰	Доцент Мищенко В.О. «Модели и средства обеспечения качества исследовательских компьютерных систем математического моделирования МДО»
	17⁴⁰ – 18⁰⁰	Дискуссии
11 ноября <i>среда</i>	9³⁰ – 11⁰⁰	Чл.-корр. РАН, профессор Тыртышников Е.Е. «Современные вычислительные методы линейной алгебры»
	11⁰⁰ – 11³⁰	Перерыв
	11³⁰ – 13⁰⁰	Профессор Голубев Г.В. «Решение некоторых задач фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах»
	13⁰⁰ – 14⁰⁰	Обед
	14⁰⁰ – 15³⁰	Профессор Сетуха А.В. «Интегральные уравнения математической физики и примеры их решения»
	15³⁰ – 15⁵⁰	Перерыв
	15⁵⁰ – 18⁰⁰	Доклады молодых учёных, дискуссии
12 ноября <i>четверг</i>	9⁰⁰ – 14⁰⁰	Экскурсия в «Спасское-Лутовиново»
	14⁰⁰ – 15⁰⁰	Обед
	15⁰⁰ – 16³⁰	Доклады молодых учёных, дискуссии
	16³⁰ – 16⁵⁰	Перерыв
	16⁵⁰ – 18⁰⁰	Доклады молодых учёных, дискуссии
13 ноября <i>пятница</i>	9⁰⁰ – 12⁰⁰	Обсуждение докладов, дискуссии. Закрытие школы-семинара. Отъезд участников школы

Научное издание

Т Р У Д Ы

Международных школ-семинаров
«Методы дискретных особенностей
в задачах математической физики»
Выпуск 7

Компьютерная верстка: Ю.С. Федяев

Подписано в печать 28.10.2009 г. Формат 60x84 1/16
Печать ризография. Бумага офсетная. Гарнитура Times
Объём 7,5 усл. печ. л. Тираж 100 экз.
Заказ № 566 от 06.10.2009 г.

Редакционно-издательский отдел
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95

Лицензия ПД №8-0023 от 25.09.2000 г.
Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»
г. Орёл, ул. Васильевская, 138. Тел./факс (4862)741152